論 文

4변수 NP 同値類 대표함수를 이용한 AND-EXOR 最小論理式과 그 性質에 관한 연구

正會員 宋 洪 復* 正會員 金 明 起**

A Study on the AND-EXOR Minimum Expressions and their Properties Using Representative Functions of Four Variable NP-Equivalence Classes

Hong Bok SONG,* Myung Ki KIM** *Regular Members*

要 約 본 논문에서는 4변수 NP 同値類 대표함수의 AND-EXOR형 최소 논리식의 표를 제시한다.
여기에서 최소 논리식이란 우선, 첫째로 적항수가 최소이고 다음에 적항수 중에 Literal 수의 총화가 최소식이며 또한 그 최소 논리식의 성질에 대해서 검토한다.
이것을 기초로 해서 AND-OR 형 2단 논리 회로의 최소 논리식과 본 논문의 알고리즘을 이용한 AND-EXOR형 2단 논리회로의 최소 논리식을 비교한다. 그 결과, AND-OR형 최소 논리식의 경우는 적항수가 모두 8 이하에서, AND-EXOR 형 2단 최소 논리식의 경우는 적항수가 6 이하에서 모든 함수가 생성되고 있으며 전반적으로 AND-EXOR형 최소 논리회로 쪽이 4 변수 함수를 실현하는데 훨씬 적항수가 적다는 것을 알았다.
본 논문에서 제시한 알고리즘들은 SUN 3/50 상에서 실현했으며 이것을 통해서 4변수 이하의 논리함수는 본 논문에서 제시한 표에 의해서 즉시 최소형을 얻을 수가 있다. 5변수 함수에 대해서는 그 일부의 함수를 적당한 변수로 Shanon 전개해서 이것에 본 논문의 4변수 최소형을 적용함으로서 단시간내에 최소형을 얻을 수 있는 것이 가능하며 이 방법은 6변수 이상의 함수에도 적용하는 것이 가능하다고 생각된다.

ABSTRACT This paper presents a catalog of AND-EXOR expressions for representative functions of four-variable NP-equivalence classes.
Minimality is defined as minimizing first the number of product terms and then the total number of literal in the expression. Also, the properties of minimum expressions are discussed. Using this as a base, We compare minimum expressions of AND-OR type two-variable circuit with minimum expressions of AND-EXOR type two-variable circuit which used algorithm in this paper. As a result it was found that in the case of AND-OR type minimum expressions, number of product terms is under 8, and in the case of AND-EXOR type minimum expressions all functions are formed in which number of product terms is under 6, and generally number of product term is considerably small to realize four-variable function toward AND-EXOR type minimum expression circuit.
Aigorithm suggested in this paper are realized on Sun 3/50, and through this, logic function under four-variable

* 東義工業專門大學 電子通信科
Dep. of Electronic Communication Engineering, Dong Eui Technical Junior College
** 東亞大學校 電子工學科
Dep. of Electronic Engineering, DONG-A University
論文番號 : 90-14 (接受 1989. 7. 29)

can get minimum immediately by a catalog suggested in this paper. As for five-variable function, we can do shanon-development a part of the function with suitable variable, and by applying four-variable minimum of this paper on this, it can be possible to get minimum in a short time and it can be said that it is possible to apply this method to functions over 6 variable.

Ⅰ. 서 론

논리회로는 통상 AND 및 OR 게이트를 기본 논리소자로서 설계한다. AND 및 OR 게이트를 기본으로 하는 회로의 설계는 비교적 용이하다. 이중 AND-OR 2단 논리회로는 설계 방법이 확실히 설정되어 있고 PLA 구조에서 LSI 상에 효율 좋게 실현할 수 있기 때문에 널리 이용되고 있다. 그러나 산술연산회로(ALU)랑 오류정정 부호회로(ECC) 등에서는 AND 및 OR만으로 구성하는 것 보다도 EXOR 게이트를 병용하면 게이트 수를 크게 감소시킬 수 있다. 그 때문에 EXOR 게이트를 기본 논리소자로한 논리 설계도 생각할 필요가 있다. 본 논문에서는 주어진 논리 함수를 AND-EXOR 2단 논리회로로 실현하는 방법으로서 ESOP 논리식에 의한 방법을 제안했다[1]. 그러나 ESOP의 최소화 문제는 극히 어렵고 최소해를 능률 좋게 구하는 방법은 알려지지 않고 현재의 發見的 방법을 이용하고 있다[2]. 일반적으로 최소화 수법이 확립되어 있지 않는 논리 설계 문제에서도 변수의 個數가 적은 경우에는 최소해를 網羅的 방법에 의해 구할 수가 있다. 최소회로를 카타로그 형으로 구해 놓으면 설계 자료로서 이용할 수 있다. Hellerman은 3변수 NOR, NAND 회로 대해서 Muroga 등은 3변수 OR-OR회로, 4변수 AND, OR회로에 대해서 최소회로의 표를 주고 있다[3,4,5]. 또 池野등은 NAND 회로에 대해서 4변수 함수의 88%에 대해서 최적인 회로를 주고 있다[6]. 논리 설계자는 이들의 표를 이용하는 것에 의해 즉시 최적인 회로를 얻을 수가 있고 다변수 논리 함수의 최적 회로를 얻기 위한 유력한 자료로서 이용할 수 있다. 본 논문에서는 최소 논리식의 성질에 대해서 논하며 또 4변수 NP 同値類 대표 함수의 AND-EXOR형 최소논리식의 표를 제시한다. 최소논리식을 얻는 방법은 網羅的 방법을 이용하고 있다.

Ⅱ. AND-EXOR 최소논리식의 성질

본 장에서는 여러 정의 및 AND-EXOR 최소 논리식의 성질에 대해서 논한다(정의 2.1). X와 X를 변수 X의 Literal라고 한다. 각 변수의 Literal이 고작 1개밖에 포함하지 않는 논리적을 적항 또는 항이라고 한다(정의 2.2). 주어진 논리 함수 f를 표현하는 논리식에서 적항수가 최소의 것을 f의 최소형이라 한다(정의 2.3).

$$f=a_0 \oplus (a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \cdots a_nx_n) \oplus (a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus \cdots \oplus a_{n-1,n}x_{n-1}\ x_n) \oplus \cdots \oplus \cdots \oplus a_{123\ldots n}x_1x_2\ x_3 \cdots x_n \quad (2.1)$$

여기서, $a_{ijk\ldots n}=0$ 또는 1, $x_i=x_i$ 또는 $\bar{x}_i$이다. 위의 식에서 x_i가 모두 正의 Literal일때, (2.1)을 正極性 Reed · Muller표준형(PRME)라고 말한다. 또 x_i가 正 또는 負의 Literal에서 x_i와 $\bar{x}_i$가 동시에 나타나지 않을 때 이 식을 固定極性 Reed · Muller표준형(FRME)라고 하며 x_i와 $\bar{x}_i$가 동시에 식에 나타날때 이 식을 混合極性 Reed · Muller표준형(MRME)라고 한다(注意 2.1). PRME에서는 변수의 個數와 함수가 정해지면 논리식은 一意的으로 결정된다. 그 때문에 최소화 문제는 존재하지 않는다. FRME에서는 각 변수 x_i 극성이 정해지는 쪽에 의해서 적항수가 다르다. 극성이 정해지면 FRME은 일의적으로 정해진다. 최소형은 2^n에서 극성의 논리식을 조사하면 좋다. MRME에서는 한개의 함수를 표현하는 방법이 다수 존재하기 때문에 최소화 문제는 더욱 복잡하게 된다(정의 2.4). $f(x_1, x_2,$

$\cdots, x_n)=\sum\oplus x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n}$을 AND-EXOR형 論理和刑(ESOP)라 한다. 여기에서

$s_i=\{0, 1\}$, $x_i^0=x_i$, $x_i^1=x_i$, $x^{(0,1)}=1$, $x^{\phi}=0$이다 (注意 2.2).

