

통신망의 신뢰도계정을 위한 근사방법에 관한 연구

正會員 金 榮 憲* 正會員 吳 英 煥*

A study on the bounding method for computing the reliability of communication networks

Young Hun Kim*, Young Hwan Oh* *Regular Members*

要 約

통신망의 신뢰도 계정을 하는데 있어서 대형망에서는 소자(component)들의 증가로 인한 계산상 어려움과 복잡성 때문에 NP-hard 문제가 발생한다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 본 논문에서는 통신망의 시점(source node)과 종점(terminal node)간에 상한과 하한 근사 신뢰도를 구하는 알고리즘을 제시하였다. 계정 절차는 우선, 최소 경로집합(minimal pathset)과 최소 컷세울(minimal cutset)을 구한다. 그 다음, 소자의 수가 동일한 사상(pathset, cutset)끼리 분리한후 공통변수(common variable)를 추출한 부분함수를 구하여 근사 신뢰도를 계정하였다. 또한 본 논문에서 제시한 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 Esary-Proschan, Shogan과 Gopal의 대칭망 알고리즘과 비교하였다.

ABSTRACT

It has been established that the reliability of communication networks is NP hard problem owing to computationally and complexity as the number of componeuts is increased in large networks. This paper proposed an algorithm for determining upper and lower bounds on the reliability of source-to-terminal in communication networks to solve this problem. The evaluation method follows the next procedures. First, minimal pathset and minimal cutset are serched. Second, it is sorted that the number of components is the same events and the reliability bounds is evaluated by the section function to extract common variable. The performance of propesed algorithm is also estimated as compared to the reliability of Esary-Proschan, Shogan and Gopal.

I. 서 론

통신망은 통신국으로서의 단점(vertex)과 전송로는 지로(edge)로 표현되는 확률적 그래프 $G(V, E)$

로 나타내어진다. 또한 통신망의 신뢰도는 통신망상에서 시점과 종점간에 적어도 하나의 단순경로가 존재할 경우 단순경로를 구성하는 각 소자(component)를 지로의 상태를 나타내는 확률변수로 대체하면 단점간(terminalpair) 통신할 수 있는 확률값으로 구하여질 수 있다.

일반적으로, 통신망의 신뢰도계정을 하는데 있어서 두가지 방법 즉 정확한(exact) 신뢰도를 구하는

*光云大學校 電子通信工學科
Dept. of Telecommunication Engineering
Kwang Woon Univ.
論文番號: 92-60(接受1992. 1. 6)

방법과 근사(bound)적인 신뢰도를 구하는 방법이 있다. 그러나 정확한 신뢰도를 구하는 방법[1, 2, 3]들은 통신망의 크기가 커짐에 따라 즉 변수의 증가로 인해 계산량이 지수함수적으로 증대 된다는 단점을 지니고 있다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위한 일환으로 근사값을 구하는 방법에 관한 관심이 대두되었고 많은 연구가 이루어지고 있다. Esary와 Proschan[4]은 경로와 컷셋을 이용하여 망의 상한(upper)과 하한(lower) 근사 신뢰도를 계산상 빠르고 간단히 구하는 방법을 제시하였으나 정확한 값과의 편차율이 매우 크므로 신뢰도값의 추정도가 낮아지는 단점이 있다. Shogan[5]은 그래프를 부분집합(subset)으로 분리하여 알고리즘을 반복적으로 적용하였는데 이 방법은 [4]의 편차율 문제를 해결하였으나 이 방법은 비평면(non planar)망에 존재하지 않는 이중망(dual network) 방식이 필요하므로 비평면망에는 적용할 수 없는 문제점이 있다. 이에 Gopal[6]은 평면과 비평면망 모두에 적용할 수 있도록 하였다. 그리고 최소경로와 최소컷셋의 식에서 공통변수(common variable)를 연속적으로 추출하여 논리식을 구한 후 신뢰도 계정을 하였으므로 정확한 신뢰도에 보다 접근하도록 하는 논리식 전개상의 중복성을 제거하는 알고리즘을 제시하였다. 그러나 이 방법은 비대칭망(asymmetric network)에서는 하한 근사신뢰도를 구하는 방법을 적용할 수 없는 제한성이 있으므로 본 논문에서는 최소경로와 최소컷셋에 대해 변수 분리법과 공통다수함수식을 이용하여 대칭망 뿐 아니라 비대칭망에서도 근사신뢰도 계정을 가능하게 하였다.

