

論文

나선형 산란체의 전류분포 특성

準會員 南 祖 鎬* 正會員 金 正 祺**

The Characteristics of Current Distribution on a Spiral Scatterer

Chang Ho NAM* and Jung Ki KIM** Regular Members

要 約 안테나 해석 및 설계에 있어 전류분포는 그 기본을 이루고 있다. 본 연구에서는 가는 도체를 평면상에 감은 나선형 산란체에 평면파가 입사한 경우의 나선형 도체의 전류분포를 적분방정식을 세워서 구하는 방법을 제시하고, 나선형 산란체의 길이(회전수)와 입사파의 입사각을 바꾼 경우의 전류분포를 계산한 결과를 제시하였다. 수치 해석으로는 기저 함수로 Cubic B-Spline 함수를 이용한 Point matching 방법을 적용하였다.

ABSTRACT Current distributions are the basis of analyzing and designing the antenna. In this paper, a method of deriving the current distribution of a spiral shaped thin wire scatterer is proposed when plane wave is incident on it. The calculated results are also shown for several spiral sizes and incidence angles selected. For numerical calculation, the method of point matching is used with a cubic B-spline function as a basis function.

1. 서 론

안테나 해석 및 설계에 있어 전류분포는 그 기본을 이루고 있다. 전류분포를 구함으로써 입력 admittance, power pattern, scattered field 등 여러 가지 안테나 특성을 얻을 수 있다.

이 논문에서는 가느다란 나선형 wire(spiral curved wire)에 유기되는 전류분포를 구하기 위해 그 기하학적인 특성을 고려하여 적분방정식을 유도한다.

그리고 가느다란 나선형 wire의 기하학적인 특성에 의해 팽창율(혹은, 수축율, flare rate)을 알맞게 조정하면 거의 straight wire가 됨을 알 수 있다.

이에 근거하여 가느다란 나선형 wire에 대한 적분방정식을 straight wire에 적용하여 전류분포에 대한 그 군사 관계를 알아보고 나선형 구조를 갖는 가느다란 wire에서 입사각과 회전수에 따른 전류분포를 알아본다.

2. 引 論

*,** 中央大學校工科大學電子工學科
Dept. of Electronics Engineering, Chung Ang University,
151 Korea.
論文番號 : 86- 25 (接受 1986. 6. 23)

완전도체가 자유공간에 놓여 있을 때 그 도체에 유기되는 scattered field \bar{E}^s 는 전하밀도 σ 와 전류 \mathbf{J} 에 의해 생성되는데 이러한 scattered fi-

eld는 지연 potential의 적분으로 표현된다.

그리고 경계조건은 도체표면 S상에서 homogeneous dirichlet 경계조건이 적용된다.

위의 내용을 방정식으로 요약하면 아래와 같다.

$$\bar{E}^s = -j\omega A = \nabla \Phi \quad (1)$$

$$A = \mu \oint_S \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dS \quad (2)$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \oint_S \delta \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dS \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{-1}{j\omega} \nabla \cdot J \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \times \bar{E}^s = -\mathbf{n} \times \bar{E}^t \text{ on } S \quad (5)$$

그 완전도체를 가느다란 wire로 생각할 경우 다음 조건을 만족해야 한다⁽¹⁾.

(i) 전류는 wire의 축방향으로만 흐른다.

(ii) 전류와 전하밀도는 wire축상에서 전류 \bar{I} 와 전하밀도 σ 의 filament로 구성되어 있다고 본다.

(iii) 경계조건(5)는 wire 표면에서 \bar{E} 의 축성분에만 적용된다.

위의 3 가지 조건이 만족된다면 식(1)~(5)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-\bar{E}_t^s = -I\omega A_t - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{ on } S \quad (6)$$

$$A = \mu \int_{axis} I_t \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dl \quad (7)$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \int_{axis} \sigma_t \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dl \quad (8)$$

$$\sigma_t = \frac{-1}{j\omega} \frac{dl}{dl} \quad (9)$$

윗 식에서 l 은 wire 축상의 길이를 나타내는 변수이고 R 은 축상의 source point로부터 wire 표면상의 field point까지의 거리를 나타낸다.