PRME을 일반화한 식이 FRME이고 그것을 또한 일반화한 식이 MRME이며 그것을 또한 일반화한 식이 ESOP이다. 그 때문에 ESOP의 최소형 적항수가 가장 적다(정의 2.5). 함수 f의 최소 ESOP의 적항수를 $t_e(f)$로 표시한다.

(정리 2.1) 함수 f가 $f=g\oplus x^*$(여기에서 g는 x 이외의 함수)라고 표현 가능 할때 $t_e(f)=\min(t_e(g), t_e(\bar{g}))+1$이다.

(증 명)

(1) $\bar{g}$ 및 g를 실현하는 최소 ESOP을 각각 G_0 및 G_1이라고 한다. $G_0\oplus\bar{X}$, 및 $G_1\oplus X$은 어느 것도 f를 표현한다. 이들로부터 $t_e(f)\leq t_e(\bar{g})+1$, $t_e(f)\leq t_e(g)+1$을 얻는다. 위의 두식의 관계로부터 다음식을 얻는다.

$$t_e(f)\leq\min(t_e(g), t_e(\bar{g}))+1 \qquad (2\text{-}2)$$

(2) f를 표현하는 최소 ESOP를 F라고 한다.

(a) F에 있어서 x를 포함하는 항이 있을 때 x=0로 두면 F에는 零으로 되는 항이 존재하기 때문에 F의 적항수는 적어도 한개 감소한다. 이것으로부터 $t_e(g)\leq t_e(f)-1$을 얻는다.

(b) F에 있어서 $\bar{x}$를 포함하는 항이 있을 때 x=1로 놓으면 F에는 零으로 되는 항이 존재하기 때문에 F의 적항수는 적어도 한개 감소한다. 또 이때 식은 함수 $\bar{g}$를 표현한다. 이들로부터 $t_e(\bar{g})\leq t_e(f)-1$을 얻는다. (a)와 (b)로부터

$$\min(t_e(g), t_e(\bar{g}))\leq t_e(f)-1 \qquad (2\text{-}3)$$

(2-2)와 (2-3)으로부터 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$t_e(f)=\min(t_e(g), t_e(\bar{g})+1$$

이다.

이상의 정리에서 예를 들면 다음과 같다.

(예 2.1)

c

	1		1
	1	1	1
1			
1		1	

b, a, d

그림 1 진리표
Truth table.

그림1에서 변수 a로 분해하면 $f=a\oplus g=\bar{a}\oplus\bar{g}$로 분해 할 수 있다. 이것을 분해한 진리표로 표시하면 아래와 같다.

g :

c

	1		1
	1	1	1

b, d

위의 진리표의 최소형을 구하면 $g=\bar{c}d\oplus\bar{c}d\oplus bcd$이다. 따라서 $t_e(g)=3$이다.

g :

c

1			
1		1	

b, d

또한 $\bar{g}$의 최소형을 구하면 $\bar{g}=\bar{c}\bar{d}\oplus\bar{b}cd$ 이므로 $t_e(g)=2$이다. 따라서 f의 최소형은 $f=\bar{a}\oplus\bar{g}=\bar{a}\oplus\bar{c}\bar{d}\oplus\bar{b}cd$이기 때문에 식(2-2)로 부터 $t_e(f)=t_e(\bar{g})+1=3$이다.

(정리 2.2) 함수 f가 $f=x^*\cdot g$(여기서 g은 x 이외의 변수 함수)라고 표현할 수 있을 때 $t_e(f)=t_e(g)$이다.

(증 명)

(1) g의 최소 ESOP를 G라고 한다. $x^* \cdot G$은 f를 표현하며 이것으로 부터 $t_e(f) \leqq t_e(g)$을 얻는다.

(2) f의 최소 ESOP를 F라고 한다. F에 있어서 $x^*=x$때 $x=1$로 놓고 또 $x^*=\bar{x}$때 $x=0$로 놓는다. 이때 식은 함수 g를 표현한다. 이것으로 부터 $t_e(g) \leqq t_e(f)$를 얻는다. (1), (2)에 의해서 $t_e(f)=t_e(g)$를 얻을 수 있으며, 그 예는 다음과 같다.

(예 2.2) f :

			c	c	
	1	1	1		
		1		1	b
a					b
a					
		d	d		

위의 진리표의 함수 $f=a \cdot g$이다. 이것을 분해하면 다음과 같다.

g :

1	1	1		
	1		1	b

(위 표: c는 셋째·넷째 열 위, d는 둘째·셋째 열 아래)

위 진리표의 함수 $g=\bar{b} \oplus c\bar{d} \oplus b\bar{c}d$이며 함수 g의 최소형 $t_e(g)=3$이다. 따라서 함수 $f=\bar{a}(\bar{b} \oplus c\bar{d} \oplus b\bar{c}d) = \bar{a}\bar{b} \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus \bar{a}b\bar{c}d$이고 f의 최소형 $t_e(f)=3$이다.
결국 $t_e(f)=t_e(g)$라는 것을 알 수 있다.

(정리 2.3) $|\ t_e(f)-t_e(\bar{f})\ | \leqq 1$

(증 명) $g=\bar{f}$라고 한다. f, g의 최소 ESOP를 각각 F, G라 한다. $g=f \oplus 1$, $f=g \oplus 1$이 성립하기 때문에 $F \oplus 1$, $G \oplus 1$이 되는 ESOP은 각각 함수 g, f를 표현한다. 이들로 부터

$t_e(g) \leqq t_e(F \oplus 1)=t_e(f)+1$
$t_e(f) \leqq t_e(G \oplus 1)=t_e(g)+1$을 얻을 수 있다.

따라서 $t_e(g)-t_e(f) \leqq 1$, $t_e(f)-t_e(g) \leqq 1$이 성립하며 정리가 성립한다.

(정리 2.4) $g=\bar{f}$로 하고 $t_e(f)<t_e(g)$라고 한다. F가 f의 최소 ESOP라면 $F \oplus 1$은 g의 최소 ESOP이다.