II. 근사 신뢰도 계정에 관한 이론

1. 가정 및 기호

(1) 가정

- 1) 통신망을 구성하는 모든 소자는 항상 작동 상태에 있다.
- 2) 통신 시스템을 나타내는 단점의 신뢰도는 1이고, 전송로를 나타내는 지로의 상태는 통계적 독립(statistical independent)이다.
- 3) 그래프는 자기루프(self loop)와 방향성 주기(cycle)를 형성하지 않는다.
- 4) 그래프상의 지로는 방향성 또는 비방향성으로 표시된다.
- 5) 지로를 나타내는 기호는 지로에 해당하는 확률변

수로 사용한다.

- 6) 모든 지로의 확률값은 동일하다고 가정한다.
 - 7) 단순경로는 시점과 종점간에 지로를 한번 이상 경유하지 않는 단점과 지로의 직렬조합으로 구성된다.
 - 8) 최소 컷셋은 시점과 종점간에 단순경로를 결코 형성할 수 없다.
 - 9) 시점과 종점을 기준으로하여 그래프를 상측면과 하측면으로 분리하였을 때 양측면이 동일할 경우 대칭망(symmetric network)이라 하며, 그렇지 않을 경우 비대칭망(asymmetric network)이라 한다.
- (2) 기호
- 1) V_i, E_i : i 번째의 단점, i 번째의 지로
 - 2) V_s, V_t : 시점, 종점
 - 3) X_i, X_i' : 지로 E_i 의 성공, 실패를 나타내는 확률변수
 - 4) T, T' : 모든 최소경로, 최소컷셋을 구성하는 상태 집합
 - 5) g, g' : i 개의 확률변수를 갖는 최소경로와 최소컷셋의 집합
 - 6) G, G' : g 와 g' 를 결합한 집합, g' 와 g' 를 결합한 집합
 - 7) S_i, F_i : 공통변수 추출을 위해 결합된 사상의 성공과 실패함수
 - 8) p, q : 지로의 성공, 실패 확률값
 - 9) $pr(S_i), Pr(F_i)$: S_i 와 F_i 의 확률값
 - 10) $R_e(P)$: 통신망의 정확한 신뢰도
 - 11) $R_u(P), R_l(P)$: 상한 근사 신뢰도, 하한 근사 신뢰도

2. 기본 이론

(1) 최소 경로집합(minial pathset)

최소 경로집합은 시스템은 동작하기 위한 소자들의 최소집합을 뜻한다. A_1, A_2, \dots, A_n 를 시스템에서 최소 경로집합이라 가정하면 j 번째 최소 경로집합의 동작 상태함수 $a_j(x)$ 를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$a_j(x) = \begin{cases} 1, & A_i \text{의 모든 소자가 동작하는 경우} \\ 0, & \text{그렇지 않을 경우} \end{cases}$$

$$= \prod_{i \in A_j} x_i$$

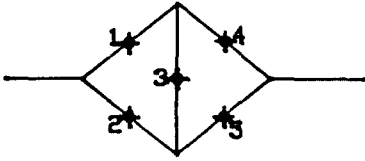


그림 1. 브릿지망
Fig. 1. bridge network.

이것은 적어도 하나의 최소 경로집합의 모든 소자가 동작해야만 시스템은 동작할 수 있다는 것을 의미한다. 그러므로 시스템의 상태함수를 $\Phi(x)$ 라고 하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, \text{ 어떤 } j \text{ 에 대해 } a_j(x) = 1 \text{ 인 경우} \\ 0, \text{ 모든 } j \text{ 에 대해 } a_j(x) = 0 \text{ 인 경우} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{마찬가지로, } \Phi(x) &= \text{MAX}_j a_j(x) \\ &= \text{MAX}_j \prod_{i \in A_j} x_i \end{aligned} \quad (1)$$

$a_j(x)$ 는 j 번째 최소 경로집합의 소자에 관한 직렬구조(series structure)함수이기 때문에 식(1)은 그림 1의 브릿지망을 그림 2와 같이 직렬구조시스템을 병렬배열로 표현할 수 있다.

