

論 文

Steepest Descent Method를 이용한
정전계 문제의 해석

準會員 安 智 鏞* 正會員 鄭 求 哲** 正會員 金 正 祺***

On the Analysis of Electrostatic Problems
Using a Steepest Descent MethodJi Yong AHN*, Goo Cheol JEONG**, Jung Ki KIM*** *Regular Members*

要 約 Steepest Descent Method를 정전계 문제의 해석에 적용하였다. 반복법과 moment method와 같은 direct method와의 차이점을 기술하였다. 반복법을 이용하면 정확한 해에 단조적으로 수렴하며 대형 system의 해석에 적합함을 보였다. 정전계 문제에 대해서 해석한 수치결과를 제시하였으며 moment solution과 잘 일치하고 있음을 보였다.

ABSTRACT The method of steepest descent is applied to the analysis of electrostatic problems. The differences between iterative method and direct method, e.g. the method of moments, are outlined. It is shown that this method converges monotonically to the exact solution and is suitable for solving a problem of large system. Numerical results are presented for electrostatic case which show a good agreement with moment solution.

1. 서 론

대부분의 전자기학 이론의 문제는 다음과 같은 임의의 operator equation의 형태로 나타낼 수 있다.

$$Ax = y \quad (1)$$

여기서 A는 일반적으로 integro-differential

operator이며 x는 임의의 주어진 excitation y로부터 얻어질 미지의 함수이다.

공학문제에서 주로 다루게 되는 integro-differential equation을 푸는 근사법은 크게 두가지로 나눌 수 있는데 하나는 Hilbert space에서 span하는 basis function을 이용한 내적(inner product)을 통하여 비교적 컴퓨터로 쉽게 풀수 있는 matrix 식으로의 직접적인 변환이며 다른 하나는 범함수(functional)을 iterative하게 minimize하면서 matrix 식으로 변환하는 것이다. 전자의 경우 널리 이용되는 것으로는 Moment Method, Galerkin's Method, Finite Element Method 등이 있으며 후자의 경우는 Conjugate Gradient Method, Steepest Descent Method 등

*, **, *** 中央大學校工科大學電子工學科
Dept. of Electronic Engineering,
Chung Ang University, 151 Korea.
論文番號: 86-42 (接受 1986. 10. 8)

이 있다.

본 논문에서는 연속적인 근사방법인 Steepest Descent Method가 quadratic functional의 minimum에 관한 문제 및 이에 관련된 linear problem의 해를 구하기 위해 제시되어 있다.

이 방법의 기초개념은 1895년 Cauchy가 N개의 미지수를 가진 N개의 방정식을 갖는 system의 해를 구하기 위해서 제안한 것이다. 이러한 Cauchy의 idea를 발전시키기 위해서 Temple⁽⁶⁾, Courant⁽⁷⁾, Kantorovich⁽⁸⁾ 등이 Steepest Descent Method의 기초를 확립시켜 놓았다.

Steepest Descent Method와 앞에 제시된 Direct method와의 차이는 근사과정이 이미 정해진 형태로 부터 얻어지는 것이 아니라 문제 그 자체로부터 얻어진다는 점이다.

본 논문에서는 Steepest Descent Method의 수학적 기초를 제시하였고 그것을 field 문제 중 Electrostatic한 case에 적용하였다. 이 방법은 Moment Method에 비해 상당히 작은 computer 용량을 필요로 하며 방법 자체가 반복적이므로 초기치 설정을 잘 하면 계산 시간을 많이 단축시킬 수 있다.

2. 본 론

2-1. 이 론

먼저 linear normed space에서 quadratic functional $F(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$F(x) = \langle r, Hx \rangle \quad (2)$$

여기서 내적(inner product)은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle D, E \rangle = \int_{\Omega} D(x) \bar{E}(x) d\Omega \quad (3)$$

(3)식에서 $\bar{E}(x)$ 는 $E(x)$ 의 complex conjugate를 의미하며 E 의 norm은 다음과 같다.

$$\|E\|^2 = \langle E, E \rangle = \int_{\Omega} |E^2(x)| d\Omega \quad (4)$$

(2)식에서 H 는 hermitian positive definite operator 이고 r 은 잔차(residual)이며 다음과 같다.