(증 명) g의 최소 ESOP를 G라고 한다. 제의와 정리 2.3으로 부터 $t_e(G)=t_e(F)+1$이 성립한다. 결국 $F \oplus 1$은 g의 최소 ESOP이다.

(정의 2.6) n개의 변수 $x_1, x_2, \cdots x_n$에 대해서 생각할 때 n개의 Literal 논리적으로 각 변수의 Literal이 1개만 포함되어 있는 것을 최소항 이라 한다. 논리함수 f에 포함된 최소항은 f의 최소항이라 한다.

(補題 2.1) 논리함수 f가 최소항을 내포하지 않는 ESOP에서 표현 가능한 때 f의 최소항 個數는 우수이다.

(증 명) 논리함수 f가 최소항을 포함하지 않는 ESOP에서 표현되어져 있다고 한다. 이때 f를 표현하는 Karnaugh map를 생각한다. Karnaugh map의 각 Cell 중 루우프에서 i회 被覆(Covering) 되어져 있는 Cell의 갯수를 n_i ($i=1, 2, \cdots, k$, 단, k은 기수, $n_k=0$에서도 좋다)라고 한다. 루우프에서 被覆되어 있는 Cell의 총수는 중복을 허용해서 생각하면 $A=n_1+2n_2+3n_3+\cdots kn_k$이다. ESOP의 각 항이 被覆하는 Cell의 個數는 2, 4, 8,$\cdots 2^k$의 어디엔가 있으며 이것은 어느 것에도 우수이다. 또 ESOP의 각 항이 被覆하는 Cell의 총화는 위에 서 구한 Cell의 총화 A와 같다. 이것으로 부터 A는 우수인 것을 알았다.

$$A=n_1+2n_2+3n_3+\cdots+kn_k=(n_1+n_3+\cdots+n_k)+(2n_2+2n_3+4n_4+4n_5+\cdots+(k-1)\ n_{k-1})$$

이고 k가 기수이므로 위의 식 뒤에 있는 괄호안의 和는 우수이다. A가 우수인 것에 의해 n_1+n_3

$+n_5+\cdots n_k$도 우수이다. ESOP로 표현할 때 기수개의 루우프에서 被覆된 Cell이 f의 최소항으로 되기 때문에 f의 최소항 갯수는 $n_1+n_3+n_5+\cdots+n_k$와 같다. 이것으로 부터 f의 최소항 갯수는 우수인 것을 알았다.

(정리 2.5) 논리함수 f의 최소항 갯수가 기수때 f의 ESOP은 최소항을 포함한다.

(증 명) 논리함수 f의 최소항 갯수를 기수라고 한다. f의 ESOP가 최소항을 포함하지 않는다고 가정하면 補題 2.1로부터 f의 최소항 갯수가 우수로 된다. 그러나 이것은 題意에 反한다. 이것으로 부터 정리가 성립한다.

(예제 2.3) 2변수 함수 $f=x_1 \vee x_2$의 최소항 갯수는 3이다. 이 함수의 ESOP은 $x_1 \oplus \bar{x}_1 x_2$, $x_2 \oplus x_1\bar{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$, $1 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2$등 여러가지 생각할 수 있지만 어느 것에도 최소항을 내포한다. 단, ESOP에 포함되는 최소항이라고 해서 반드시 f의 최소항이라고는 한정하지 않는다.

(정리 2.6) 논리함수 f의 최소항 갯수가 기수때 $t_e(f)=\min(t_e(f \oplus x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}))+1$가 성립한다.

$$B_n=\{0, 1\}^n$$

(증 명) 정리 2.5로 부터 f의 최소 ESOP은 최소항을 포함한다. 그 최소항을 $m=x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$라고 하면 나머지 함수는 $f \oplus m$으로 표현할 수 있다. 이들로부터 정리의 성립은 명확하다.

(정리 2.7) $f=\bar{x}f_0 \vee xf_1$라고 할 때

$$t_e(f) \geqq \mathrm{MAX}(t_e(f_0),\ t_e(f_1))$$

이다.

(증 명) f의 최소 ESOP을

$$F_m=\bar{x}F_0 \oplus xF_1 \oplus F\cdot \qquad (2\text{-}4)$$

라고 한다. $t_e(F_0)=t_0$, $t_e(F_1)=t_1$, $t_e(F\cdot)=t\cdot$로 놓으면 (2-4)로 부터 $te(f)=t_0+t_1+t\cdot$이다. (2-4)에 있어서 $x=0$을 대입하면 $F_m(x=0)=F_0 \oplus F\cdot$은 함수 f_0을 표현하기 때문에

$$t_e(f_0) \leqq t_e(F_0)+t_e(F\cdot) \qquad (2\text{-}5)$$

가 성립한다. 또 (2-4)에 있어서 $x=1$을 대입하면 $F_m(x=1)=F_1 \oplus F\cdot$은 함수 f_1을 표현하므로

$$t_e(f_1) \leqq t_e(F_1)+t_e(F\cdot) \qquad (2\text{-}6)$$

가 성립한다. (2-4)~(2-6)으로 부터 정리가 성립한다.

(예제 2.4) $f=acd \oplus bcd \oplus ab\bar{c}$를 표현하는 최소 ESOP의 적항수가 3인 것을 표시한다. 위의 식에서 $d=1$로 놓으면 $F(d=1)=ac \oplus bc \oplus ab\bar{c}$로 된다. 이 함수 f를 표현하기 위하여 필요한 적항수는 3이다(이것은 3변수 함수의 최소 ESOP 표에서 확인할 수 있다). 정리 2.7로부터 f를 표현하기 위해서는 적어도 적항수가 3개 필요하다. 정리 2.7을 이용하면 5변수 이상의 함수의 최소 ESOP 적항수의 下界가 구해진다.

[5변수 함수의 최소 ESOP를 구하는 절차]

(1) 주어진 5변수 함수 f를 적당한 방법으로 간단화하고 그 적항수를 ta라고 한다.

(2) f를 각 변수에 관해서 Shanon 전개하고 각 부분함수(전부 5×2=10개이다)의 적항수를 4변수 함수의 최소 ESOP표를 이용해서 구한다.

(3) 정리 2.7을 이용해서 f의 최소 ESOP의 下界를 구한다.

(4) 下界와 *ta*가 일치하면 구한 ESOP은 최소이다.

(5) 일치하지 않으면 구한 ESOP의 최소성은 보증되지 않는다.

