

유전체주의 전자장 산란 해석

正會員 朴 東 熙\* 正會員 金 正 祺\*

An Analysis of Electromagnetic Field Scattering for the Dielectric Cylinders

Dong Hee PARK\*, Jung Ki KIM\* *Regular Members*

要 約

임의 단면을 갖는 도체 및 유전체주로 비추어진 TMz 산란 특성은 경계요소법으로 해석하였다. 경계요소 방정식은 Maxwell 방정식, 가중잔차 또는 Green 정리, 그리고 경계조건에 의해서 구성된다. 이때 경계상에서의 미지 표면장은 경계요소 접근 방정식으로 계산된다. 경계상에서 표면장이 구해지므로 무한공간에서 산란된 장과 산란폭은 쉽게 구할 수 있다. 해석된 예로써 완전도체 원형과 타원형 원통주, 그리고 유전체 원형과 타원형 원통주로부터의 평면파 산란을 수치적으로 해석하였다. 컴퓨터 프로그램은 2차요소(고차경계요소)와 Gaussian 구적법을 사용하여 향상시켰다.

ABSTRACT

The scattering property of TMz illuminated perfectly conducting and dielectric cylinders of arbitrary cross section are analyzed by the boundary element techniques. The boundary element equations are formulated via Maxwell's equations, weighted residual or Green's theorem, and the boundary conditions. The unknown surface fields on the boundaries are then calculated by the boundary element integral equations. Once the surface fields are found, the scattered fields in far-zone and scattering widths(SW) are readily determined. As examples, plane wave scattering from a perfectly conducting circular and elliptic cylinders, a dielectric circular and elliptic cylinders are numerically analyzed. A general computer program has been developed using the quadratic elements(higher order boundary elements) and the Gaussian quadrature.

I. 서 론

전자장 개방영역문제의 해석적 방법은 지난 수년

에 걸쳐 많은 연구가 진행되어 왔다. 임의의 두개의 서로 다른 매질사이에서 경계상의 표면전자장을 포함하도록 하는 방법은 Helmholtz 방정식과 Green 정리 및 잔차법에 의한 모멘트법을 사용하는 방법이 연구되었다. 이는 모두 표면적분방정식에 의한 해석으로서 경계조건을 만족하는 급수전개함수인 기적함수의 선택에 따라서 해의 정확도에 수렴하게 된다.<sup>1,2</sup>

\*中央大學校 電子工學科  
Dept. of Elec. Eng. Chungang Univ.  
論文番號 : 92-19(1991. 11. 15)

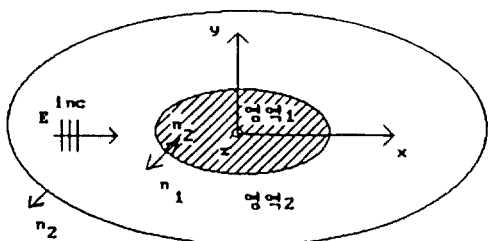
13.

본 논문에서는 유한요소법의 요소분할법을 표본적 분방정식에 적용하여 부분적인 요소영역에서 요소의 절점좌표와 함수값에 의해서 표현되는 2차형상함수를 사용한 경계요소법을 전자상산란 해석에 적용하였다. 자유공간에 놓인 임의의 형태를 갖는 도체 또는 유전체에 대한 두영역의 경계적분식에 관한 Cauchy주적분법을 Gaussian 근적분법을 사용하여 각각의 영역에서 만족한 행렬을 경계조건에 의해 조합하게 된다. 관측점과 원천점이 동일 위치에 놓여있는 경우에 있어서 Green함수 특이점을 제거하기 위해 특이점의 주위로 반경  $\delta \rightarrow 0$ 인 작은경로를 선택하므로 적분방정식내의 Hankel함수를 급수전개식으로 변환하게되는 번거로움이 뒤따르게 된다. 그러나 요소의 길이가 파장에 비하여 충분히 작은 경우에  $\delta \rightarrow 0$ 에 대한 의미로서 Gaussian근적분법을 적분방정식에 직접 적용하여도 Cauchy주적분해와 큰 오차가 없었다. 따라서 본 논문에서는 해석적 편의성에 맞추어 직접적으로 Gaussian 근적분법을 사용하였다.