$$r = Ax - y \quad (5)$$

quadratic이란 말은 functional $F(x)$ 를 $F(x + \alpha p)$ 와 같이 표현할 때 x 와 p 에 관계없이 α 에 대한 2차 다항식임을 뜻한다. quadratic functional $F(x + \alpha p)$ 의 minimum을 찾기 위해서 임의의 element x_0 를 초기치로 놓으면 이 범함수의 x_0 에서의 α 에 대한 기울기의 방향은 다음과 같다⁽²⁾.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} [F(x_0 + \alpha p)] \\ = \frac{d}{d\alpha} [\langle r, Hx \rangle + \langle \alpha H\alpha p, r \rangle + \langle Hx, \alpha \alpha p \rangle + \langle \alpha H\alpha p, \alpha \alpha p \rangle] \end{aligned} \quad (6)$$

(6)식에서 이 미분치의 값이 minimum이 되도록 normed element를 $p = p_0$ 로 택하면 범함수 $F(x_0 + \alpha p)$ 가 α 의 2차 다항식이므로 임의의 $\alpha = \alpha_0$ 의 값에서 이 범함수는 최소값을 갖게 된다. 따라서 다음 step의 근사값으로 $x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0$ 를 택하면 iteration의 일반식은 다음과 같다.

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n p_n \quad (7)$$

출발점 x_n 으로부터 approximation의 진행은 p_n 의 방향으로 거리 α_n 만큼 진행하며 이때 각 step에서 α_n 과 p_n 은 $F(x)$ 의 최소값에 접근하도록 선택한다. 여기서 direction vector p 의 가장 적절한 선택은 물론 error vector $x_e - x$ 의 방향이지만 이 vector는 알 수가 없다. (여기서 x_e 는 exact solution을 의미한다.)

다음으로 quadratic functional $F(x + \alpha p)$ 가 최소화 하도록 진행하는 p 방향에서의 optimum한 거리 α 를 계산한다. 이것은 (6)식이 아래와 같음을 의미한다.

$$\frac{d}{d\alpha} [F(x + \alpha p)] = 0 \tag{8}$$

결과적으로 α 는 다음과 같다.

$$\alpha = -\frac{\langle r, HAp \rangle}{\langle Ap, HAp \rangle} \tag{9}$$

그러나 α 는 distance 개념이므로 - (negative) 부호를 앞으로 뽑아내고 양수를 취하면 반복법에 관한 일반식은 $x_{n+1} = x_n - \alpha_n p_n^*$ 이 된다.

2-2. 적용

Steepest Descent Method에서 error 척도로 쓰여질 functional에는 여러가지가 있지만 본 논문에서 다루고자 하는 문제의 operator는 real 하며 self-adjoint하므로 범함수(functional)는 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \langle x - x_e, A(x - x_e) \rangle \\ &= \langle A^{-1}r, r \rangle \\ &= \langle r, [A^{-1}]^*r \rangle \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $[A^{-1}]^*$ 는 A^{-1} 의 adjoint operator이다. 따라서 $H = [A^{-1}]^*$ 이며 direction vector p_n 은 $p_n = r_n$ 으로 선택한다.

또한 (9)식으로부터 α 값은 아래와 같이 구할수 있다.

$$\alpha_n = \frac{\langle r_n, r_n \rangle}{\langle r_n, Ar_n \rangle} = \frac{\|r_n\|^2}{\langle r_n, Ar_n \rangle} \tag{11}$$

그러므로 최종적인 반복식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \alpha_n p_n \\ &= x_n - \frac{\|r_n\|^2}{\langle r_n, Ar_n \rangle} r_n \end{aligned} \tag{12}$$

이러한 반복적인 과정은 잔차(residual)가 임의의 작은 값 ϵ 보다 작게 될 때 중단된다. 즉,

$$\|r\| = \|Ax - y\| < \epsilon \tag{13}$$

3. 수치해석 및 결과

지금까지 논의된 Steepest Descent Method를 Electrostatic Field 문제의 charge density를 구하는데 적용하였다. 본 논문에서 사용된 geometry는 임의의 지정된 potential을 가진 십자가 형태(그림 1)의 wire 및 피뢰침 형태(그림 2)의 wire이다.

일반적으로 wire 구조물에 유기되는 charge density에 관한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \int_L \frac{\sigma(l')}{4\pi\epsilon_0 R} dl' \\ R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 x', y', z' 는 source point이고 x, y, z 는 observation point로서 각 subsection의 중점을 나타낸다.