Ⅲ. 4변수 최소 ESOP의 표 구성과 그 사용법

4변수 최소 ESOP는 網羅的(exhaustive) 방법으로 구했다. 즉, 우선 적항수 한개로 실현할 수 있는 함수를 모두 생성하고 순차적으로 적항수를 증가해서 모든 4변수 함수가 생성되면 계산

表 3.1 AND-EXOR 最小論理式
Table 3.1 AND-EXOR minimun oxpressions

no.	fval	T	L	N	gate configuration
weight = 0					
1	0000	0	0	1	0
weight = 1					
2	0001	1	4	1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
weight = 2					
3	0003	1	3	1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$
4	0006	2	6	1	$\bar{a}\bar{b}c \oplus \bar{a}\bar{b}d$
5	0018	2	8	1	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
6	0180	2	8	1	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bcd$
weight = 3					
7	0007	2	6	1	$\bar{a}\bar{b} \oplus \bar{a}bcd$
8	0016	3	9	1	$\bar{a}\bar{b} \oplus \bar{a}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
9	0019	2	7	1	$\bar{a}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
10	0118	3	10	1	$a\bar{c}\bar{d} \oplus b\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
11	0181	2	7	1	$\bar{b}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bcd$
12	0182	3	10	1	$a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bcd$
weight = 4					
13	000f	1	2	1	$\bar{a}\bar{b}$
14	0017	3	9	1	$\bar{a}b\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{c}d$
15	001b	2	6	1	$\bar{a}\bar{b}d \oplus \bar{a}\bar{c}\bar{d}$
16	001e	2	5	1	$\bar{a}\bar{b} \oplus \bar{a}\bar{c}\bar{d}$
17	003c	2	4	1	$\bar{a}b \oplus \bar{a}c$
18	0069	3	6	1	$\bar{a}b \oplus \bar{a}c \oplus \bar{a}\bar{d}$
19	0116	4	12	1	$\bar{a}\bar{b} \oplus \bar{c}\bar{d} \oplus ab\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
20	0119	3	10	1	$\bar{c}\bar{d} \oplus ab\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
21	011a	3	9*	1	$\bar{a}\bar{b}d \oplus a\bar{c}\bar{d} \oplus b\bar{c}\bar{d}$
22	012c	3	8	1	$\bar{a}\bar{b} \oplus \bar{a}\bar{c}d \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
23	0168	4	9	1	$\bar{a}b \oplus \bar{a}c \oplus \bar{a}\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
24	0183	3	9	1	$\bar{a}bd \oplus \bar{a}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
25	0186	3	8	1	$\bar{a}\bar{b} \oplus \bar{a}cd \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
26	0189	2	6	1	$\bar{a}cd \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
27	0198	3	7	1	$\bar{a}c \oplus \bar{a}\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
28	01a8	3	8	1	$\bar{a}d \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{b}\bar{c}d$
29	03c0	2	6	1	$a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bc$
30	0660	4	8	3	$ac \oplus ad \oplus bc \oplus bd$
-30	f99f	4	8		$ac \oplus \bar{a}d \oplus \bar{b}\bar{d} \oplus b\bar{c}$
31	0690	4	10	1	$ac \oplus bc \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}b\bar{d}$
weight = 5					
32	001f	2	6	1	$\bar{a}\bar{b} \oplus \bar{a}b\bar{c}\bar{d}$
33	003d	3	8	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bc \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
34	006b	3	9	1	$\bar{a}\bar{b} \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus \bar{a}b\bar{c}d$
35	0117	4	12	1	$\bar{a}\bar{b} \oplus a\bar{c}\bar{d} \oplus b\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
36	011b	3	9	1	$\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}d \oplus ab\bar{c}\bar{d}$

37	011e	3	8	1	$\overline{ab} \oplus \overline{cd} \oplus ab\bar{c}\bar{d}$
38	012d	3	9	1	$\overline{ab} \oplus \bar{a}\overline{cd} \oplus a\overline{bcd}$
39	013c	3	8	1	$\bar{a}b \oplus \bar{a}c \oplus a\overline{bcd}$
40	0169	4	10	1	$\bar{a}b \oplus \bar{a}c \oplus \overline{ad} \oplus a\overline{bcd}$
41	016a	3	9	1	$\bar{a}d \oplus \bar{a}bc \oplus a\overline{bcd}$
42	0187	3	9	1	$\overline{ab} \oplus \bar{a}cd \oplus a\overline{bcd}$
43	018b	3	9	1	$\bar{a}d \oplus \overline{bcd} \oplus \bar{a}b\bar{c}d$
44	0196	4	10	1	$\bar{a}b \oplus \bar{a}c \oplus \bar{a}d \oplus a\overline{bcd}$
45	0199	3	8	1	$\bar{a}c \oplus \overline{ad} \oplus a\overline{bcd}$
46	019a	3	9	1	$\bar{a}d \oplus \bar{a}b\bar{c} \oplus a\overline{bcd}$
47	01a9	3	8	1	$\bar{a}d \oplus \overline{bc} \oplus a\overline{bcd}$
48	01aa	2	6	1	$\bar{a}d \oplus a\overline{bcd}$
49	01ac	3	10	1	$\overline{ab}c \oplus \bar{a}bd \oplus a\overline{bcd}$
50	01e8	4	12	1	$\bar{a}b \oplus a\overline{cd} \oplus b\overline{cd} \oplus \overline{ab}cd$
51	0358	3	10	1	$a\overline{bc} \oplus \bar{a}b\bar{d} \oplus \overline{ab}cd$
52	0368	4	11	1	$a\bar{b} \oplus \bar{b}c \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus \bar{a}b\bar{c}d$
53	03c1	3	9	1	$\overline{bc} \oplus \bar{a}bc \oplus \overline{abcd}$
54	0661	4	12	1	$\overline{ac} \oplus \bar{a}b\bar{d} \oplus \overline{bc}d \oplus a\bar{b}c\bar{d}$
55	0662	4	11	1	$\bar{a}c \oplus \bar{a}d \oplus \bar{b}c\bar{d} \oplus a\overline{bc}d$
56	0691	4	12	1	$\overline{ac} \oplus \bar{a}bd \oplus \overline{bc}d \oplus a\bar{b}c\bar{d}$
57	06b0	4	11	1	$a\bar{c} \oplus b\bar{c} \oplus a\overline{bd} \oplus \bar{a}bcd$
58	1681	5	13	1	$ab \oplus ac \oplus ad \oplus bcd \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
weight = 6					
59	003f	2	4	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bc$
60	006f	3	7	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bc \oplus \bar{a}b\bar{d}$
61	007e	3	9	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bcd \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
62	011f	3	8	1	$\overline{ab} \oplus a\bar{c}\bar{d} \oplus b\bar{c}\bar{d}$
63	012f	3	9	1	$\bar{a}\bar{b}c \oplus \overline{acd} \oplus \overline{bcd}$
64	013d	3	7	1	$\bar{a}b \oplus \bar{a}c \oplus \overline{bcd}$
65	013e	3	7	2	$\bar{a} \oplus a\bar{b}c \oplus \overline{bcd}$
66	016b	3	8	1	$\bar{a}d \oplus \bar{a}bc \oplus \overline{bcd}$
67	016e	4	10	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bc \oplus \bar{a}b\bar{d} \oplus \overline{bcd}$
68	018f	3	10	1	$\overline{ab} \oplus a\overline{bcd} \oplus \bar{a}bcd$
69	0197	4	9	1	$\bar{a}b \oplus \bar{a}c \oplus \bar{a}d \oplus \overline{bcd}$
70	019b	3	·8	1	$\bar{a}d \oplus \bar{a}b\bar{c} \oplus \overline{bcd}$
71	019e	4	10	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bc \oplus abd \oplus \overline{bcd}$
72	01ab	2	5	1	$\bar{a}d \oplus \overline{bcd}$
73	01ad	3	9	1	$\bar{a}\bar{b}c \oplus \bar{a}bd \oplus \overline{bcd}$
74	01ae	3	7	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}b\bar{d} \oplus \overline{bcd}$
75	01bc	4	11	2	$\bar{a} \oplus \overline{bc} \oplus a\overline{bcd} \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
76	01e9	4	12	1	$\bar{a}b \oplus \overline{cd} \oplus ab\overline{cd} \oplus \overline{ab}cd$
77	01ea	3	10	1	$\bar{a}d \oplus a\overline{bcd} \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
78	033c	3	6	2	$\bar{a} \oplus \overline{bc} \oplus \bar{a}bc$
79	0356	2	4	1	$\overline{ad} \oplus \overline{bc}$
80	0359	3	6	3	$a\bar{b} \oplus \overline{ad} \oplus \bar{b}c$
-80	fca6	3	6		$\bar{b}c \oplus \bar{a}d \oplus ab$
81	035a	3	6	2	$\bar{b} \oplus \overline{ad} \oplus a\bar{b}c$
82	0369	3	7	1	$\bar{a}d \oplus \overline{bc} \oplus \bar{a}bc$
83	036a	3	8	1	$\bar{a}d \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bc$
84	036c	3	8	1	$\bar{a}c \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bd$
85	03c3	2	5	1	$\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bc$
86	03c5	3	7	3	$\bar{a}c \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \overline{ab}d$
-86	fc3a	3	7		$ac \oplus b\bar{c} \oplus \overline{ab}d$
87	03c6	3	8	1	$\bar{a}c \oplus a\overline{bc} \oplus \bar{a}\bar{b}d$