최종수식에 대한 타당성과 유용성을 보이기 위하여 수치계산된 결과는 원통주의 반경이 각각 다른 경우에 대한 2차원 타원원통주 자체의 전란장을 계산하여 Balanis<sup>4</sup>와 비교하였다. 동일한 크기의 유전체 ( $\epsilon_r=2.0$ )인 경우에 대해서도 산란율을 구하였으며, 전자상산란의 다중매질분체로서 임의의 크기를 갖는 원형 및 타원원통형 원통도체의 유전체에 대한 산란율을 관측점의 각도 및 전질번호에 따라서 해석하였다.

### III. 전자계의 경계요소식

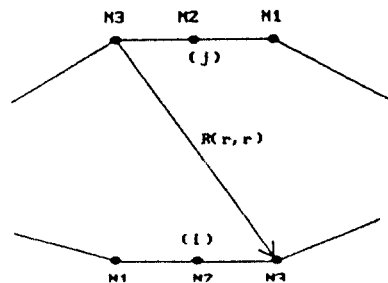
<그림 1.>에서와 같이 임의의 형태를 갖는 2차원 원통형 유전체주 문제에 대한 외부 전자계의 예로서 2매질로 이루어진 배영역을 고려한다.



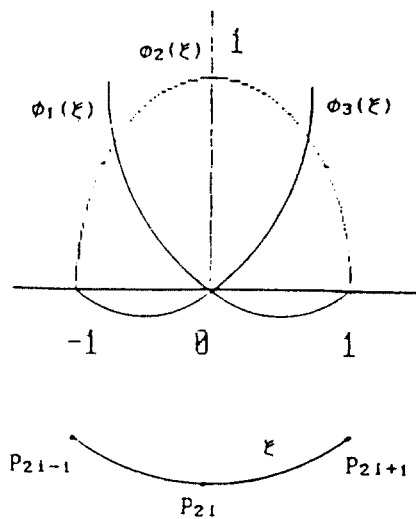
<그림 1.> 유전체를 포함한 2차원 배영역

영역1은 원통형 유전체주의 2차원영역이고, 영역2는 영역1을 제외한 나머지 2차원 외부영역을 나타낸다. 전자상 산란에 대해 내부영역(영역1)에서 모든 외부영역(영역2)에서 TM mode인 경우  $U=Ez$  그리고 TE mode인 경우  $U=Hz$ 로 놓는다. 전자상산란 문제를 해석하기 위해 Z축 방향으로 균일한 매질 문제에 대한 부정계장을 고려한다. 입사파는 E분극을 고려했으며, 원통주 Z축에 수직으로 입사하고 시간 규정EXP(jwt)을 가정한다. 내부영역에서 만족되는 경계분식은 다음과 같다(그림 2).

$$\text{curl} \times \int_V \frac{\partial G_0}{\partial n} U_0 dV - \int_V G_0 \frac{\partial U_0}{\partial n} dV \quad (1)$$



<그림 2.> 2차요소(J)와 점질 Ni, Nj 그리고 Nk와의 관계



<그림 3.> 2차원형상함수와 경계요소

여기서  $C_i$ 는  $(1-\theta/2\pi)$ 이고, 요소의 절점과 관측점은 경계  $\Gamma$ 상에 모두 존재 한다. 각각 영역의 경계  $\Gamma$ 에서 절점이 존재하도록 하며,  $U$ 와  $Q$ 는 경계의 요소로서 2차함수적으로 변화할 경우 다음과 같이 이산화된다<sup>13)</sup>.

고차요소(3 절점 2차요소)

$$C_i U_i + \sum_{\substack{j \neq N1, \\ j \neq N2, \\ j \neq N3}} \int_{\Gamma_j} U \dot{Q} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} U \dot{Q} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U \dot{Q} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_3} U \dot{Q} \, d\Gamma = \sum_{\substack{j \neq N1, \\ j \neq N2, \\ j \neq N3}} \int_{\Gamma_j} Q U \dot{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} Q U \dot{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} Q U \dot{d}\Gamma + \int_{\Gamma_3} Q U \dot{d}\Gamma \quad (2)$$

식(2)에서  $N1$ ,  $N2$  그리고  $N3$ 는 요소에 이웃한 절점과 요소중앙에서의 절점을 각각 나타낸다.