표 1과 표 2에 각각에 대한 수치계산 결과가 moment solution과 함께 주어져 있다. 이때 주어진 potential은 계산의 편의를 위하여 $1/4 \pi \epsilon_0 (V)$ 로 가정 하였으며 이 wire의 반경은 0.001m로 각 section의 길이를 1m씩으로 하였다. 이 경우 각 section을 꺾인 부분으로부터 각각 0.03, 0.09, 0.15, 0.21, 0.27, 0.37, 0.51, 0.65, 0.79, 0.93 meter되는 지점이 observation point(각 subsection의 중점)가 되도록 10개의 불균일한 subsection으로 나누어서 꺾인 부분의 근처에는 더 많은 subsection을 갖도록 하였다. moment method의 경우는 pulse expansion과 point matching을 이용하였다.

이문제를 푸는데 있어 Moment method의 경우는 $N \times N$ 개의 메모리를 사용한 것에 비해 Steepest Descent Method의 경우는 3N개 정도의 메모리만을 사용하였다.

표 1과 표 2에 제시된 좌표는 각 subsection의 중점을 나타내고 있다. 표 1의 경우 초기치를 1로 주었을 때 10회 반복후 계산을 중단하였으며 표 2의 경우는 초기치를 0으로 한 경우 9회 반복 후 계산을 중단하였다. 각각의 경우 error

허용치 (tolerance)를 10^{-4} 으로 하였으며 두 경우의 결과가 모두 소수점아래 4째자리까지 moment

solution과 잘 일치함을 알 수 있다. 표 3과 표 4에는 그림 1 및 그림 2의 model에

표 1 그림(1)에 대한 수치계산 결과
Numerical results for Fig. 1.

x	y	Moment Method	Iterative Method
-.93	.00	.81266686E-01	.81266807E-01
-.79	.00	.70711896E-01	.70712214E-01
-.65	.00	.66779480E-01	.66779964E-01
-.51	.00	.64397132E-01	.64397713E-01
-.37	.00	.52929756E-01	.52930607E-01
-.27	.00	.46494339E-01	.46495038E-01
-.21	.00	.50246649E-01	.50246917E-01
-.15	.00	.47177625E-01	.47177888E-01
-.09	.00	.43165659E-01	.43165801E-01
-.03	.00	.32901426E-01	.32901409E-01
.03	.00	.32901426E-01	.32901447E-01
.09	.00	.43165659E-01	.43165867E-01
.15	.00	.47177625E-01	.47177890E-01
.21	.00	.50246649E-01	.50246953E-01
.27	.00	.46494339E-01	.46494768E-01
.37	.00	.52929756E-01	.52930060E-01
.51	.00	.64397132E-01	.64397199E-01
.65	.00	.66779480E-01	.66779518E-01
.79	.00	.70711896E-01	.70711901E-01
.93	.00	.81266686E-01	.81266668E-01
.00	-.93	.81266686E-01	.81266891E-01
.00	-.79	.70711896E-01	.70712029E-01
.00	-.65	.66779480E-01	.66779550E-01
.00	-.51	.64397132E-01	.64397130E-01
.00	-.37	.52929756E-01	.52929698E-01
.00	-.27	.46494339E-01	.46493983E-01
.00	-.21	.50246649E-01	.50246357E-01
.00	-.15	.47177625E-01	.47177335E-01
.00	-.09	.43165659E-01	.43165408E-01
.00	-.03	.32901426E-01	.32901230E-01
.00	.03	.32901426E-01	.32901276E-01
.00	.09	.43165659E-01	.43165518E-01
.00	.15	.47177625E-01	.47177498E-01
.00	.21	.50246649E-01	.50246530E-01
.00	.27	.46494339E-01	.46494204E-01
.00	.37	.52929756E-01	.52929594E-01
.00	.51	.64397132E-01	.64397026E-01
.00	.65	.66779480E-01	.66779403E-01
.00	.79	.70711896E-01	.70711844E-01
.00	.93	.81266686E-01	.81266658E-01

표 1 그림 1에 대한 수치결과
초기치 = 1,
Iteration No. = 10
tolerance = 10^{-4}

표 2 그림(2)에 대한 수치계산 결과
Numerical results for Fig. 2.

