

# 포아송 방정식에서 1-Irregular Mesh를 이용한 유한요소법의 수렴성에 관한 연구

正會員 李 炯\* 正會員 羅 相 同\*\*

## Pointwise Convergence for The FEM in Poisson equations by a 1-Irregular Mesh

Hyoung LEE\*, Sang Dong RA\*\* *Regular Members*

**要 約** 유한요소법(Finite Element Method)은 컴퓨터를 이용하여 미분방정식의 근사해를 얻기위한 수학적 기법이다. 유한요소법의 pointwise convergence는 매쉬 크기와 허용 오차와의 관계를 분석해 보려는 것이다. 이들 상호 관계에 관한 연구는 유한요소법에 의한 근사식의 질을 높이는데 중요한 계기가 되어 결과를 예측 하는데 효과적이다. 본 논문은 1-irregular 매쉬를 이용한 세분화(refinement) 및 형상 함수의 차수 변화에 따른 미지절점(unknown node) 수의 증가에 따른 수렴성을 분석하였다.

**ABSTRACT** The FEM is a computer-aided mathematical technique for obtaining approximate solution to the differential equations. The pointwise convergence defines the relationship between the mesh size and the tolerance. This will play an important role in improving quality of finite element approximate solution. In this paper, We evaluate the convergence on a certain unknown point with a 1-irregular mesh refinement and spectral order enrichment. This means that the degree of freedom is minimized within a tolerance.

### I. 서 론

컴퓨터를 이용하여 미분방정식의 근사해를 얻기 위하여 유한요소법(Finite Element Method) 이 널리 사용된다.

이 방법은 문제의 영역을 작은 요소(element)로 나누고 주어진 조건을 만족하는 다항식인 형상 함수(shape function)를 이용하여 해에 접근한다. 이때 개선된 해를 얻기 위하여 요소를 세분하거나 다항식의 최고 차수를 높이는 방법을 사용한다.<sup>(1)</sup>

요소를 세분화 한다는 것은 매쉬 크기를 줄이는 것을 의미하며, 이에 따라 영역내부의 미지절점(unknown node)의 수가 2차원 일 경우 기하급수적으로 증가하게 된다.

효과적인 유한요소법의 개선방법은 해를 얻기 위한 미지절점 수의 증가를 최소화 하거나 각 요소에서 형상 함수의 차수를 적절히 높여서 주어진 허용오차 범위내에서 근사해를 얻는 방법이다. 이때 변화되는 절점 수에 따라 상대오차의 관계를 유도한다면 오차의 추정이 가능하게 된다.<sup>(2)</sup>

일반적으로 매쉬 크기가 줄어들면 오차는 감소하지만 요소수가 증가함에 따라 미지절점 수가 크게 증가 된다. 따라서 유한요소법을 풀기위한 컴퓨터의 기억용량과 처리속도에 제한을 받는다. 즉 격자선 분할(grid refinement)에 의한 미지절점 수를 증가시킬 수가 없는 경우 국부적 매쉬 분할에 의하여 제한된 구역에서 미지절점 수를 증가시켜 특정한 점이나 영역에서 개선된 근사해를 구하는 경우가 많다.

따라서 본 논문은 허용오차 범위 내에서 특정 점의 근사값을 개선하기 위하여 매쉬 분할 및

\*崇實大學校 電算院

Computer Institute of Soong Sil Univ.

\*\*朝鮮大學校 컴퓨터工學科

Dept. of Computer Eng., Chosun Univ.

論文番號 : 91 - 113 (接受1991. 8. 26)

형상함수 차수높임의 방법으로 1 irregular 매쉬를 사용할 있게 알고리즘을 설계하고 이에 따른 pointwise convergence 문제를 연구하여 본다.