식(2)을 임의의 대표요소에 대한 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$C_i U_i + \sum_{j=1}^n h_{ij} \{ \begin{matrix} U_j \\ U_j^2 \\ U_j^3 \end{matrix} \}_e = \sum_{j=1}^n g_{ij} \{ \begin{matrix} Q_j \\ Q_j^2 \\ Q_j^3 \end{matrix} \}_e \quad (3)$$

식(3)에서  $n$ 는 요소의 총수이고  $U_1$ ,  $U_2$ , 및  $U_3$ 과  $Q_1$ ,  $Q_2$  및  $Q_3$ 는  $e$ 번째 대표요소의 3절점에서  $E$ 파 및  $H$ 파의 전자장값과 그 도함수값을 나타낸다.

식(3)에서 전체절점 및 요소에 대한 행렬식은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} U_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} Q_j, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$H_{ij} = \begin{cases} h_{N1,j} + h_{N3,j+1} & , j \neq N1, N3 \\ h_{N2,j} & , j \neq N2 \\ h_{N1,j} + h_{N3,j+1} + C_i & , j = N1, N3 \\ h_{N2,j} + C_i & , j = N2 \end{cases} \quad (5)$$

$$G_{ij} = \begin{cases} g_{N1,j} + g_{N2,j+1} \\ g_{N2} \end{cases} \quad (6)$$

식(4)에 의한 최종 요소행렬은 다음과 같다.

$$[H_e][U_e] = [G_e][Q_e] \quad \text{영역1} \quad (7)$$

TM mode인 경우 영역1에서 총전계를 정의하여 대표함수  $U_e$  및  $Q_e$ 로서 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} U_e &= U_{e,sc} + U_{e,in} \\ Q_e &= Q_{e,sc} + Q_{e,in} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 첨자  $in$ 는 영역1에서 정의된 성분을 의미하고, 그리고  $sc$ 와  $in$ 은 각각 산란과 입사를 의미한다. 영역2에서 지배방정식은 TM mode인 경우 경계에서 산란전계  $E$ 파를 사용하도록 정의한다. 외부 영역은 무경계장이 적용되는 영역으로서 다음과 같이 유도된다.

$$C_e U_e = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_e}{\partial n} U_e \, d\Gamma = \int_{\Gamma} G_e \frac{\partial U_e}{\partial n} \, d\Gamma \quad (9)$$

$C_e$ 는  $(1+\theta/2\pi)$ 이고, 기준 법선방향을 경계  $\Gamma$ 에서 밖으로 향하도록 하였으므로 외부영역에서 만족된 적분방정식의 부호는 내부 적분방정식의 부호에 반대 부호를 갖는다. 또한 요소의 절점과 관측점은 경계  $\Gamma$ 에 모두 존재한다.

복사조건은 입사파에 적용될 수 없으므로 경계요소식이 단지 유전체 경계면  $\Gamma$ 에서 적용되므로  $U_{e,in}$ 의 적분항은 삭제 되어 순수 산란상만이 존재한다. 식(2)와 동일한 방법으로 식(9)의 요소행렬식은 다음과 같다.

$$[H_e][U_e] = [G_e][Q_e] \quad \text{영역2} \quad (10)$$

여기서 첨자  $e$ 는 영역2에서 정의된 성분을 의미하고, 그리고 경계  $\Gamma$ 에서 다음과 같은 경계조건이 만족된다.

$$\begin{aligned} U_{e,sc} &= U_{e,sc} = U_{sc} \\ Q_{e,sc} &= Q_{e,sc} = Q_{sc} \end{aligned} \quad (11)$$

TM mode인 경우 입사파는 다음과 같다.

$$U_e^{inc} U_{e,in} = E_{z0,in} \exp(-jkR) \quad (12)$$

입사파의 좌표는 <그림 1>에서처럼 입사방향을 선택한다.

따라서 수직도함수에 의한 식은 다음과 같이 유도된다.

$$Q_{i,m} = \frac{\partial U_{i,m}}{\partial n_i} = -jk n_i \cdot \hat{n}_R U_{i,m} \quad (13)$$

$$\hat{n}_R = \hat{n}_x + \hat{n}_y$$

식(13)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$Q_{i,m} = B_i U_{i,m} \quad (14)$$

여기서  $B_i$ 는  $-jk n_i \cdot \hat{n}_R$ 이 된다.