이러한 이론들을 근거로 하여 나선형 구조를 갖는 가느다란 wire에 유기되는 scattered field

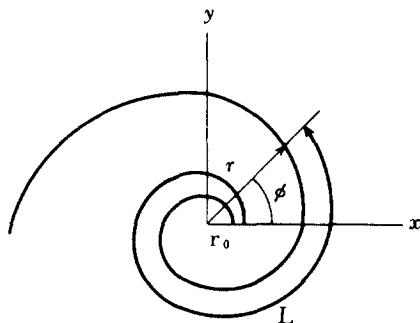


그림 1 나선형곡선
A spiral curve.

를 고려할 수 있다. 먼저 나선형 구조를 갖는 가느다란 wire의 모형을 그려보면 아래 그림과 같다. 그림 1은 일반적으로 알려진 spiral curve이다. 이러한 곡선구조를 갖는 wire 표면상의 임의의 한점 P는 원점에서 그 점까지의 거리 r 를 알고 있다면 그 위치를 알 수 있다. 그 거리 r 은 일반적으로 $r = r_0 e^{-a\phi}$ 로 알려져 있다⁽²⁾⁽³⁾. 여기서 ϕ 는 x 축과 r 이 이루는 각도이고 a 는 이 곡선이 얼마나 팽창되는가 혹은 수축되는가를 나타내는 flare rate이며 r_0 는 원점에서 최초의 시작점까지의 거리, 즉 $\phi = 0^\circ$ 일때의 wire의 시작점까지의 거리를 나타낸다. 그림 1은 곡선이 밖으로 나가면서 팽창하는, 즉 $a < 0$ 이며 ϕ 를 0° 에서 3π 까지 회전시켰을 때의 가느다란 wire를 나타내고 있다.

그림 1과 같은 가느다란 도체표면에 유기되는 scattered field를 고찰하기 위해 먼저 이러한 wire의 축방향의 미소 길이를 알 필요가 있다. 그러기 위해 미소 길이를 고려하여 그림 1을 다시 그려보면 아래와 같다.

그림 2-(a)에서는 wire 표면상의 한 점 P_1 에서 아주 작은 각 $d\phi$ 만큼 축방향으로 변화되었을 때의 점 P_2 까지의 wire 축방향의 미소길이 dp 를 나타내고 있다. 그림 2-(b)는 미소길이 dp 를 나타내는 부분을 그 구성 성분과 함께 확대하여 나타낸 것이며 P 점에서의 성분은 \bar{P} 성분과 $\bar{\phi}$ 성분이 존재하게 되는데 이 두 벡터를 합하여 wire 축방향의 벡터 \bar{P} 로 생각할 수 있다.

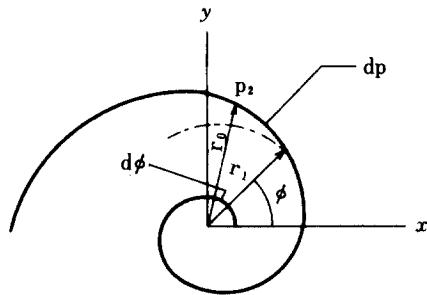


그림 2-(a) 미소길이 dp 를 고려한 나선형곡선
A spiral curve considering the infinitesimal length "dp".

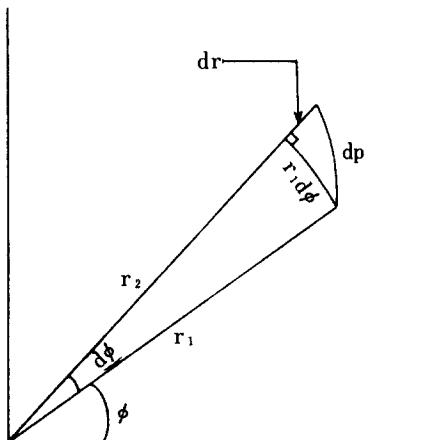


그림 2-(b) dp 에 대한 기하학적인 관계
Geometric relation to infinitesimal length "dp".