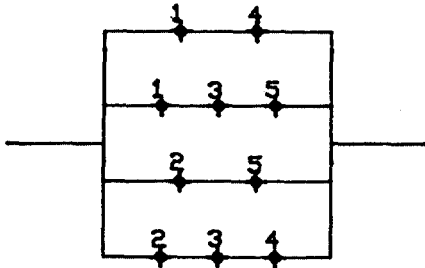


그림 2. 병렬배열로 표현된 직렬구조 시스템
Fig. 2. A system represented as a parallel arrangement of series structure system.

(2) 최소 컷셋(minimal cutset)

최소 컷셋은 시스템의 실패를 유발하는 소자들의

최소집합이다.

C_1, C_2, \dots, C_k 를 시스템상에서 최소 컷셋이라 하면 j 번째 최소 컷셋의 상태함수 $b_j(x)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$b_j(x) = \begin{cases} 1, j \text{ 번째 최소 컷셋에서 적어도 하나 이상의 소자가 작동하는 경우} \\ 0, j \text{ 번째 최소 컷셋의 모든 소자가 작동하지 않는 경우} \end{cases}$$

$$= \text{MAX}_{i \in C_j} x_i$$

따라서 적어도 하나의 최소 컷셋상에 모든 소자가 작동하지 않아야만 시스템은 작동하지 않는다. 이때 시스템의 상태함수 $\Phi(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \prod_{j=1}^k b_j(x) = 1 \\ &= \prod_{j=1}^k \text{MAX}_{i \in C_j} x_i \end{aligned} \quad (2)$$

$b_j(x)$ j 번째 최소 컷셋의 소자에 관한 병렬구조(parallel structure) 함수 이므로 식(2)는 그림 1의 브릿지망을 그림 3 같이 병렬구조시스템을 직렬배열로 나타낼 수 있다.

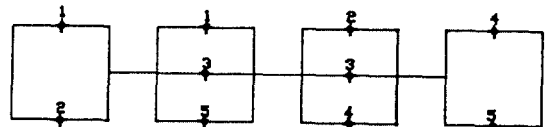


그림 3. 직렬배열로 표현된 병렬구조 시스템
Fig. 3. A system represented as a series arrangement of parallel structure system.

(3) 상한과 하한 근사신뢰도 관계식

A_1, A_2, \dots, A_n 를 최소 경로집합이라 하면 사건 D_i ($i=1, 2, \dots$)는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$D_i = \{A_i \text{에서 적어도 하나의 소자가 실패하는 경우}\}$
이것은 각각의 최소 경로집합에서 적어도 하나의 소자가 실패해야만 그 시스템이 실패하므로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$1-r(P) = P(D_1 D_2 \dots D_s) \\ = P(D_1)P(D_2|D_1) \dots P(D_s|D_1 D_2 \dots D_{s-1}) \quad (3)$$

윗식은 A_1 에서 최소한 하나의 소자가 실패한다면 A_2 에서 최소한 하나의 소자가 실패하는 확률은 증가함을 의미한다.

따라서,

$$P(D_2|D_1) \geq P(D_2) \quad (4)$$

이 부등식을 증명하면 다음과 같다.

$$P(D_2) = P(D_2|D_1)P(D_1) + P(D_2|D_1^c) (1-P(D_1)) \quad (5)$$

윗식에서,

$$P(D_2|D_1^c) = P\{A_2 \text{에서 적어도 하나가 실패하는} \\ \text{경우} | A_1 \text{에서 모두 동작하는 경우}\} \\ = 1 - \prod_{\substack{j \in A_2 \\ j \notin A_1}} p_j \\ \leq 1 - \prod_{j \in A_2} p_j \\ = P(D_2)$$

그러므로 (5)식으로부터,
 $P(D_2) \leq P(D_2|D_1)P(D_1) + P(D_2) (1-P(D_1))$
 또는 $P(D_2|D_1) \geq P(D_2)$ 마찬가지로, $P(D_i|D_1 D_2 \dots D_{i-1}) \geq P(D_i)$