## II. Pointwise Convergence

주어진 미분방정식을 만족하는 Trial solution

$\check{U}_n(x, y) = \phi_0(x, y) + \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x, y)$ 에서 pointwise convergence는

$n \rightarrow \infty$ 일때  $|\mu(x, y) - \check{U}_n(x, y)| \rightarrow 0$ 이 된다.<sup>(43)</sup>

이론적으로 유한요소법의 수렴은 uniform convergence에 의하여 성립되므로 energy error의 추정이 일반적이다. 그러나 근사해로 이루어진 수열

$\check{U}_1(x, y), \check{U}_2(x, y) \dots \check{U}_m(x, y) \dots \check{U}_n(x, y)$ 에서

$\check{U}_1(x, y) = \phi_0(x, y) + \sum_{j=1}^1 a_j \phi_j(x, y)$ ,

$\check{U}_n(x, y) = \check{U}_1(x, y) + \sum_{j=2}^n a_j \phi_j(x, y)$ 라고 할때

$m, n \rightarrow \infty$ 에서

$|\check{U}_m(x, y) - \check{U}_n(x, y)| \rightarrow 0$ 이 성립한다면

$\check{U}_m(x, y), \check{U}_n(x, y)$ 은 극한값을 가질 수 있지만

$\check{U}_n(x, y) \rightarrow \mu_n(x, y)$ 에 수렴한다고 볼 수 없다.

즉  $n \rightarrow \infty$ 일때

$|\check{U}_m - \check{U}_n| \rightarrow 0$ 는  $|\mu - \check{U}_n| \rightarrow 0$ 일 필요조건은 성립되나 충분조건은 성립되지 못한다.

그러나 매쉬 분할전략을 효과적으로 수행함으로써 제한된 mesh 절점 수를 증가시켜 근사해를 개선할 수 있다. 즉 변화상태가 급격한 영역에서는 매쉬 크기를 작게 하고, 변화 상태가 완만한 영역에서는 매쉬 크기를 크게하는 국부적 매쉬 분할을 실행하게 된다. 그 방법으로 영역내 절점을 하나씩 증가시키면서 주어진 오차범위에서

자유도(degree of freedom)의 증가를 최소화 시켜 접근할 수 있다.

## III. A 1-Irregular Mesh

### 1. 매쉬 분할

유한요소법에서 새로운 절점을 증가시키는 방법으로는

- 1) 격자선 분할
- 2) 매쉬 분할
- 3) 형상함수 차수높임

의 세가지가 있다. 이때 수렴성은 한개의 요소에서 Aspect ratio, Skewness, Taper의 형태에 따라 영향을 받는다.<sup>(44)</sup>

또한 전체 영역에서는 각 요소간 절점의 위치 및 매쉬 크기에 따라 차이가 난다. 이들 요소간 연속성을 고려한 매쉬 분할은 다음과 같이 구분할 수 있다.

- a) Regular 매쉬 분할
- b) Irregular 매쉬 분할
- c) 1 Irregular 매쉬 분할

이들 중 절점을 하나씩 증가시키며 매쉬 분할을 하는 1-irregular 매쉬 분할은 (그림 1)과 같다. 또한 이 경우를 전체 영역에서 보면 (그림 2)와 같다.

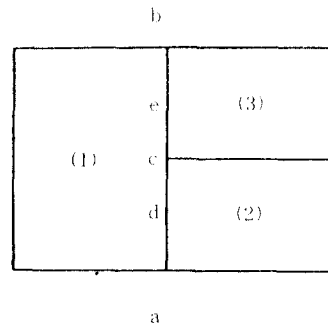


그림 1. 1 irregular 매쉬 분할  
Fig 1. 1-irregular mesh refinement

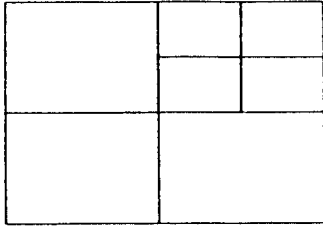


그림 2. 전체영역에서의 1 irregular 매쉬 분할  
Fig. 2. 1-irregular mesh refinement domain in the

여기에서 1 irregular 매쉬 분할의 가장 큰 문제점은 각 요소들간의 연속성이다.

