論 文

신호복원을 위한 비선형 여파기법 개론

正會員 박 양 수* 正會員 손 재 철* 正會員 장 태 주*

正會員 김 지 훈* 正會員 宋 翊 鎬*

An Introduction to Nonlinear Filtering Techniques for Signal Restoration

Yang Soo PARK*, Jae Churl SON*, Tae Joo CHANG*,

Jee Hoon KIM*, Iic Kho SONG* *Regular Members*

要 約 오랫동안 최소 제곱법에 바탕을 둔 선형 신호복원 방식이 연구되어 널리 쓰여 왔다. 그러나, 선형복원 방식은 실제로 처리해야 할 신호에 적합하지 않을 때가 자주 있다. 이러한 문제점을 풀기 위하여 비선형 신호복원 방식이 제안되었고, 이에 대한 연구가 활발히 진행중이다. 이 논문에서는 신호처리에 자주 쓰이는 여러 비선형 여파기들의 전반적인 성질을 간략히 되살펴본다.

ABSTRACT Signal restoration by lincar filters based on the methods of least squares and its generalizations has been studied for many years. However, linear filters are inadequate for signal restoration in many situations. For such cases, nonlinear filters have been proposed and extensively studied recently. In this paper, we briefly review some of the general properties of nonlineat filters used for signal processing.

I. 서 론

신호의 복원(restoration)이란 잡음 때문에 나빠진 신호에서 잡음을 없애, 처음신호를 되찾는 과정을 말한다. 이러한 신호복원 방식에는 여러 가지가 있는데, 크게 선형 여파기를 쓰는 선형 복원방식과 비선형 여파기를 쓰는 비선형 복원방식으로 나뉜다. 선형 여파기는 가산성 정규 잡음을 없애는 데에는 효과적이나, 충격성 잡음을 없애는 성능이 그다지 뛰어나지 못하다. 또한 선형 여파기는 많은 정보를 갖고 있고 신호의 큰 변이를 나타내는 edge 부분을 보존하지 못하는 좋지 않은 성질이 있다. 이런 때에는 비선형 복원방식이 보다 효과적일 수가 있다.[1][2]. 비선형 복원방식의 가장 큰

*韓國科學技術院 電氣, 電子科
Dept. of Elevtr:& Electronics Engr. Korea Advanced Inst. of Science and Technology.
論文番號 : 90-03(接受1989. 8. 5)

특징은 여러 잡음 모델에 대하여 robust하고, 2차원 신호에 대해서도 효과적으로 쓰일 수 있다는 것이다. 이러한 여러 까닭과 필요 때문에 비선형 여파기가 고안되어 이에 대한 연구가 꾸준히 이루어지고 있다.

Ⅱ. 중앙값 여파기

비선형 여파기에는 크기 순서로 놓는 연산(ordering)으로 정의되는 여파기가 있으며, 그 가운데에서 가장 대표적인 것이 중앙값 여파기이다.[3] 중앙값 여파기의 출력은 유한한 갯수의 이산 입력의 중앙값이다. 일반적으로 비선형 특성을 갖는 계통(system)은 하드웨어 구성이 쉽지 않으며 또한 소프트웨어에 의한 구현도 실시간 처리가 어렵다. 그러나 중앙값 여파기는 하드웨어 구성이 비교적 손쉬울 뿐만 아니라, 알고리즘의 개발을 통해 실시간 신호처리가 가능하다.[4-6] 중앙값 여파기는 이러한 특성 뿐만 아니라 어느 정도의 이론적 배경이 있어서, 바꿔 말하면 통계학적 성질이 알려져 있어서, 중앙값 여파기를 이용한 신호 복원은 예측할 수 있는 결과를 내준다.[7][8] 이 절에서는 여러 형태의 중앙값 여파기의 정의와 성질, 여러 크기의 신호 연산을 이진 연산으로 가능하게 하는 문턱값 분해 방법(threshold decomposition method)[5]등을 알아 보겠다.

Ⅱ-1 중앙값 여파기의 정의와 성질

중앙값 여파기는 크게 두 종류로 나뉘는데, 그 하나는 표준 중앙값 여파기(standard median filter, SMF)이고, 다른 하나는 반복 중앙값 여파기(recursive median filter, RMF)[9]이다. 창의 크기가 2N+1일 때 이들 여파기의 출력은 각각

$$y_s(m)=\text{median of }\{x(m-N),\cdots,x(m),\cdots,x(m+N)\} \qquad (1)$$

과

$$y_r(m)=\text{median of }\{y_r(m-N),\cdots,y_r(m-1),x(m),\cdots,x(m+N)\} \qquad (2)$$

이다.