88	03d4	4	9	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bd \oplus \bar{a}cd$
89	03d8	3	9	1	$a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}b\bar{d} \oplus \bar{a}cd$
90	0663	4	8	2	$\bar{c} \oplus a\bar{d} \oplus b\bar{d} \oplus ab\bar{c}$
91	0666	4	8	2	$c \oplus d \oplus abc \oplus abd$
92	0669	4	10	1	$\bar{a}c \oplus \bar{b}\bar{d} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bd$
93	0672	4	9	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{d} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}cd$
94	0678	4	11	1	$\bar{a}b \oplus a\bar{b}c \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}cd$
95	0693	4	8	2	$c \oplus \bar{a}\bar{d} \oplus \bar{b}d \oplus abc$
96	0696	4	9	2	$c \oplus \bar{b}d \oplus abc \oplus \bar{a}b\bar{d}$
97	06b1	4	9	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}d \oplus a\bar{b}c \oplus \bar{a}c\bar{d}$
98	06b2	4	9	3	$\bar{a}b \oplus \bar{b}c \oplus \bar{b}d \oplus \bar{a}c\bar{d}$
-98	f94d	4	9		$ab \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{b}d \oplus \bar{a}c\bar{d}$
99	06b4	4	11	1	$\bar{a}b \oplus a\bar{b}c \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}c\bar{d}$
100	06f0	3	8	1	$\bar{a}b \oplus a\bar{b}c \oplus a\bar{b}d$
101	07b0	4	10	2	$a \oplus b \oplus a\bar{b}cd \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
102	07e0	4	10	2	$a \oplus b \oplus a\bar{b}cd \oplus \bar{a}b\bar{c}\bar{d}$
103	1668	5	14	3	$a\bar{b} \oplus \bar{a}bc \oplus \bar{a}bd \oplus a\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{b}cd$
-103	e997	6	12		$a \oplus \bar{b} \oplus \bar{c} \oplus d \oplus abcd \oplus \overline{abcd}$
104	1683	4	10	1	$a\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus abc \oplus bcd$
105	1686	4	11	1	$c\bar{d} \oplus \bar{a}bc \oplus ab\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
106	1689	5	12	2	$a \oplus c \oplus \bar{b}\bar{d} \oplus ab\bar{c}d \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
107	1698	4	12	1	$a\bar{b}c \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}cd \oplus b\bar{c}\bar{d}$
108	1781	5	12	3	$ab \oplus ac \oplus ad \oplus bcd \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
-108	e87e	5	12		$ab \oplus \bar{a}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{d} \oplus \bar{b}cd \oplus b\bar{c}\bar{d}$
weight = 7					
109	007f	2	5	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bcd$
110	013f	3	8	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bc \oplus a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
111	016f	4	11	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bc \oplus \bar{a}bd \oplus a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
112	017e	3	8	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bcd$
113	019f	4	11	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}bc \oplus \bar{a}bd \oplus a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
114	01af	3	8	2	$\bar{a} \oplus \bar{a}b\bar{d} \oplus a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
115	01bd	4	11	2	$\bar{a} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{b}cd \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
116	01be	3	8	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
117	01eb	3	9	1	$\bar{a}d \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
118	01ee	3	7	2	$\bar{a} \oplus \bar{c}\bar{d} \oplus ab\bar{c}\bar{d}$
119	033d	4	10	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bc \oplus \overline{abcd}$
120	0357	3	8	1	$\bar{a}\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
121	035b	3	9	1	$\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}b\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
122	035e	3	8	1	$\bar{a}\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
123	036b	4	11	2	$\bar{b} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus \bar{a}b\bar{c}\bar{d}$
124	036d	4	10	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bcd$
125	036e	4	10	2	$\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{d} \oplus ab\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
126	037c	3	7	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bcd$
127	03c7	3	8	3	$\bar{a}c \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
-127	fc38	3	8		$b\bar{c} \oplus ac \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
128	03d5	3	9	1	$\bar{a}\bar{d} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bcd$
129	03d6	3	8	1	$\bar{a}\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bcd$
130	03d9	4	10	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{d} \oplus ab\bar{c}d$
131	03dc	3	7	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}b\bar{c}d$
132	0667	4	12	1	$\bar{a}\bar{c} \oplus \bar{a}b\bar{d} \oplus \bar{b}c\bar{d} \oplus a\bar{b}\bar{c}d$
133	066b	5	12	2	$\bar{c} \oplus a\bar{d} \oplus b\bar{d} \oplus ab\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{b}cd$
134	0673	4	10	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}bcd$
135	0676	4	10	2	$\bar{c} \oplus \bar{b}\bar{d} \oplus ab\bar{c} \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
136	0679	4	9	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus \bar{b}d \oplus \bar{a}bcd$