그림 2-(a)에서 r_1 은 wire 표면상의 어떤 점 $P_1(r_1, \phi_1)$ 까지의 거리를 나타내며 r_2 는 $d\phi$ 만큼 wire 축방향으로 변화시켰을 때 점 $P_2(r_2, \phi_2)$ 까지의 거리를 나타내며 원점에서 거리 r_1 을 반지름으로 하는 원을 그려보면 그림 2-(a)의 일정 쇄선과 같다. 이러한 경우 wire 축상의 미소 길이 dp 를 구할 수 있다.

$$r_2 - r_1 = dr = r_0 \exp(-a\phi) [\exp(-ad\phi) - 1] \quad (10)$$

으로 표현된다. 식(10)을 Maclaurine's series에 의해 근사시키면 다음과 같다.

$$dr = -\bar{a}r_0 \exp(-a\phi) d\phi \quad (11)$$

그러므로 그림 2-(b)에서

$$dp = r_0 \exp(-a\phi) (1 + a^2)^{1/2} d\phi \quad (12)$$

와 같이 dp 는 ϕ 와 $d\phi$ 에 따라 변하게 된다. 여기서 이러한 spiral curve의 한 점까지의 길이는 다음으로 주어지며 그림 1에서와 같이 나타난다.

$$L = [a^{-2} + 1]^{1/2} (r - r_0)^{(4)}$$

그림 2-(a)와 같은 나선형 곡선은 앞에서 언급된 조건 (i), (ii), (iii)을 만족하므로 식(6)-(9)를 나선형 곡선에 대해 써보면

$$-E_p^t = -j\omega A_p - \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad (13)$$

$$\bar{A} = \mu_0 \int_{\text{axis}} \bar{I}(p') \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dp' \quad (14)$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \int_{\text{axis}} \sigma(p') \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} dp' \quad (15)$$

$$\sigma(p') = \frac{-1}{j\omega} \frac{dI}{dp'} \quad (16)$$

와 같고 여기서 p' 는 source point를 나타내고 p 는 field point를 나타낸다.

식(14)과 (15)에서 R 은 축상의 source point로 부터 wire 표면상의 field point까지의 거리로서 그림 3에서와 같이 나타난다.

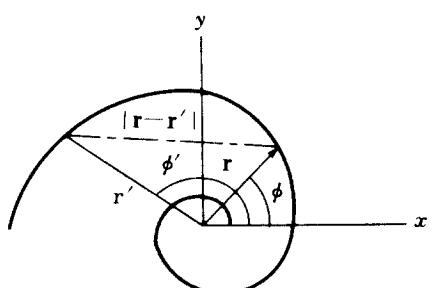


그림 3 나선형곡선에서의 거리 R
A distance "R" on a spiral curve.

그림 3 의 source point에서 field point까지의 거리 R 은 $|\vec{r} - \vec{r}'|$ 로 나타낸다. 그러므로

$$\begin{aligned} R &= (r_0^2 [\exp(-2a\phi) + \exp(-2a\phi')] \\ &\quad - 2\exp(-a(\phi+\phi')) \cos(\phi' - \phi)] + C^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 C 는 wire의 반지름을 나타내며 field point와 source point가 같을 때 발생되는 singularity를 피하는 역할도 해준다. 그리고 ϕ' 는 source point까지의 거리 r' 와 x축이 이루는 각도이며, ϕ 는 field point r 과 x축이 이루는 각도를 나타낸다.

위의 내용들을 정리하면 입사 전계를 알고 있을 때의 적분 방정식이 된다. 식(12)에서 알 수 있듯이 p 는 ϕ 의 함수이므로 적분 방정식을 ϕ 의 함수로 구성할 수 있다.

그러므로

$$\begin{aligned} -E^t(\phi) &= -j\omega\mu r_0 (1+a^2)^{1/2} \int I(\phi') e^{-a\phi'} \\ &\quad \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} d\phi' \\ &\quad + \frac{1}{j\omega\epsilon r_0 (1+a^2)^{1/2}} \int \frac{\partial I}{\partial\phi'} e^{a\phi'} \frac{\partial}{\partial\phi'} \\ &\quad \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} d\phi' \end{aligned} \quad (18)$$

i) 되고, 여기서

ω : 각속도

μ : 전공에서의 투자율

ϵ : 전공에서의 유전율

$\frac{e^{-jkR}}{R}$: Kernel 함수⁽⁶⁾

이다.

식(18)에서 해 $I(\phi')$ 를 구하기 위해서는 좌변의 입사전계를 구할 필요가 있다.