서로 독립이고 같은 분포를 갖는 (independent identically distributed, i.i.d.) 입력 확률 변수에 대해서, 중앙값 여파기는 저역통과 특성을 가지며, 입력에 따라 출력 스펙트럼이 크게 변하지 않으나 창의 크기가 커짐에 따라 통과 대역이 좁아진다. 또한 입력 확률밀도함수가 f이고 분포함수가 F이면 SMF 출력의 확률밀도함수는

$$f_M(y_s)=\frac{(2N+1)!}{N!N!}f(y_s)[F(y_s)]^N\,[1-F(y_s)]^N \qquad (3)$$

이 된다.[8] 이 확률 밀도 함수를 이용하여 중앙값 여파기의 여러 통계적 성질을 얻어 낼 수 있다. 그러나 i.i.d·가 아닌때에는 출력의 확률밀도함수를 거의 얻을 수 없다.

이제 중앙값 여파기의 성질을 알아보자. 중앙값 여파기는 충격성 잡음을 잘 없애며, 또한 edge를 잘 보존하는 성질이 있는데, 이는 중앙값 여파기가 신호복원에 쓰이는 기본성질이 된다. 그리고 한 입력 신호를 여러번 중앙값 여파하면 변하지 않는 출력이 나오게 되는데, 이를 뿌리 신호(root signal)라 한다.[10][11] 뿌리 신호는 N+1개 이상의 연속된 같은 값과 edge만으로 구성된 부분적 단조(locally monotone) 함수이다. 입력 신호의 길이가 L일 때 뿌리 신호에 다다르는 중앙값 여파기의 여파 횟수는 SMF의 경우는 3(L−2)/2(N+2)이하이며, RMF의 경우에는 1이다.

Ⅱ-2 문턱값 분해 방법

이 방법은 크기가 k단계인 입력 신호를 k−1개의 이진신호의 합으로 바꾸어 각 이진 신호를 중앙값 여파하는 방법이다. 즉 여러 크기를 갖는 신호의 중앙값 여파를 간단한 이진 신호의 중앙값 여파로 구현할 수 있다. 이 방법을 쓰면 해석이 어려운 중앙값 여파기의 통계량, 특히 RMF 출력의 확률밀도함수를 유도해 낼 수 있게 된다.[12] 이의 기본 개념은, 선형 여파기가 정현파의 중첩인 신호를 각각의 정현파로 나누어 여파한 다음 다시

더하는 것과 비슷하다. 문턱값 분해 방법은 중앙값 여파기가 순서 통계량의 비선형성과 중첩의 성질을 함께 갖도록 하는 효과적인 연산이다. 이 방법을 순서적으로 나열하면,

(1) 크기가 k단계인 입력신호 x(m)을 k−1개의 이진 신호로 바꾸기(문턱값 분해)

$$t_0^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{if } x(m) \geq j \\ 0, & \text{if } x(m) < j \end{cases} \qquad (4)$$

여기서 $j=1,2,\cdots,k-1$이고, $t_0^j(m)$는 문턱값 분해된 이진 신호이다.

(2) 각 이진 신호에 대한 이진 중앙값 여파

$$a^j(m) = \text{median of } \{t_0^j(m-N), t_0^j(m-N+1), \cdots, t_0^j(m+N)\} \qquad (5)$$

(3) 중첩에 의한 출력 신호의 복원

$$\begin{aligned} y_s(m) &= \text{median of } \{x^j(m-N), x^j(m-N+1), \cdots, x^j(m+N)\} \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} a^j(m) \\ &= \text{maximum of } \{0, j : a^j(m)=1\} \end{aligned} \qquad (6)$$

(6)을 스택킹 성질 (stacking property)이라 한다. 이 성질은 3절에서 설명될 스택 여파기의 기본 성질이다. 이 방법은 SMF 뿐만 아니라 RMF에 대해서도 성립한다.

위에서 살펴본 중앙값 여파기는 영상 및 음성 신호의 처리, 음성 신호에서의 pitch 검파 [13][14], 뿌리 신호의 성질을 이용한 전송로 부호화(channel coding), BTC(block truncation coding)를 이용한 영상복원 [15]등 여러 응용에서 성공적으로 쓰이고 있다.

Ⅲ. 스택 여파기

중앙값 및 크기 순서로 놓는 연산은 문턱값으로 분해되는 성질과 스택킹 성질을 갖고 있다. 이 절에서는 스택킹 성질과 이진 논리식과의 관계를 살피고, 스택 여파기와 [16][17]중앙값 여파기의 성질의 비교하며, 간단한 스택 여파기의 보기를 든다.