식(7), (10) 그리고 식(14)에 의해 다음과 같은 전체 영역(1+2)에 대한 행렬식이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} H_i G_i \\ H_e G_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{sc} \\ Q_{sc} \end{bmatrix} = -U_{i,m} \begin{bmatrix} H_i G_i B_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

식(15)에 의해서 산란장은 입사파가 세서된 경계  $\Gamma$  상에서 계산된다. 무한한 자유공간에서 산란된 전자기장을 구하기 위해서는 영역2에서 만족되는 영역적 분식(16)에 식(15)에서 얻어진 표면전자기장을 대입하여 무한 공간에서 산란전자기장을 해석한다.

$$U_{sc} = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_e}{\partial n} U_{sc} d\Gamma - \int_{\Gamma} G_e \frac{\partial U_{sc}}{\partial n} d\Gamma \quad (16)$$

따라서 RCS는 다음과 같이 구한다[18].

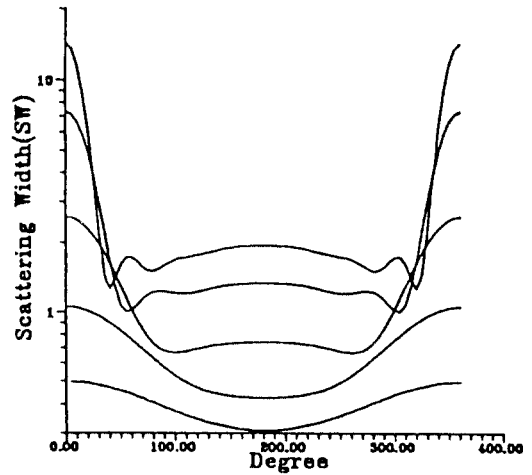
$$\sigma(\phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \left| \frac{E_z(r)}{E_z(r)} \right|^2 \quad (17)$$

유사한 방법으로 TEz 입사평면파에 대한 산란전자기장을 해석할 수 있다.

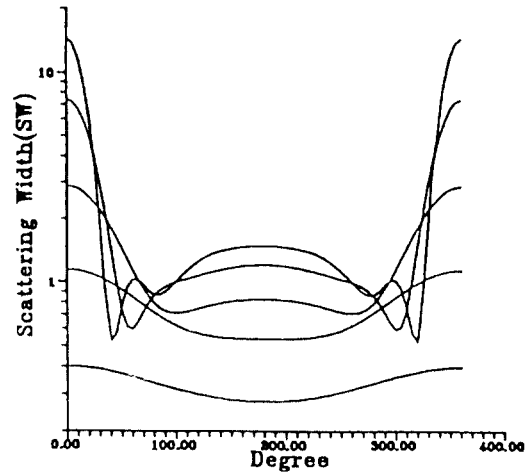
### III. 결과 및 고찰

원형 및 타원형인 완전도체와 유전체로부터의 평면전자기장 산란파는 다중분해를 갖는 경계요소법으로 고찰하였다. 입사파는 E파로서 음의 X축 방향에서 X축을 따라 진행 한다고 가정한다. 완전도체원통주의 2차원적 단면에 대해 각각의 반경변화에 따른 산란폭이 결과는 <그림 4.>에 나타내었으며, (a)는 해석적 방법에 의해 계산된 결과이고, (b)는 본 논문에서 제시된 경계요소법인 수치적 방법의 결과를 나타낸다. (b)의 그림에서 산란장의 무한기리는  $100\lambda$  이

상에서 관측점을 택하였다. 경계상의 전체 절점수는 72개로 선택했고 총요소수는 36개로 해석하였다.



(a)

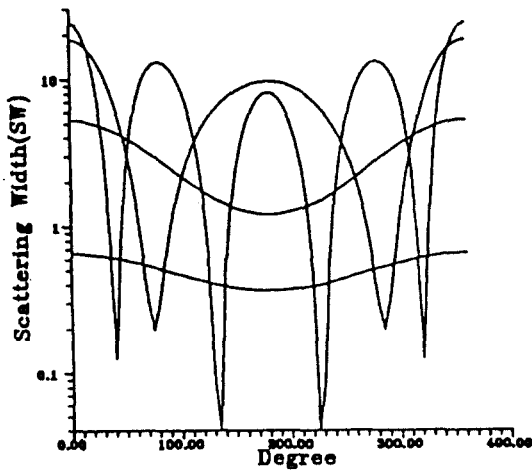


(b)