평면파가 들어올 때의 입사전계는 직선형 산란체인 경우

$$E^i = E_0 \sin \theta e^{-jkz \cos \theta}$$

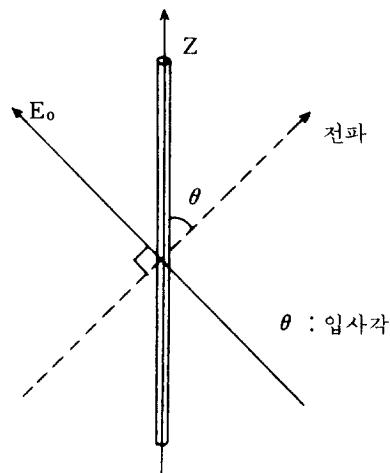


그림 4 직선형 산란체와 입사 전계의 관계
Relation between straight scatterer and incident field.

로 표현되는데⁽⁵⁾

나선형 산란체는 그 기하학적인 특성때문에 θ 가 일정치 않으므로 아래와 같은 나선형 산란체에 대해서는 다음과 같이 쓸 수 있다.

그 입사전계는 $E^i = E_0 \sin \theta_0 e^{-jkdn \cos \theta}$ 로 표현 할 수 있고

여기서의 $E_0 \sin \theta_0$ 는 파의 분극을 특징지으며, k 는 파의 진행방향에서 나타나는 파수, d_n 은 나선형 구조를 가지고 있는 wire 상의 한 점까지의 거리를 나타낸다.

식(18)을 wire 양 끝점에서 전류는 zero가 된다는 조건을 이용해서 다시 정리하면

$$\begin{aligned} -E^t(\phi) &= -j\omega\mu r_0 (1+a^2)^{1/2} \\ &\quad \int I(\phi') e^{-a\phi'} \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} d\phi' \\ &\quad - \frac{1}{j\omega\epsilon r_0 (1+a^2)^{1/2}} \\ &\quad \int I(\phi') e^{a\phi'} \frac{\partial^2}{\partial\phi'\partial\phi'} \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} d\phi' \end{aligned} \quad (19)$$

로 표현된다.

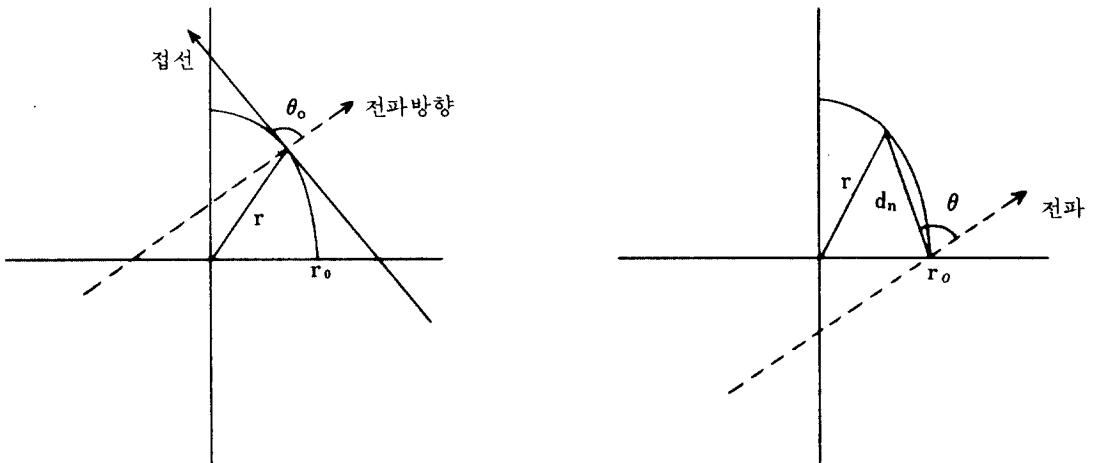


그림 5 나선형 산란체와 입사 전계의 관계
Relation between spiral scatterer and incident field.