앞 절의 문턱값 분해 방법에서 크기순서에 의한 이진자료의 출력은 스택킹 성질을 갖게 됨을 설명하였다. 이러한 스택킹 성질은 양의 Boole 함수 (positive Boolean function, PBF)라는 이진 함수로 나타낼 수 있다. PBF란 보수(complement) 관계가 없는 곱의 합 형태의 최소항으로 이루어진 이진 함수를 말한다. 스택킹 성질과 양의 Boole 함수는 필요 충분 조건의 관계에 있다. 즉, PBF 이면 스택 여파기를 구성할 수 있는 이진 함수가 된다. 스택 여파기의 출력을 PBF를 써서 나타내면

$$y = \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{PBF}\{\delta(x_1-j), \delta(x_2-j), \cdots, \delta(x_{2N+1}-j)\} \qquad (7)$$

인데, 여기서 k는 신호의 크기를 나타내며, 창의 크기는 2N+1이며, $\delta(\ )$는 문턱값 분해 연산자이다. 즉, 스택 여파기는 여러 크기의 입력을 갖는 비선형 연산을 이진 연산으로 처리한다. PBF의 갯수는 무척 많은데, 보기를 들면, 창의 크기가 3일 때 20가지, 5일 때 7581가지이고 7일 때는 너무 많아서 아직 알려지지 않았다. 이러한 무척 많은 갯수의 PBF는 스택 여파기의 종류가 매우 많음을 뜻한다.

이제 스택 여파기의 성질을 중앙값 여파기의 성질과 비교해 보자. 중앙값 여파기와 마찬 가지로 스택 여파기의 성질 가운데에서 중요한 것의 하나는 뿌리 신호의 성질이다. 보기를 들면, 스택 여파기가 뿌리 신호에 이르는 여파 횟수는 중앙값 여파기가 뿌리 신호에 다다르는 여파 횟수와 같다는 것과 4N+1보다 큰 창을 갖는 중앙값 여파기의 뿌리신호는 창의 크기 2N+1인 스택 여파기의 뿌리 신호가 된다는 것이다.

스택 여파기는 중앙값이나 크기 순서로 놓는 여파기와 마찬 가지로 비선형이므로, 입력 신호와 잡음을 각각 분리하여 해석할 수 없는 어려움이 있다. 그래서 이러한 비선형 여파기를 해석할 때에는 여파해도 변하지 않는 출력 즉, 뿌리 신호를 그 여파기의 통과 대역(passband) 신호라 하고

해석을 한다.

이제 창의 크기가 3이고 쓸모있는 PBF의 몇가지 보기를 들자. 여기서 입력 s_1를 문턱값 분해한 이진 신호를 x_1라 하고 PBF가 $B(x_1,x_2,x_3)$인 스택 여파기의 출력을 $S_B(s_1,s_2,s_3)$로 나타내기로 하자.

가) $B(x_1,x_2,x_3)=x_2$이면, $S_B(s_1,s_2,s_3)=s_2$ 즉 동일값 여파기이다.

나) $B(x_1,x_2,x_3)=x_1\,x_2\,x_3$이면, $S_B(s_1,s_2,s_3)=\min(s_1,s_2,s_3)$ 즉 최소값 여파기이다.

다) $B(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$이면, $S_B(s_1,s_2,s_3)=\max(s_1,s_2,s_3)$ 즉 최대값 여파기이다.

라) $B(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$이면, $S_B(s_1,s_2,s_3)=\mathrm{med}(s_1,s_2,s_3)$ 즉 중앙값 여파기이다.

마) $B(x_1,x_2,x_3)=x_2+x_1x_3$이면, $S_B(s_1,s_2,s_3)$는 $\{s_1,s_2,s_3\}$ 가운데에서 두번째로 큰 원소이고, 음의 충격성 잡음을 없애주는 여파기이다.

바) $B(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3$이면, $S_B(s_1,s_2,s_3)$는 $\{s_1,s_2,s_3\}$ 가운데에서 두번째로 작은 원소이고, 양의 충격성 잡음을 없애주는 여파기이다.

스택 여파기에 대해서는, 보다 자세한 뿌리 신호의 성질 규명, 특정한 상황에서의 최적스택 여파기의 종류 확인, 스택 여파기와 유사한 여파기의 개발 그리고 가중(weighted) 중앙값 여파기와의[18] 관계 해석 등 많은 연구과제가 남아 있다.

Ⅳ. 다른 비선형 여파기

이 절에서는 앞에서 다루지 않은 여러 비선형 여파기 가운데에서 현재 연구되고 있는 몇가지를 알리고자 한다.