<그림 4.> 원통형 완전도체주( $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon_r = 1$ )의 2차원적 TMz bistatic 산란폭( $0^\circ \dots 360^\circ$ )  
a) 해석적 방법 b) 수치적 방법(BEM)

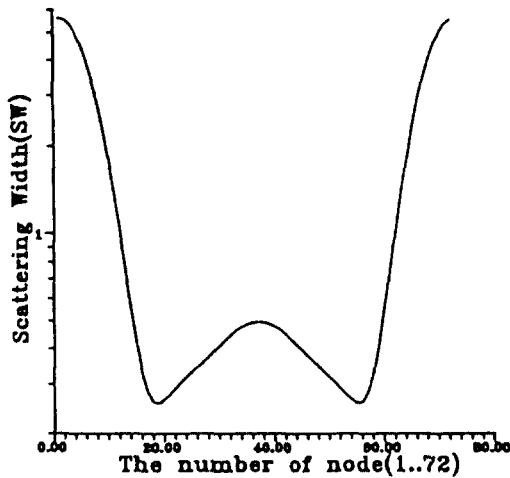
<그림 4.>에서 해석된 산란체와 같은 크기를 갖고 유전율  $\epsilon_r = 2.0$ 인 유전체주에 대한 산란폭의 수치적 결과는 <그림 5.>에서 나타내었다.

완전도체( $\sigma \rightarrow \infty$ )인 경우 반경  $a=b=1$ 인 원통주와 타원형( $a=3$ ,  $b=1$ )원통주인 경우에 대하여 그리고 같은 크기를 갖는 각각의 유전체주에 대한 2차원적



〈그림 5.〉 원통형 유전체주( $\epsilon_r=2.0$ )의 2차원적  $TM_z$  bistatic 산란폭( $0^\circ \dots 360^\circ$ )

$TM_z$  bistatic 산란폭의 수치적 결과는 총 절점수 72개에 대한 절점번호 순서에 따라 〈그림 6.〉에 나타내었다.



(a)

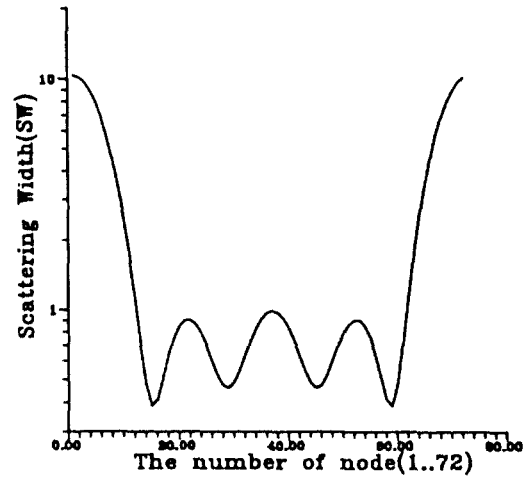
〈그림 6.〉 완전도체( $\epsilon_r=1.0$ ) 및 유전체( $\epsilon_r=4.0$ )인 경우 원형( $a=b=1$ )과 타원형( $a=3, b=1$ ) 원통주의 원주 절점에 의한 2차원적  $TM_z$  bistatic 산란폭( $\sigma/\pi(ab)^{1/2}$ ) 절점수(1..72)

(a) 완전도체 원형 원통주( $\mu_r=1.0, \epsilon_r=1.0$ )

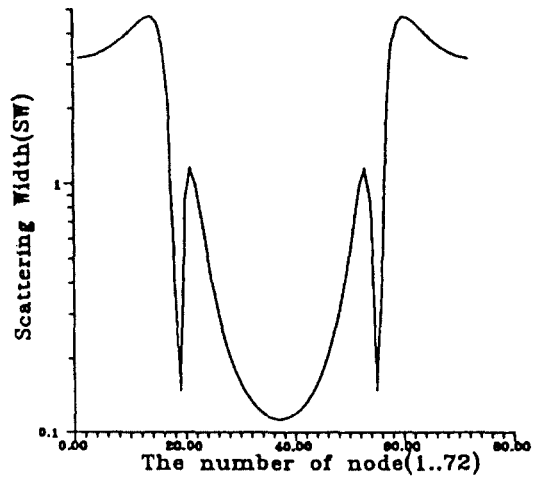
(b) 유전체 원형 원통주( $\mu_r=1.0, \epsilon_r=4.0$ )