137	067a	4	10	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{d} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bcd$
138	0697	4	11	1	$\bar{b}c \oplus \bar{b}d \oplus \bar{a}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bcd$
139	06b3	4	10	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
140	06b5	4	10	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}d \oplus a\bar{b}c \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
141	06b6	4	10	2	$\bar{c} \oplus \bar{b}\bar{d} \oplus ab\bar{c} \oplus \bar{a}bcd$
142	06b9	4	9	2	$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus \bar{b}d \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
143	06f1	4	9	2	$a \oplus b \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d} \oplus a\bar{b}cd$
144	06f2	3	9	1	$\bar{a}b \oplus \bar{b}\bar{c}d \oplus a\bar{b}c\bar{d}$
145	0778	4	8	2	$a \oplus b \oplus cd \oplus abcd$
146	07b1	4	11	3	$\bar{a}b \oplus \bar{b}\bar{d} \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus a\bar{b}\bar{c}d$
−146	f84e	4	11		$\bar{b}d \oplus ab \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus a\bar{b}\bar{c}d$
147	07b4	4	9	2	$a \oplus b \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus a\bar{b}cd$
148	07e1	4	9	2	$a \oplus b \oplus \bar{a}\bar{c}\bar{d} \oplus a\bar{b}cd$
149	07e2	4	11	3	$a\bar{b} \oplus \bar{a}d \oplus \bar{b}cd \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
−149	f31d	4	11		$\bar{b}c \oplus ab \oplus \bar{a}\bar{c}\bar{d} \oplus a\bar{b}c\bar{d}$
150	07f0	3	6	2	$a \oplus b \oplus a\bar{b}cd$
151	1669	5	8	2	$a \oplus b \oplus c \oplus \bar{d} \oplus abcd$
152	166a	5	11	2	$a \oplus d \oplus bc \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus abcd$
153	1687	4	10	2	$\bar{b} \oplus cd \oplus a\bar{c}\bar{d} \oplus abcd$
154	168b	4	11	1	$a\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}cd \oplus abc\bar{d}$
155	168e	4	11	1	$\bar{b}c \oplus \bar{b}d \oplus \bar{a}cd \oplus ab\bar{c}\bar{d}$
156	1696	4	7	2	$b \oplus c \oplus d \oplus abcd$
157	1699	4	8	2	$c \oplus \bar{d} \oplus a\bar{b} \oplus abcd$
158	169a	4	9	2	$d \oplus ac \oplus b\bar{c} \oplus abc\bar{d}$
159	16a9	4	8	2	$a \oplus d \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus abc\bar{d}$
160	16ac	4	10	3	$ad \oplus bd \oplus \bar{b}c \oplus ab\bar{c}\bar{d}$
−160	e553	4	10		$ad \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus b\bar{d} \oplus ab\bar{c}\bar{d}$
161	1783	4	12	1	$\bar{b}\bar{c} \oplus ab\bar{d} \oplus ac\bar{d} \oplus \bar{a}bcd$
162	1789	5	13	2	$a \oplus cd \oplus abc \oplus abd \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
163	1798	4	11	1	$a\bar{b} \oplus cd \oplus b\bar{c}\bar{d} \oplus abcd$.
164	19e1	3	8	1	$\bar{a}b \oplus \bar{c}\bar{d} \oplus a\bar{b}cd$
weight = 8					
165	00ff	1	1		$\bar{a}$
166	017f	3	9		$\bar{a} \oplus a\bar{b}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bcd$
167	01bf	3	9		$\bar{a} \oplus a\bar{b}\bar{c}\bar{d} \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
168	01ef	3	7		$\bar{a} \oplus a\bar{c}\bar{d} \oplus b\bar{c}\bar{d}$
169	01fe	2	4		$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c}\bar{d}$
170	033f	3	6		$a\bar{b} \oplus \bar{a}\bar{c} \oplus \bar{b}c$
171	035f	3	7		$\bar{a} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bd$
172	036f	3	7		$\bar{a}c \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bd$
173	037d	4	10		$\bar{a} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bd \oplus \bar{a}\bar{c}d$
174	037e	4	9		$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bd \oplus \bar{a}\bar{c}d$
175	03cf	2	4		$\bar{a}c \oplus \bar{b}\bar{c}$
176	03d7	4	10		$\bar{a} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}bd \oplus \bar{a}cd$
177	03db	3	8		$\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}b\bar{d} \oplus \bar{a}cd$
178	03dd	3	7		$\bar{a} \oplus a\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{c}d$
179	03de	3	6		$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{c}d$
180	03fc	2	3		$\bar{a} \oplus \bar{b}\bar{c}$
181	066f	4	10		$\bar{a}c \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus a\bar{b}\bar{d} \oplus \bar{a}bd$
182	0677	4	10		$\bar{a} \oplus a\bar{b}c \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}cd$
183	067b	4	9		$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}cd$
184	067e	4	9		$\bar{a}b \oplus \bar{b}c \oplus \bar{b}d \oplus \bar{a}cd$
185	069f	4	8		$ac \oplus \bar{a}\bar{d} \oplus bc \oplus \bar{b}d$
186	06b7	4	9		$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}c\bar{d}$