(그림 1)에서 요소(1)과 요소(2), 요소(3)과 같이 경계선의 한쪽이 평각을 이루는 중간 결점인 경우 총좌표계(global coordinate system)에서 국부적 좌표계(local coordinate system)로 변환하는 등계수 변환(isoparametric transformation)은 일반적으로 요소간에 연속이 되지 못하여 conforming 요소가 되지 못한다. 따라서 요소(1)의 우측 경계선과 요소(2),(3)의 좌측 경계선이 연속되게 하기 위하여 결점(e)에서 굵은 모서리 결점(a),(b),(c)에서의 값과 관계식을 설정해 주어야 한다. 이에 대한 관계식은 (IV) 절에서 취급한다.

또한 각 요소에서 얻어진 형상 함수의 차수가 서로 다른 경우에는 연속성이 없기 때문에, 이때에는 hierarchical 형상 함수를 이용하여 연속되게 만들어 준다.<sup>9)</sup> 예를 들어 1차원에서 형상 함수의 차수가 p일때까지 찾아보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ \phi_1(x) &= x & , 0 \leq x \leq 1 \\ & \vdots \\ & \vdots \\ \phi_p(x) &= \begin{cases} 1-(2x-1)^p & , p : \text{짝수} \\ (2x-1)^p - (2x-1) & , p : \text{홀수} \end{cases} \end{aligned}$$

이것을 2차원으로 확장하여 tensor product 를 사용하면

$$\phi_p(x,y) = \phi_p(x) \cdot \phi_p(y) \quad , 0 \leq x,y \leq 1$$

이 된다.<sup>10)</sup>

민일 형상 함수의 차수가 요소(1)에서는 3차이고 요소(2)에서는 2차, 요소(3)에서는 1차라면 강제된 a,b에서 요소(2)에는 p=3인 다항식이 더해져야 하고, 요소(3)에는 p=2, p=3인 다항식이 더해져야 한다.

### 2. 오차 추정

국미분 방정식의 강제치 문제인

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= f \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

에서 국분 다항식(piecewise polynomial)으로 이루어진 근사해인

$$\tilde{U} = a_0 N_0 + \sum a_i N_i \quad (N_i \text{는 다항식})$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} = 0 \text{을 만족하는 값 } \mu \text{를 찾고자 한다.}$$

실제 이 문제의 해는 weak solution을 찾는 문제인데, 어떤 공간함수 u에 대한 모든  $\gamma$ 에 대하여

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial y^2} \right) \gamma \, dx dy = 0 \text{을 만족하는 } \mu \text{를 찾는 문제가 되고 Green의 정리를 사용하여}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) d\Omega \\ = \int_{\partial\Omega} (\partial \mu / \partial n) \gamma \, ds \text{로 변형한 다음 } \mu \text{ 대신 } \tilde{U} \text{를} \\ \text{사용하면 각각의 요소에서의 } a_i \text{들을 찾는 문제로} \\ \text{변형된다. 이때 오차 } E \text{를 } E = \tilde{U} - \mu \text{라 한다. 여기서 } \tilde{U} \text{와 } \mu \text{는 함수이기 때문에 norm을 사용해야} \\ \text{한다.}$$

$$\|E\| = \left[ \int_{\Omega} E \mathcal{L} E \, d\Omega \right]^{1/2} \text{로 정의한다.}$$

여기서  $\mathcal{L} = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)$ 이다.

$$\begin{aligned} //E//^2 &= \int_{\Omega} (\dot{U} - \mu) \mathcal{L}(\dot{U} - \mu) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\dot{U} - \mu) (\mathcal{L}\dot{U} - \mathcal{L}\mu) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\dot{U} \mathcal{L}\dot{U} - \dot{U} \mathcal{L}\mu - \mu \mathcal{L}\dot{U} + \mu \mathcal{L}\mu) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \dot{U} \mathcal{L}\dot{U} d\Omega - \int_{\Omega} \mu \mathcal{L}\dot{U} d\Omega \end{aligned}$$

( $\because \mathcal{L}\mu=0$ 이므로)

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} (\partial \dot{U} / \partial x) (\partial \mu / \partial x - \partial \dot{U} / \partial x) + (\partial \dot{U} / \partial y) \\ & \quad (\partial \mu / \partial y - \partial \dot{U} / \partial y) d\Omega \\ & \quad + \int_{\partial \Omega} (\partial \dot{U} / \partial n) (\mu - \dot{U}) ds \end{aligned} \quad (\text{Eq. 1})$$

(Eq. 1)에서  $\partial \dot{U} / \partial n$ 는 (그림 3)에서처럼 각 요소를 접속시킬때 발생하는 값으로 형상 함수들이 불연속일때 값이 생기기 형상 함수의 차와 비례하는 값으로 (그림 4)에서의 d값에 영향을 받는다.