(c) 완전도체 타원형 원통주( $\mu_r=1.0, \epsilon_r=1.0$ )

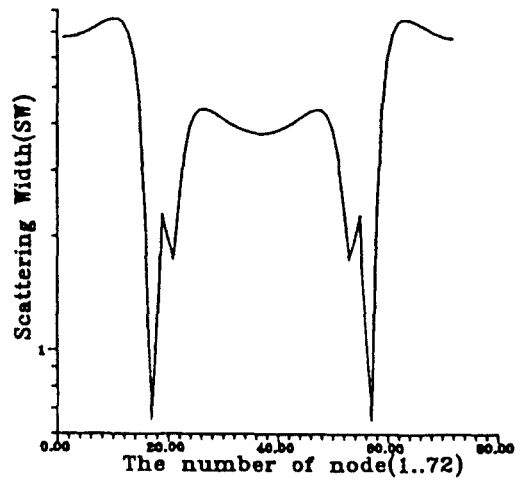
(d) 유전체 타원형 원통주( $\mu_r=1.0, \epsilon_r=4.0$ )



(b)



(c)



(d)

#### IV. 결 론

본 논문은 경계요소법에 의한 개방형의문체 및 다중매질문제에 대한 전자기장 해석방법으로서 Green 함수의 특이점을 갖는 경우에 Cauchy 수치장분 자체에 Gaussian 근적분과 2차형 상함수를 적용하여 계산된 수치적 결과와 해석적 결과를 비교하여 다양성을 입증하였다. 본 방법의 응용으로서 어리크기를 갖는 원진도체 및 유진체에 대해 평면파 전자기장산란해를 해석 하였다. 2차형상함수 이상의 고차형상함수를 이용한 2중 이상의 다중매질 문제로의 전자기장 산란연구의 확장이 요구된다.

#### References

1. B.H.Mcdonald and A.Wexler, "Finite Element Solution of Unbounded Field Problems," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT 20, pp.841-847, Dec. 1972
2. S.Washisu and I.Fukai and M.Suzuki, "Extension of Finite Element Method to Unbounded Field Problems" Electron.Lett., Vol.15, pp. 772-774, Nov.1979

3. TE Kao Wu and Leonard L.Tsai, "Scattering by Arbitrary cross-sectioned Layered Lossy Dielectric Cylinders," IEEE trans. Antennas Propagat., Vol.25, pp.518-524, July 1977
4. Ken'ichiro Yashiro and Sumio Ohkawa, "Boundary Element Method for Electromagnetic Scattering from Cylinders," IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.33, pp.383-389, April 1985
5. C.A.Brebbia and S.Walker, Boundary Element Techniques in Engineering, London : Butterworth, 1980
6. C.A.Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley & Sons, 1989, ch.11
7. J.M.Jin and V.V.Liepa, "Application of Hybrid Finite Element Method to Electromagnetic Scattering from Coated Cylinders", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.36, pp.50-54, Jan. 1988
8. Ichluko Toyoda, Masanori Matsuhara, and Nobuaki Kumagai, "Extended Integral Equation Formulation for Scattering Problems from a Cylindrical Scatterer", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol.36, pp.1580-1586, Nov.1988



朴東熙(Dong Hee PARK) 正會員  
 1959年 8月 6日生  
 1985年 2月 : 清州大學校電子工學科 卒業  
 1987年 2月 : 中央大學校 大學院 電子工學科 (工學碩士)  
 1988年 3月 ~ 現在 : 中央大學校 大學院 電子工學科 博士過程



金正祺(Jung Ki KIM) 正會員  
 1942年 5月 5日生  
 1965年 2月 : 延世大學校電氣工學科 卒業  
 1969年 2月 : 延世大學校大學院電氣工學科(工學碩士)  
 1975年 2月 : 延世大學校大學院電氣工學科(工學博士)  
 1970年 3月 ~ 1977年 2月 : 光云工科大学 副教授  
 1977年 3月 ~ 現在 : 中央大學校電子工學科 教授  
 1982年 12月 ~ 1983年 12月 : 美京連大學校 客員教授