3. 수치해석과 그 데이터

일반적으로 산란 현상 해석을 위해 moment 법⁽¹⁾을 많이 이용하는데 이 방법의 적용시에는 기저 함수와 weighting 함수를 어떠한 함수로 선택하느냐에 따라 오차가 좌우된다. 이 논문에서는 내삽 오차를 줄이기 위해 schoenberg가 제시한 cubic-B spline을 이용하여 좋은 일치를 얻었으며 이 기저함수의 특성과 적용방법은 다음과 같다⁽⁷⁾.

$$\begin{cases} \frac{1}{h^3}(t - t_{i-2})^3 & (t_{i-2} \leq t \leq t_{i-1}) \\ 1 + \frac{3}{h}(t - t_{i-1}) + \frac{3}{h^2}(t - t_{i-1})^2 \\ -\frac{3}{h^3}(t - t_{i-1})^3 & (t_{i-1} \leq t < t_i) \end{cases}$$

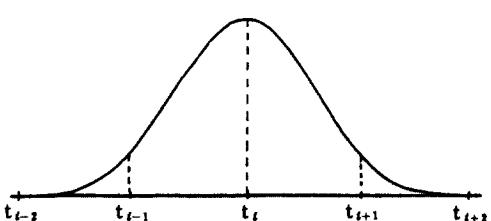


그림 6
Cubic B-spline.

$$B_i(t) \begin{cases} 1 + \frac{3}{h}(t - t_{i-1}) + \frac{3}{h^2}(t - t_{i-1})^2 \\ -\frac{3}{h^3}(t - t_{i-1})^3 & (t_i \leq t < t_{i+1}) \\ \frac{1}{h^3}(t_{i+2} - t)^3 & (t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

weierstrass 근사정리에 의해 hilbert space 내에서 미지의 함수에 대한 근사함수는 위와 같은 기저함수들의 선형조합으로 나타내어 내삽(interpolation) 함으로써 구하게 된다. 구간의 element를 N 개라 할 경우 기저함수는 N+3 개의 기저함수가 결쳐 있다.

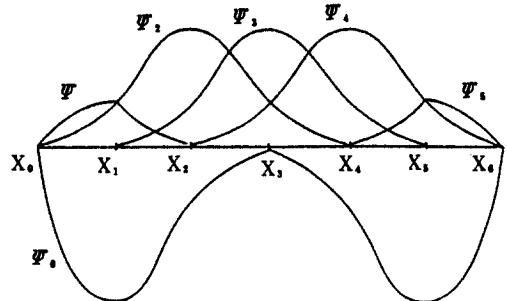


그림 7 Homogeneous Dirichlet 경계조건을 갖는 기저 함수
Basis function with homogeneous Dirichlet boundary condition.

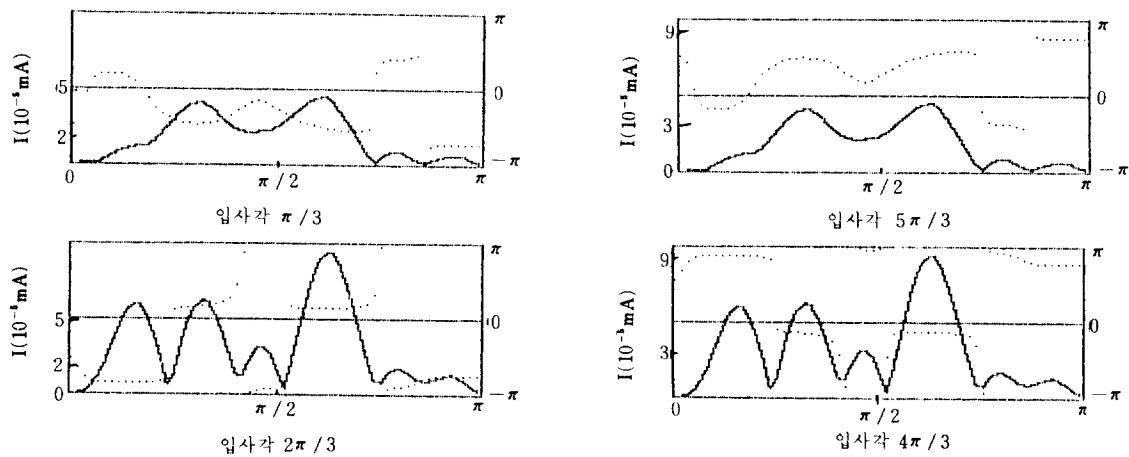


그림 8 반회전 길이의 나선형 wire에서의 입사각에 따른 전류 분포
The current distributions of half turn wire at each incident angle.