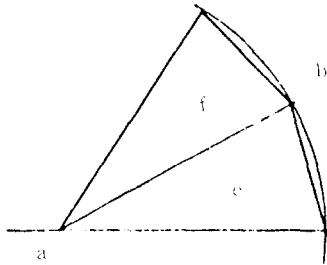


그림 3. 요소분할  
Fig 3. Deviding into two elements

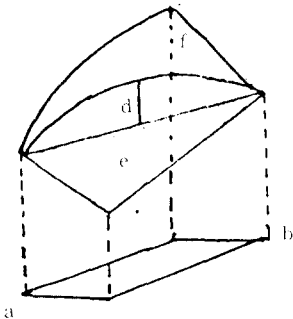


그림 4. 근사식으로 나타낸 두 요소의 해공간  
Fig 4. Two elements and the corresponding trial solution

본 논문에서 (그림 1)의 요소 (1), (2), (3)에서 쌍선형 형상 함수를 연속되게 만들 경우

에는  $d=0$ 로 처리할 수가 있었다.

flux를 처리할 경우 요소 (1)에서 a로부터 b까지 flux의 절대값은 요소 (2), (3)의 b에서 c까지와 c에서 a까지의 flux합의 절대값과 같다. 그러므로 이 문제에서는

$$\int_{\partial \Omega} (\partial \dot{U} / \partial n) (\mu - \dot{U}) ds = 0 \text{이다.}$$

(Eq. 1)의 첫번째항의 오차는 보간다항식의 오차에 의해 결정되고 매쉬크기에 비례하여 얻어지는 값으로  $O(h^2)$  정도이다.

Trial 함수를  $\sum a_i N_i$ 로 했을때 매쉬를 증가하면서 hierarchical mode를 사용한다면 오차는  $a_{m+1} N_{m+1}$ 에 크게 영향을 받게되어

$$\begin{aligned} //E//^2 &= [\int_{\Omega} N_{m+1} (\mathcal{L} N_{m+1}) d\Omega]^{-1} \\ & \quad [\int_{\Omega} N_{m+1} d\Omega]^2 \frac{\int R_w^2 d\Omega}{\int d\Omega} \end{aligned}$$

이 되고,  $N_{m+1} = x(1-x)/h^2$ 라 할때

$$//E//^2 = (h^2/12) \int_{\Omega} R_w^2 dx \text{이 된다.}^{(5)} \text{ (이때 } R_w = \mathcal{L}\dot{U} \text{)}$$

#### IV. A Test Case

아래와 같은 Laplace방정식의 경계치 문제를 연구 대상으로 하였다.<sup>(6)</sup>

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{in } D = \{(x, y) \mid 0 < x < 3, 0 < y < 3\}$$

$$\mu(x, 0) = x^4$$

$$\mu(0, y) = y^4$$

$$\mu(x, 3) = 81 - 54x^2 + x^4$$

$$\mu(3, y) = 81 - 54y^2 + y^4$$

여기서 Trial 함수는  $\mu(x, y) = \tilde{U}(x, y) =$

$\sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x, y)$ 로 변형시켜 근사치를 구했다.

위 미분방정식의 정해는  $\mu(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ 이다. 이 문제의 점(2.25, 2.25)에서 미분방정

식을 만족하는 해(전위차)에 대해서 매쉬수를 변화시키면서 얻은 근사해와 완전해를 비교하였다.

각 매쉬간의 연속성을 위해서

1. 쌍선형 형상 함수에서 Trial 함수는

$$\mu(x, y) \approx \bar{\mu}(x, y) = \sum_{i=1}^4 a_i \phi_i(x, y)$$

요소간의 경계선은 선형이고 중간 절점(c)가 모서리 절점 (a), (b)의 중점이므로

$$u(C) = \{u(a) + u(b)\} / 2 \text{가 된다.}$$

2. 2차 형상 함수 에서

$$U(x, y) \approx \check{U}(x, y) = \sum_{i=1}^8 a_i \phi_i(x, y)$$

요소 사이 경계선의 국부좌표계 형상 함수<sup>(9)</sup>는

$$\phi_2(\xi, \eta) = \frac{-1}{4} (1+\xi)(1-\eta)\eta$$

$$\phi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)\eta$$

$$\phi_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2)$$

가 된다.