187	06bb	4	10		$\bar{a} \oplus a\bar{b}c \oplus a\bar{b}d \oplus \bar{a}c\bar{d}$
188	06bd	4	8		$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus \bar{b}d \oplus \bar{a}c\bar{d}$
189	06f3	3	6		$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus a\bar{b}d$
190	06f6	3	6		$\bar{a}b \oplus \bar{b}c \oplus \bar{b}d$
191	06f9	3	5		$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus \bar{b}d$
192	0776	4	12		$\overline{ac} \oplus \overline{bd} \oplus a\bar{b}cd \oplus \bar{a}bc\bar{d}$
193	0779	5	12		$a \oplus b \oplus cd \oplus abcd \oplus \overline{abcd}$
194	077a	4	11		$\bar{a} \oplus \overline{bd} \oplus a\bar{b}cd \oplus \bar{a}bcd$
195	07b3	4	8		$1 \oplus ab \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus \bar{b}cd$
196	07b5	4	11		$\bar{b} \oplus \bar{a}d \oplus a\bar{b}cd \oplus \bar{a}\overline{bcd}$
197	07b6	4	10		$\bar{b} \oplus \bar{a}bd \oplus \overline{acd} \oplus \bar{b}cd$
198	07bc	4	8		$a \oplus b \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus \bar{b}cd$
199	07e3	4	10		$\bar{b} \oplus \bar{a}bd \oplus \bar{a}c\bar{d} \oplus \bar{b}cd$
200	07e5	4	8		$1 \oplus ab \oplus \overline{acd} \oplus \bar{b}cd$
201	07e9	4	8		$a \oplus b \oplus \overline{acd} \oplus \bar{b}cd$
202	07f1	4	10		$a \oplus b \oplus a\bar{b}cd \oplus \overline{abcd}$
203	07f2	3	8		$\bar{a}b \oplus a\overline{bd} \oplus \overline{bcd}$
204	07f8	3	5		$a \oplus b \oplus \bar{b}cd$
205	0ff0	2	2		$a \oplus b$
206	166b	5	12		$\bar{a} \oplus b\bar{c} \oplus \bar{a}bd \oplus a\bar{c}d \oplus \bar{b}c\bar{d}$
207	166e	5	10		$1 \oplus ab \oplus \overline{cd} \oplus acd \oplus bcd$
208	168f	4	8		$\bar{b} \oplus ac \oplus a\bar{d} \oplus bcd$
209	1697	5	11		$b \oplus c \oplus d \oplus abcd \oplus \overline{abcd}$
210	169b	4	10		$\bar{c} \oplus a\overline{bd} \oplus \bar{a}cd \oplus b\bar{c}d$
211	169e	4	9		$\bar{b} \oplus \overline{cd} \oplus acd \oplus bcd$
212	16ab	5	12		$a \oplus d \oplus \overline{bc} \oplus abc\bar{d} \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{c}d$
213	16ad	4	9		$\bar{a} \oplus b\bar{d} \oplus ac\bar{d} \oplus \bar{b}\bar{c}d$
214	16ae	4	10		$d \oplus ab\bar{c} \oplus acd \oplus \bar{b}c\bar{d}$
215	16bc	4	7		$1 \oplus ad \oplus \overline{bc} \oplus bc\bar{d}$
216	16e9	4	7		$a \oplus b \oplus \overline{cd} \oplus \bar{b}cd$
217	16ea	4	8		$a \oplus d \oplus a\overline{bc} \oplus bc\bar{d}$
218	1787	4	9		$\bar{b} \oplus cd \oplus abc \oplus ab\bar{d}$
219	178b	4	9		$ac \oplus \overline{bc} \oplus cd \oplus ab\bar{d}$
220	178e	4	10		$a\bar{c} \oplus \bar{a}d \oplus b\bar{c}d \oplus \bar{b}c\bar{d}$
221	1796	5	11		$b \oplus c \oplus d \oplus abcd \oplus a\overline{bcd}$
222	1799	4	11		$\bar{c} \oplus \bar{a}d \oplus ab\bar{c}d \oplus a\bar{b}c\bar{d}$
223	179a	4	9		$d \oplus b\bar{c} \oplus a\overline{bd} \oplus acd$
224	17a9	4	10		$\bar{a}d \oplus \overline{bc} \oplus ab\bar{d} \oplus ac\bar{d}$
225	17ac	4	8		$a \oplus bd \oplus \bar{b}c \oplus ac\bar{d}$
226	17e8	4	7		$a \oplus bc \oplus bd \oplus cd$
227	18e7	3	7		$\bar{a} \oplus b\overline{cd} \oplus \bar{b}cd$
228	19c3	4	9		$\bar{a} \oplus \bar{b}c \oplus a\overline{bd} \oplus b\overline{cd}$
229	19e6	3	6		$\bar{a} \oplus \overline{cd} \oplus \bar{b}cd$
230	19e9	3	7		$\bar{a}b \oplus \overline{cd} \oplus \bar{b}cd$
231	19ea	4	8		$a \oplus d \oplus a\bar{b}c \oplus bc\bar{d}$
232	19f1	4	12		$\bar{a}b \oplus \overline{cd} \oplus a\bar{b}cd \oplus \bar{a}b\bar{c}\bar{d}$
233	19f8	3	8		$\bar{a}b \oplus a\overline{cd} \oplus \bar{b}cd$
234	1bd8	4	8		$ab \oplus a\bar{c} \oplus b\bar{d} \oplus cd$
235	1be4	3	5		$a \oplus bd \oplus c\bar{d}$
236	1ee1	3	4		$a \oplus b \oplus \overline{cd}$
237	3cc3	3	3		$a \oplus b \oplus \bar{c}$
238	6996	4	4		$a \oplus b \oplus c \oplus d$

을 종료한다. 최소 논리식이란 우선, 첫째로 적항수가 최소, 다음에 논리식중에 Literal 수의 총화가 최소의 것을 구하고 있다. Table.3.1에 이렇게 해서 얻어진 4변수 최소 ESOP의 표를 제시한다.

(정의 3.1) 4변수 논리함수 f(a, b, c, d)를 최소항으로 전개하면 $f=P_0\overline{abcd} \vee P_1\overline{abc}d \vee P_2\bar{a}bcd \cdots \vee P_{15}abcd$이다. 그 계수의 열 $P_{15}\ P_{14}\ P_{13} \cdots P_0$을 16비트 2진수로 보고 4행의 16진수로 표현한다. 이것을 주어진 논리함수의 16진 표현이라고 한다. 또 $P_i=1(i=0, 1, 2, \cdots, 15)$로 되는 P_i의 갯수를 함수 f의 중량(weight)라고 한다. 최소 ESOP의 표는 다음 6개의 난(欄)에 의해서 구성되어 있다.

난 1 : 함수의 분류
난 2 : 대표 함수의 16진 표현
난 3 : 적항수
난 4 : Literal 수의 총화
난 5 : 함수의 부정형 최소 ESOP 형태
난 6 : 최소 ESOP 논리식으로 구성된다.

또 함수의 중량에 의해서 그룹(group)으로 분류되어져 있으며 최소 ESOP의 표를 이용해서 주어진 4변수 함수의 AND-EXOR 최소 논리식을 구하는 알고리즘을 제시한다.

〈알고리즘〉

(1) 주어진 논리함수 f(a, b, c, d)의 16진 표현을 구한다.

(2) 함수의 중량에 의해 다음과 같은 처리를 행한다.

(a) 함수의 중량≦8일 때

(a-1) 변수의 치환 및 부정의 모든 조합을 행해서 최소의 16진 표현을 갖는 함수 및 그 조합을 얻는다.

(a-2) 이 최소의 16진 표현에 의해서 표를 색인하고 해당하는 최소 ESOP를 얻는다.

(a-3) 얻어진 최소 ESOP에 대해서 (a-1)에서 구한 치환 및 부정의 역변환을 행해서 주어진 함수에 대한 최소 ESOP를 얻는다.

(b) 함수의 중량>8일 때

(b-1) 함수의 부정을 구한다.

(b-2) 상기의 a-1), a-2), a-3)를 행한다.

(b-3) 표중의 함수의 부정형 유형에 응해서 아래의 처리를 행하는 것에 의해 원함수의 최소 ESOP를 얻는다.

유형1 : 정수 1을 EXOR한다.

유형2 : Literal 수 1의 적항중 임의의 기수개의 적항변수 부정을 취한다.

유형3 : -(마이너스) 함수번호의 최소 ESOP를 갖는다.

(예 3.1) $f=\overline{abcd} \vee \overline{ab}cd \vee \bar{a}bc\bar{d} \vee \bar{a}bc\bar{d} \vee a\overline{bcd} \vee abcd$

(1) 이 함수의 중량은 6, 16진 표현은 8147이다.

(2) 이 함수에 대해서

i) 변수의 치환 a→c, b→a, c→b

ii) 변수 b, d의 부정을 행하는 것에 의해 최소 16진 표현 06b2을 얻는다.

(3) 최소표중 중량 6, 16진 표현 06b2의 행으로 부터,

$$f=\bar{a}b \oplus \bar{b}c \oplus \bar{b}d \oplus \bar{a}c\bar{d} \qquad (3\text{-}1)$$

을 얻는다.