실선 : 크기
점선 : 위상

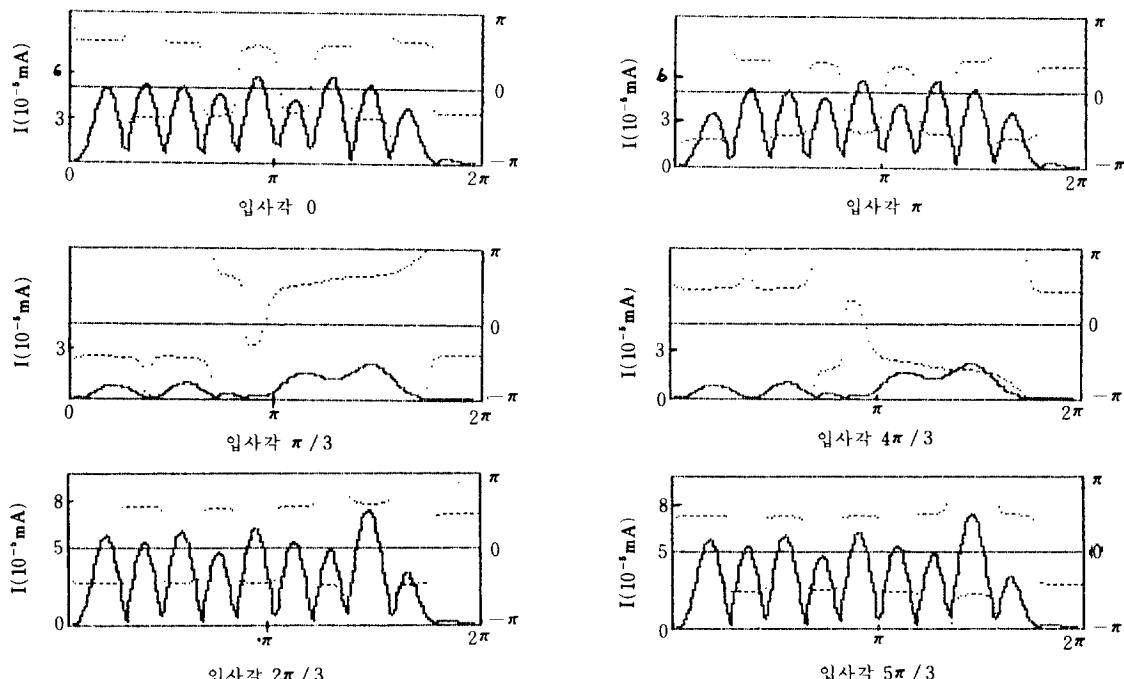


그림 9 1회전 길이의 나선형 wire에서의 입사각에 따른 전류 분포
The current distributions of 1 turn wire at each incident angle.

실선 : 크기
점선 : 위상

조를 갖는 wire를 0° 에서 3π 까지 회전시켰을 때
와 여러 가지 입사각도에 따른 전류분포를 구해
보면 표 3, 4, 5와 같다. 그리고 전류분포를

그려보면 아래 그림과 같다.

그리고 산란체의 반지름은 $10^{-5}L$ (L : 나선형
산란체의 전체 길이)로 하였다.