이때 u(d), u(e)를 이웃하는 모서리 절점에서 해와는 관계식이

$$u(d) = 3/4 * u(c) + 3/8 * u(e) - 1/8 * u(b)$$

$$u(e) = 3/4 * u(c) + 3/8 * u(b) - 1/8 * u(a) \text{가 된다.}$$

## V. Numerical Results

본 논문에서  $\mu(2.25, 2.25)$ 의 허용오차는 0.02 이내 범위에서 해를 구해보았다.

미분방정식의 해석적 풀이를 통하여 그 해를 구하면 102.5156이다.

이에 대한 근사해를 개선 하기 위하여 매쉬 분할과 형상 함수의 차수를 높이는 경우 나누어 주었음을 고찰하였다.

### 1. 매쉬 분할에 따른 수렴성

문제의 전영역을 네개의 요소로 분할 할때 미지 절점 수는 한개가 되며 이때의 수치해는 -105.6979, 오차 0.030376으로 허용오차 범위를 초과하였다.

다시 매쉬 분할을 하여 요소수를 9로 할 경우 그 수치해가 -99.75로 오차는 0.026이 되었다.

한 단계 높여 요소수를 16개로 할 경우 그 수치해는 -103.492로 오차 0.0089가 되어 주어진 허용오차 범위내에서 해를 구할 수가 있었다.

이 경우 각자선 분할로 요소수를 증가시키면 미지 절점수가 기하급수적으로 증가하게 되고 이에 따른 유한요소 방정식의 변수가 급격히 증가하게 되므로 계산상의 오차 누중과 기억용량의 부족, 처리시간의 효율성이 떨어지게 된다.

모든 미지 절점수가 4개인 irregular 매쉬에서 수치해는 -104.848로 오차 0.01628로 해를 구할 수가 있다.

그러나 1 Irregular 매쉬 분할을 했을때의 결과는 미지절점수를 2개 하였을 때 오차 0.02979가 된다. 다음 미지절점 수 1개를 증가시키면 모든 허용오차 범위내에서 근사값을 구할 수가 있었다.

### 2. 형상함수 차수높임에 따른 수렴성

요소 수가 세개이고 미지 절점 수가 두개인 1 irregular 매쉬 분할에서 해는 -99.81668 상태 오차 0.02632이다.

요소 수 네개 미지 절점 수가 다섯개일 경우의 해는 -102.3423 상태오차 0.0169가 되어서 쌍선형 형상 함수와 비교하면 요소 수가 작은상태에서 기대하는 결과는 얻었다. 이상을 정리하여 보면 매쉬 분할 형태별 수치해는 <표 1>, 1 irregular 매쉬 상의 d.o.f.에 따른 수렴성은 (그림 5), 요소 수에 따른 p convergence는 (그림 6)이다.

표 1. numerical results

# of elements	unknown node	$u(2.25, 2.25)$	relative error	type of mesh refinement
* 4	1	-105.6979	0.030376	
* 9	4	-99.75	0.026977	
* 16	9	-103.492	0.0089	
** 9	4	-104.1848	0.01628	
*** 7	2	-105.5698	0.02979	
*** 10	4	-102.68	0.0016	
**** 3	2	-99.81668	0.02632	
**** 4	5	-102.3423	0.00169	

\* regular 매쉬 분할(bilinear shape function)  
 \*\* grid(irregular)매쉬 분할(bilinear shape function)  
 \*\*\* 1 irregular 매쉬 분할(bilinear shape function)  
 \*\*\*\* 2차 형상 함수