x	y	z	Moment Method	Iterative Method
.66	.00	.66	.78458611E-01	.78458508E-01
.56	.00	.56	.67468470E-01	.67468424E-01
.46	.00	.46	.62869453E-01	.62869469E-01
.36	.00	.36	.59784950E-01	.59785048E-01
.26	.00	.26	.48569813E-01	.48569982E-01
.19	.00	.19	.42462248E-01	.42462611E-01
.15	.00	.15	.45875872E-01	.45876149E-01
.11	.00	.11	.43236745E-01	.43237015E-01
.06	.00	.06	.40147835E-01	.40148094E-01
.02	.00	.02	.33132400E-01	.33132611E-01
-.01	.02	.02	.33132400E-01	.33132515E-01
-.03	.06	.06	.40147835E-01	.40147967E-01
-.05	.09	.11	.43236745E-01	.43236875E-01
-.07	.13	.15	.45875872E-01	.45876000E-01
-.10	.17	.19	.42462248E-01	.42462408E-01
-.13	.23	.26	.48569813E-01	.48569982E-01
-.18	.31	.36	.59784950E-01	.59785037E-01
-.23	.40	.46	.62869454E-01	.62869510E-01
-.28	.48	.56	.67468470E-01	.67468499E-01
-.33	.57	.66	.78458611E-01	.78458618E-01
-.01	-.02	.02	.33132400E-01	.33132292E-01
-.03	-.06	.06	.40147835E-01	.40147836E-01
-.05	-.09	.11	.43236745E-01	.43236779E-01
-.07	-.13	.15	.45875872E-01	.45879527E-01
-.10	-.17	.19	.42462248E-01	.42462348E-01
-.13	-.23	.26	.48569813E-01	.48569883E-01
-.18	-.31	.36	.59784950E-01	.59784945E-01
-.23	-.40	.46	.62869453E-01	.62869441E-01
-.28	-.48	.56	.67468470E-01	.67468450E-01
-.33	-.57	.66	.78458611E-01	.78458588E-01
.00	.00	.03	.21653175E-01	.21653005E-01
.00	.00	.09	.30701589E-01	.30701478E-01
.00	.00	.15	.34464384E-01	.34464304E-01
.00	.00	.21	.37514349E-01	.37514293E-01
.00	.00	.27	.35364225E-01	.35364188E-01
.00	.00	.37	.41396456E-01	.41396401E-01
.00	.00	.51	.52468446E-01	.52468390E-01
.00	.00	.65	.56732713E-01	.56732673E-01
.00	.00	.79	.62377678E-01	.62377649E-01
.00	.00	.93	.74017442E-01	.74017423E-01

표 2 그림 2에 대한 수치결과
초기치 = 0,
Iteration No. = 9
tolerance = 10^{-4}

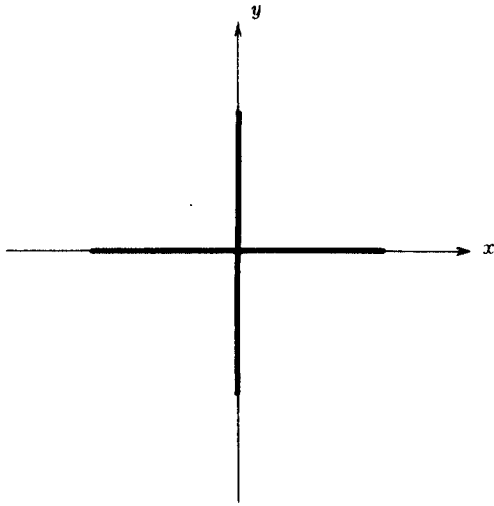


그림 1 십자가 형태의 wire
Cross shaped wire.

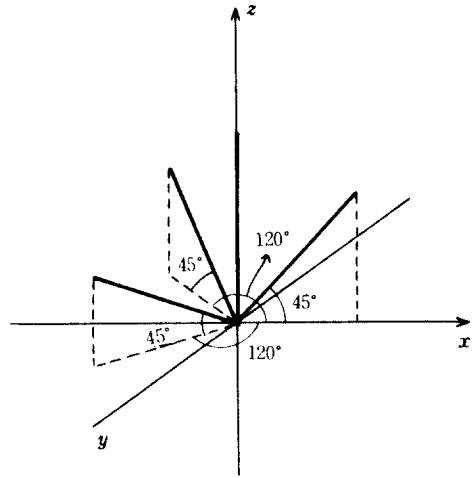


그림 2 피뢰침 형태의 wire
Lightening rod shaped wire.