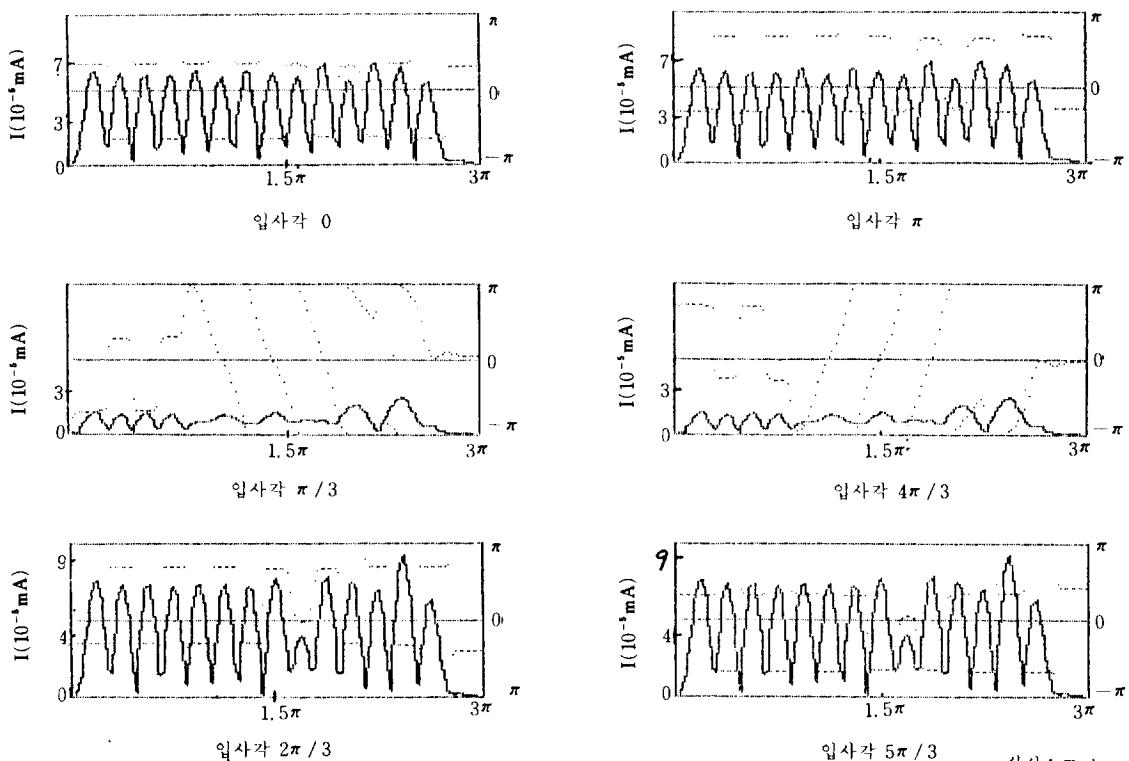


그림 10 1.5회전길이의 나선형 wire에서의 입사각에 따른 전류.
The current distributions of 1.5 turn wire at each incident angle.

실선 : 크기
점선 : 위상

4. 결 론

나선형 구조를 갖는 가느다란 wire 산란체에 유기되는 전류분포를 여러 가지 회전수와 입사각에 따라 구하였다.

앞에서 구성한 1 차원 적분 방정식을 straight wire에 적용하여 Pocklington에 의한 전류치와 잘 일치됨을 보였다.

이 적분방정식은 이러한 구조에서 확장하여 helical antenna와 같은 3 차원 구조를 갖는 물체에서의 산란현상을 고찰하는데 도움이 된다.

参 考 文 献

- (1) R. F. HARRINGTON, Field Computation by Moment Methods, Macmillan Series in Electrical Science, 1968.
- (2) W. L. STUTZMAN, G. A. THIELE, Antenna Theory

and Design, chapter 6, John Wiley & Sons, 1981.

- (3) B. R. - S. CHEO, V. H. RUMSEY, and W. J. WELCH, "A solution to the frequency independent antenna problem," IRE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-9, pp. 527-534 : November, 1961.
- (4) J. D. DYSON, "The equingular spiral antenna," IRE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-7, pp. 181-188 : April, 1959.
- (5) F. M. TESCHE, "On the analysis of scattering and antenna problems using the singularity expansion technique," IEEE Trans. on Ant. and Prop., vol AP-21, No. 1, Jan 1973.
- (6) C. H. TANG, "Input impedance of arc antennas and short helical radiators," IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-12, pp. 2-9 : January, 1964.
- (7) P. M. PRENTER, Splines and Variational Methods, chap 4, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- (8) K. K. MEI, "On the integral equation of Thin Wire Antennas," IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-13, pp. 374-378 : May, 1965.
- (9) R. MITTRA, Computer techniques for Electromagnetics, chap 2, Pergamon Press, 1973.



南 昶 鎬 (Chang Ho NAM) 準會員

1962年 5月20日生

1984年 2月：中央大學校電子工學科卒業

1984年 9月～現在：中央大學校大學院電子工學科(碩士課程)



金 正 祺 (Jung Ki KIM) 正會員

1942年 5月 5日生

1965年 2月：延世大學校電氣工學科卒業

1969年 2月：延世大學校大學院電氣工學科(工學碩士)

1975年 2月：延世大學校大學院電氣工學科(工學博士)

1970年 3月～1977年 2月：光云工科大學 副教授

1977年 3月～現在：中央大學校電子工學科教授

1982年 12月～1983年 12月：美里爾大學客員教授