Ⅳ-1 Robust 여파기

Robust 여파기는[9] outlier가 최종의 추정량에 영향을 적게 미치게끔 되어 있는데 일반적으로 최대 우도(likelihood) 방법에 바탕을 둔 M여파기,[20] 순서통계(order statistic)의 선형결합으로 나타나는 L여파기와[1][2] 순위 검정에 바탕을 둔 R여파기[21]등이 있다. 이들 여파기는 적절한 조건 아래에서 평균 여파기, 중앙값 여파기, 최대값 여파기가 되는 특성이 있다.

Ⅳ-2 비선형 평균 여파기(nonlinear mean filters)

비선형 평균 여파기는[22][23] 수학 또는 통계학에서 널리 쓰이는 여러 평균, 바꿔 말하면, 산술 평균 y_A, 조화 평균 y_H, 기하 평균 y_G, L_p 평균 y_{L_p} 및 반조화 평균(contraharmoric mean) y_{CH_p}을 신호의 여파에 적용시킨 비선형 여파기의 한 부류이다. 이들 사이에는

$$\min\{x_I\}\leq y_{CH-p}\leq y_{L-p}\leq y_H\leq y_A\leq y_{L_p}\leq y_{CH_p}\leq y_{CH_p}\leq \max\{x_I\} \tag{8}$$

이 성립하는데 이 식이 나타내는 바는 주어진 비선형 평균이 y_A보다 크면 음의 충격성 잡음을 없애고, 비선형 평균이 y_A보다 작으면 양의 충격성 잡음을 없앤다는 것이다. 즉 비선형 평균을 이용한 여파기는 한 쪽 방향의 충격성 잡음만을 없앨 수 있다(중앙값은 y_A보다 클 수도 작을 수도 있으므로 어느 쪽의 충격성 잡음이든지 함께 없앨 수 있다).

Ⅳ-3 형태학적 여파기 (morphological filters)

형태학적 여파기란[24][25] 수학적 형태학에 바탕을 둔 비선형 여파기이다. 이 여파기는 computer vision이나 구문적 (syntactic) 패턴 인식등 고급 영상 처리 분야에서 특히 요구되고 있는 신호의 기하학적 구조 파악이라는 측면에 대해서도 쓸모가 있기 때문에 현재 많은 연구가 이루어 지고 있다. 특히 형태학적 여파기는 이미 잘 알려진 중앙값, 순위 통계 및 스택 여파기들이 가지고 있는 구문적 특성과 매우 비슷한 점을 많이 가지고 있다. 보기를 들면 형태학적 여파기의 한가지인 CO (clos-opening) 여파기나 OC(open-closing) 여파기는 한번의 여파만으로 뿌리 신호에 이르고, edge를 보존하며, 차수(order)가 커졌을 때에는 잡음도 잘 없애는 것으로 알려져 있다. 또한

형태학적 여파기는 문턱값 분해 방법이나 umbra [25]등의 기법에 의해 구현하기도 쉽다.

V. 결 론

이 논문에서는 선형 여파기를 쓰기에 알맞지 않은 때에 잘 적응하여 잡음을 없애 주고, 갖고 있는 정보를 그대로 유지하는 특성을 지니고 있는 비선형 여파기에 대해 알아보았다.

그러나 비선형 여파기에도 풀어야 할 많은 문제점들이 있다. 보기를 들면, 선형 여파기에 대한 이론적 배경이 거의 정립되어 있는 반면에 비선형 여파기에 대한 이론적 또는 통계적 기초는 아직 완전히 정립되어 있지 않은 상태이다. 이런 이론적 기초의 확립은 앞으로 계속 연구되어야 할 분야이고, 그 이론적 바탕 위에서 비선형 여파기의 적응화 또는 최적화에 대한 연구가 계속 진행되어야 할 것으로 전망된다. 또한 비선형 여파기의 실시간 처리도 매우 중요하므로, 이를 실현하기 위한 소프트웨어 및 하드웨어에 대한 연구가 함께 이루어져야 할 것이다.