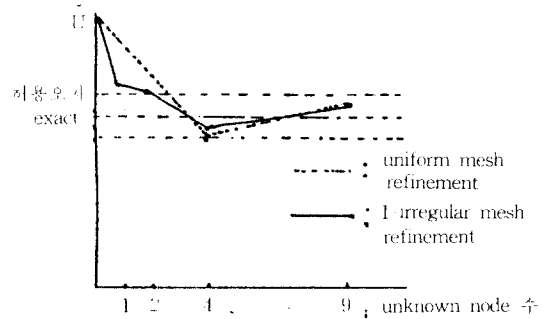


그림 5. 미지 절점수에 따른 pointwise convergence  
 Fig 5. Pointwise convergence as the number of unknown node increased

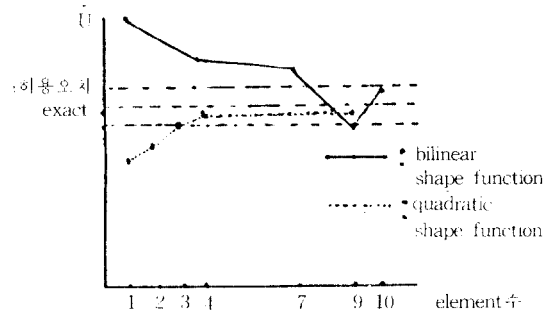


그림 6. 요소수에 따른 pointwise convergence  
 Fig 6. Pointwise convergence as the number of element in cresses

## VI. 결 론

본 논문에서 1-irregular 매쉬가 생성될때 나타나는 중간절점에서 연속성을 유지 시키기 위해서로 이웃한 모서리 절점에서 수치해와 관계식을 만들어 줌으로 이에 다른 오차가 발생되지 않게 되었다.

따라서 1-irregular 매쉬에 의한 conforming 요소를 생성시켜 미지 절점 수 증가 및 요소 수 증가에 따른 pointwise convergence를 각각 비교 분석 하였다.

그 결과 쌍선형 형상 함수를 사용할 경우, 미지 절점 수가 4개, 요소 수가 10개이고 2차

형상 함수를 사용할 경우, 미지 절점 수 5개, 요소 수 4개로서 절점은 증가되나 요소수는 감소된 상태에서 기대값을 구할 수 있었다.

그러므로, 1 irregular 매쉬 분할을 이용하여 권미분방정식의 수치해결 최소의 미지 절점수에 의한 유한요소법으로 구했다.

### 참 고 문 헌

1. R.J.Melosh "Finite Element Analysis convergence Curves", Finite Elements in Analysis and Design 7, pp. 115-121, 1990.
2. J. Tinsley Oden, "The Best FEM" Finite Elements in

- Analysis and Design 7, pp. 103-114, 1990.
3. David S. Burnett, Finite Element Analysis, Addison-Wesley Publishing Co., pp. 78-86, 1988.
4. Chandra Kant S.Desai and John F, Abel "Introduction to the Finite Element Method" Van Nostrand Reinhold Company pp.167-168 1972.
5. O.C.Zienkiewicz and K.Morgan, Finite Elements and Approximation, John Wiley & Sons, pp. 172-177, 315, 1983.
6. Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 6th Ed., John Wiley & Sons, pp. 1085-1091, 1988.
7. Leon Lapidus, George F. Pinder, Numerical Solution of Partial Differential Equation in Science and Engineering, John Wiley & Sons, pp. 90-97, 1982.



李 炯(Hyoung Lee) 正會員  
 1942年 11月 2日生  
 1964年 2月 : 서울대학교 師範大學 數學  
 科(理學士)  
 1971年 2月 : 成均館大學校 新營大學院  
 電算專士(管理學碩士)  
 1991年 9月 : 朝鮮大學校 電氣工學科  
 電算專士(博士課程)  
 1980年 9月 - 現在 : 崇實大學校 電算院  
 教授

羅 相 同(Sang-dong Ra) 正會員  
 1945年 2月 9日生  
 1968年 3月 : 朝鮮大學校 電氣工學科  
 (工學士)  
 1979年 9月 : 建國大學校 電子·電氣工學  
 科(工學碩士)  
 1991年 9月 : 同光大學校 電氣工學科  
 (博士課程)  
 1973年 3月 - 現在 : 朝鮮大學校 電氣工  
 學科 教授