표 3 표 1에 대한 Error 수렴과정

Iteration No.	Error
1	67.99134896571600
2	28.49664073854700
3	6.21675672750920
4	1.15785105382510
5	2.3366198573294E - 001
6	5.0250786412329E - 002
7	9.0498988287882E - 003
8	1.9902852434603E - 003
9	4.3483396642105E - 004
10	8.1381591739441E - 005

표 4 표 2에 대한 Error 수렴과정

Iteration No.	Error
1	3.81170447949430
2	1.66247445064870
3	3.7610735925006E - 001
4	8.3858421222987E - 002
5	2.0743991281190E - 002
6	4.0776640055158E - 003
7	8.8666268426364E - 004
8	2.1394019682465E - 004
9	4.3780812265476E - 005

대한 수치계산 과정에 있어 각 step에서의 error를 나타내고 있다. 표 3,4에서 알 수 있듯이 error

의 감소가 단조적이므로 수렴과정은 매 step 마나 monotonic하게 exact solution에 converge 하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

Steepest Descent Method를 wire 구조물의 charge density를 계산하는데 적용하였다. 수치 결과가 moment solution과 잘 일치함을 보였다. 이 technique을 이용하면 computer 용량이 상당히 절약되므로 moment method를 적용하기 곤란할 정도로 큰 대형의 system을 해석할 경우에도 적합함을 알 수 있다.

Operator가 nonself-adjoint 한 경우인 electromagnetic field 문제의 wire grid modeling 등으로의 확장이 요망된다.

參 考 文 獻

- (1) R. F. Harrington, "Field Computation by Moment Methods." New York, MacMillan, 1968.
- (2) T. K. Sarkar & S. M. RAO, "An Iterative Method for Solving Electrostatic Problems." IEEE Trans. vol. AP-30, pp. 611-616, July, 1982.
- (3) T. K. Sarkar & S. M. RAO, "The Application of the

conjugate Gradient Method for the Solution of Electromagnetic Scattering from Arbitrarily Oriented wire antennas." IEEE Trans. vol. AP-32, no. 4, pp. 398-403, April, 1984.

- (4) M. Z. Nashed, "Steepest Descent for singular linear operator equations." SIAM J. Numer. Anal., vol. 7, pp. 358-362, 1970.
- (5) J. W. Danilel, "The Conjugate gradient method for linear and nonlinear operator equations." SIAM J. Numer. Anal., vol. 4, no. 1, pp. 10-26, 1967.

- (6) G. Temple, "The general theory of relaxation methods applied to linear systems." in Proc. Royal Society, London (Series A), vol. 169, 1939, pp. 476-500.
- (7) R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations." Bull. Amer. Math. Soc., vol. 49, pp. 123, 1943.
- (8) L. V. Kantorovich, "Functional analysis & applied mathematics." Uspekhi Mat. Nauk, vol. 6, no. 3, pp. 89-185, 1948.



安智鏞(Ji Yong AHN) 準會員
 1961年 4月 3日生
 1985年 2月：中央大學校電子工學科卒業
 1985年 3月～現在：中央大學校 大學院
 電子工學科 在學中



鄭求哲(Goo Cheol Jeong) 正會員
 1956年 12月 25日生
 1979年 2月：中央大學校 電子工學科卒業
 1981年 2月：中央大學校 大學院 電子工
 學科(工學碩士)
 1982年 12月～1984年 3月：起亞產業
 中央技術研究所電裝設計課
 (研究員)
 1984年 3月～現在：中央大學校 大學院
 電子工學科 博士課程
 1986年 3月～現在：中央大學校 電子工學科 講師



金正祺(Jung Ki KIM) 正會員
 1942年 5月 5日生
 1965年 2月：延世大學校電氣工學科卒業
 1969年 2月：延世大學校大學院電氣工學
 科(工學碩士)
 1975年 2月：延世大學校大學院電氣工學
 科(工學博士)
 1970年 3月～1977年 2月：光云工科學
 副教授

1977年 3月～現在：中央大學校電子工學科教授
 1982年 12月～1983年 12月：美利堅大學校客員教授