參 考 文 獻

1. J.B. Bednar and T.L. Watt, "Alpha-Trimmed Means and Their Relationship to Median Filters", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-32, pp. 145-153, February 1983.
2. Y.H. Lee and S.A. Kassam, "Generalized Median Filtering and Related Nonlinear Filtering Techniques", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-31, pp. 672-683, December 1983.
3. J.W. Tukey, "Nonlinear (Nonsuperposable) Methods for Smoothing Data", Conf. Rec. 1974; EASCON, p. 673, 1974.
4. T.S. Huang, G.T. Yang and G.Y. Tang, "A Fast Two-Dimensional Median Filtering Algorithm", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-27, pp. 13-18, February 1979.
5. J.P. Fitch, E.J. Coyle and N.C. Gallagher, Jr., "Median Filtering by Threshold Decomposition", IEEE Trans. Acou., Speech., Signal Proc., vol. ASSP-32, pp. 1183-1188, December 1984.
6. K. Chen, "Realizations of a Class of Non-Linear Filters Using a Bit-Serial Approach", Proc. ISCAS, pp. 1749-1752, Finland, Junc 1988.
7. S.G. Tyan, "Median Filtering: Deterministic Properties", Topics in Applied Physics, vol. 43, pp. 197-217, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
8. N.C. Gallagher and G.L. Wise, "A Theoretical Analysis of the Properties of Median Filters", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-29, pp.1073-1075, December 1981.
9. T.A. Nodes and N.C. Gallagher, "Median Filters: Some Modifications and Their Properties", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-30, pp. 739-746, December 1982.
10. G.R. Arce and N.C. Gallagher, Jr., "State Description for the Root Signal Set of Median Filters", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-30, pp. 894-902, December 1982.
11. J.P Fitch, E.J. Coyle and N.C. Gallagher, Jr., "Root Properties and Convergence Rates of Median Filters", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-33, pp. 230-239, February 1985.
12. G.R. Arce and N.C. Gallagher, Jr., "Stochastic Analysis for the Recursive Median Filter Process", IEEE Trans. Inform, Theory, vol. IT-34, pp.660-679, July 1988.
13. N.S. Jayant, "Average and Median-based Smoothing Techniques for Improving Digital Speech Quality in the Presence of Transmission Errors", IEEE Trans. Comm., vol. COM-24, pp. 1043-1045, September 1976.
14. L.R. Rabiner, M.R. Sambur and C.E. Schmidt, "Applications of a Nonlinear Smoothing Algorithm to Speech Processing", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal proc., vol. ASSP-23, pp.552-557, December 1975.
15. G.R. Arce and N.C. Gallagher, Jr., "BCT Image Coding Using Median Filter Roots", IEEE Trans. Comm., vol. COM-31, pp. 784-793, June 1983.
16. P.D. Wendt, E.J. Coyle and N.C. Gallagher, Jr., "Stack Filters", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-34, pp. 898-911, August 1986.

17. J. H. Lin and E.J. Coyle, "Stack Filters and the Mean Absolute Error Criterion," IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-36, pp. 1244-1254, August 1988.
18. M.K. Prasad and Y.H. Lee "Weighted Median Filters: Generation and Properties," Proc. ISCAS PP. 433-436, Portland, May 1989.
19. R.L. Launer and G. Wilkinson, Eds., Robustness in Statistics, Academic Press, New York, 1979.
20. P.J. Huber, "Robust Estimation of a Location Parameter", Ann. Math. Statistic., vol. 35, pp. 73-101, 1964
21. I. Song and S.A. Kassam, "Nonlinear Filters Based on Generalized Ranks for Edge Preserving Smoothing", Proc. ISCAS, pp. 401-404, San Jose, May 1986.
22. I. Pitas and A.N. Venetsanopoulis, "Nonlinear Mean Filters in Image Processing", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-34, pp. 573-584, June 1986.
23. I. Pitas and A.N. Venetsanopoulis, "Nonlinear Order Statistic Filters for Image Filtering and Edge Detection", Signal Process., vol. 10, pp. 395-413, June 1986
24. P.A. Maragos and R. W. Schafer, "Morphological Filters-Part I: Their Set-Theoretic Analysis and Relations to Linear Shift-Invariant Filters" IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-35, pp. 1152-1169, August 1987.
25. P.A. Maragos and R.W.Schafer, "Morphological Filters-Part Ⅱ: Their Relations to Median, Order Statistic, and Stack Filters", IEEE Trans. Acou., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-35, pp. 1170-1184, August 1987.

宋 翊 鎬(Iic Kho SONG) 正會員

1960年 2月 20日生

1982年 2月 : 서울大學校 電子工學科 卒業(工學士)

1984年 2月 : 서울大學校 大學院 電子工學科 卒業(工學碩士)

1985年 8月 : Univ. of Pennsylvania, Dept. of EE 卒業(M. S. E.)

1987年 5月 : Univ. of Pennsylvania, Dept. of EE 卒業(Ph. D.)

1987年 3月～1988年 2月 : Bell Communications Research 研究員

1988年 3月～現在 : 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科 助教授

關心分野 : 검파 및 추정, 통계학적 신호(화상)처리 및 통신이론