(4) (3-1)에 대해서 (2)의 역변환 즉,

i) 변수 b, d의 부정

ii) 변수의 치환 a→b, b→c, c→a을 행하는 것으로 부터 주어진 함수의 최소 ESOP

$$f=\overline{bc} \oplus ac \oplus c\bar{d} \oplus a\bar{b}d$$

을 얻는다.

(예 3.2) $f=\overline{abcd} \vee \overline{ab}c\bar{d} \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee \bar{a}bcd \vee \bar{a}bcd \vee \overline{ab}cd \vee \overline{ab}c\bar{d} \vee a\bar{b}cd \vee ab\overline{cd} \vee abc\bar{d}$

(1) 이 함수의 16진 표현은 5fc6, 중량은 10이므로 부정을 취하면 16진 표현 a039(중량 6)을 얻는다.

(2) 이 함수에 대해서

i) 변수의 치환 b→c, c→d, d→b

ii) 변수 b, c이 부정에 의해 최소의 16진 표현 0359를 얻는다.

(3) 최소표중의 중량 6, 16진 표현 0359의 행에 의해서

$$a\bar{b} \oplus \overline{ad} \oplus \bar{b}c \qquad (3\text{-}2)$$

를 얻는다.

(4) (3)의 함수 부정형 유형은 3이므로 (3-2)의 부정은 (−)函數 번호행으로 부터

$$b\bar{c} \oplus \bar{a}d \oplus a\bar{b} \qquad (3\text{-}3)$$

을 얻는다.

(5) (3-3)에 대해서 (2)의 역변환을 행하는 것에 의해 최소 ESOP $f=\bar{b}d\oplus\bar{a}c\oplus a\bar{d}$을 얻는다.

Ⅳ. 실험결과 및 검토

표 4.1은 변수 함수를 ESOP로 표현하기 위하여 필요한 적항수 및 그 적항수에서 표현할 수 있는 함수의 數분포를 표시한다. 비교를 하기 위하여 AND-OR형 최소논리식에 의해서 실현한 결과도 표시한다. 이들에 의해 ESOP의 경우는 적항수가 6 이하에서 AND-OR의 경우는 적항수가 8 이하에서 모든 함수가 생성되어 있으며 전반적으로 ESOP의 쪽이 4변수 함수를 실현하는데 필요한 적항수가 훨씬 적다는 것을 알 수 있다. 이것은 5변수 이상의 함수에 대해서도 성립한다고 추측된다. 4변수 이하의 논리함수는 본 논문에서 구한 표 3.1에 의해서 즉시 최소형을 얻을 수가 있다. 5변수에 대해서는 그 일부의 함수는 적당한 변수로 Shannon 전개하고 이것에 4변수 최소형을 적용하는 것에 의해 단시간에 최소형을 얻는 것이 가능하며 이 방법은 6변수 이상의 함수에도 적용하는 것이 가능하다고 생각된다.

표 4.1 AND-OR형 최소논리식 및 AND-EXOR형 최소논리식에서 실현되는 4변수 함수의 個數 비교
Table. 4.1 Compare AND-OR with AND-EXOR number of four-variable function

적항수	AND-OR		AND-EXOR	
	대표함수 個數	함수個數	대표함수 個數	함수個數
0	1	1	1	1
1	5	81	5	81
2	21	1,804	27	2,268
3	75	13,472	121	21,744
4	156	28,904	200	37,530
5	98	17,032	46	3,888
6	33	3,704	2	24
7	10	512	−	−
8	3	26	−	−
합 계	402	65,536	402	65,536

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 4변수 NP 동치류 대표함수의 AND-EXOR형 최소 논리식을 구했으며 또한 얻어진 최소 논리식의 성질에 대해서 고찰했다. 4변수 이하의 함수인 65,536개의 갯수와 NP 동치류의 갯수인 402개의 대표함수를 AND-OR형 2단 논리함수와 비교를 했다. 그 결과 AND-EXOR 의 경우는 적항수가 6 이하에서 생성된 반면에 AND-OR형은 적항수가 8이하에서 모든 함수가 생성되어 결과적으로 AND-EXOR 형의 쪽이 4변수를 실현하는데 적항수가 훨씬 적다는 것을 알 수 있다. 또한 4변수 최소 논리식의 적항수를 줄이는 방법으로서 3단 논리회로 쪽이 더욱 적항수를 줄일 수 있다고 생각된다. 3단 논리회로의 최소식에 관해서도 이미 프로그램을 개발중에 있으며 현재 평가중이다. 금후의 과제로서는 4변수 AND-EXOR 최소 논리식을 이용해서 5변수 이상의 논리 함수를 간단화하는 수법의 개발이 고려된다.

參考文獻

1. 笹尾, Ph.W. Besslich, "EXOR Array 付 PLA 複雜度", 電子通信學會 FTS 研究會 FTS 86-17, 1986-11, 1986.
2. 宋洪復, 鄭萬永, "CCD를 이용한 다치논리회로의 설계에 관한 Tabular 法", 한국통신학회 논문집 vol. 13, no. 5, pp. 411~421, 1988.
3. L. Hellerman, "A catalog of three variable OR-Inverted and AND-Inverted logical circuits", IEEE Trans. Comput., EC-12, pp. 198~223, 1963.
4. C.R. Baugh, C.S. Chandersekapan, R.S. Swee and S. Muroga, "Optimal networks of NOR-OR gates for functions of three variables", IEEE Trans. Comput., c-21, pp. 153-160, 1972.
5. J.N. Cuniney, M.H. Young, T. Nakagawa, and S. Muroga, "Results of the synthesis of optimal networks of AND and OR gates for four variable switching function", IEEE Trans. Comput., c-27, pp. 76~85, 1979.
6. 池野, 橋本, 內藤, "4變數 素3類 最小 NAND 回路", 研究實用化 報告 第 25號, pp. 1~88, 1968.

宋 洪 復(Hong Bok SONG) 正會員

1956年 4 月14日生

1983年 2 月：光云大學校 電子通信 工學科 卒業

1985年 2 月：仁荷大學校 大學院 電子工學科 卒業(工學碩士)

1985年 9 月～現在：東義工業專門大學電子通信科專任講師

1986年 3 月～現在：東亞大學校 大學院 電子工學科 博士課程

1989年 1 月～1989年12月：日本九州工大 電子情報工學部 客員研究員

金 明 起(Myung Ki KIM) 正會員

1930年 1 月25日生

1958年 6 月：美國 海軍工科大學 卒業

1966年 2 月：서울大學校 大學院 電子工學科卒業(工學碩士)

1976年 2 月：東亞大學校 大學院 電子工學專攻(工學博士)

1954年 2 月－1969年 3 月：海軍士官學校 教授部勤務

1969年 4 月－1972年 2 月：IMEC電子株式會社 勤務

1972年 3 月－現在：東亞大學校 工科大學 電子工學科教授 本學會 釜山－慶南支部長