따라서 (3)식에 의하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$1-r(P) \geq \prod_i P(D_i) \quad \text{또는} \quad r(P) \leq 1 - \prod_i (1 - \prod_{j \in A_i} p_j)$$

C_1, C_2, \dots, C_r 를 최소 컷셋이라 하면 사건 U_1, U_2, \dots, U_r 를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$U_i = \{C_i \text{에서 최소한 하나의 소자가 동작하는 경우}\}$$

그러므로 사건 U_i 모두가 성공해야만 그 시스템은 동작한다.

$$r(P) = P(U_1 U_2 \dots U_r) \\ = P(U_1)P(U_2|U_1) \dots P(U_r|U_{r-1}) \\ \geq \prod_i P(U_i)$$

윗식에 의하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$r(P) \geq \prod_i [1 - \prod_{j \in C_i} (1 - p_j)]$$

따라서 신뢰도 함수에 대한 다음의 근사값을 갖는다.

$$\prod_i [1 - \prod_{j \in C_i} (1 - p_j)] \leq r(P) \leq \prod_i (1 - \prod_{j \in A_i} p_j) \quad (6)$$

(6)식은 상한 근사 신뢰도가 최소 경로집합에서 많은 중복성이 없다면 $r(P)$ 에 근접하며, 하한 근사 신뢰도는 최소 컷셋에서 많은 중복성이 없다면 $r(P)$ 에 근접함을 의미한다.

III. 알고리즘

본 논문에서 상한과 하한 근사신뢰도를 구하기 위하여 다음의 알고리즘을 제시한다.

1. 상한 근사신뢰도 계정에 관한 알고리즘

[단계1] 그래프의 시점과 종점간 단순경로의 집합인 타이셋을 구한다.

[단계2] 동일한 변수(edge)로 구성된 단순경로간을 분리하여 각각의 집합 g_i 로 정렬 시킨다.

[단계3] 각 집합 g_i 를 결합하여 G_1 를 구한다.
 : 정렬된 집합중에서 가장 많은 사상(simple path)이 존재하는 두 집합을 선택하여 하나의 집합으로 구성한다.

[단계4] 두 사상을 결합하여 S_i 를 구한다.
 : G_1 에서 큰차수와 작은차수의 사상간을 결합을 하여 변수의 수가 동일한 각각의 S_i 를 구하며, 공변수를 추출하여 S_i 를 재구성한다. 그리고 G_1 에서 결합을 이루지 못한 사상을 다시 g_i 로 한다.

단, 결합시 가능한 공변수가 많이 존재하는 사상간을 결합한다.

[단계5] 나머지 g_i 에서 다수의 사상이 존재하는 집합을 우선순위로 하여 G_2 를 구하며, 최종적으로 g_i 가 단지 하나의 사상이 존재하도록 [단계3]과 [단계4]를 반복한다. 즉 사상이 두개이상 존재하는 집합간을 결합하는 것이다.

[단계6] 공변수가 존재하지 않으므로 인해서 [단계5]에서 결합을 이루지 못한 각 사상들을 다시 정렬시킨뒤 작은차수의 사상에서 큰 차수의 사상순으로 비교하여 공변수가 존재할 경우 결합하여 S_i 를 구하고 공변수가 없는 경우는 그 자체가 S_i 가 된다.

[단계7] 상한 근사신뢰도 계정
: 모든항이 통계적으로 독립이라 가정 하였을 때 다음의 확률식에 의해서 전체 성공함수 S를 변형하여 신뢰도를 계정한다.

$$T_1 = t_1 t_2 \text{ 이면 } P_r(T_1) = p_1 p_2 \quad (7)$$

그리고

$$T_2 = t_1 + t_2 \text{ 이면 } P_r(T_2) = 1 - (1 - p_1) (1 - p_2) \quad (8)$$

2. 하한 근사신뢰도 계정에 관한 알고리즘

하한 근사신뢰도 알고리즘은 상한 근사신뢰도 알고리즘의 계정절차와 유사하므로 각 단계에 대한 부연 설명은 생략하였다.

[단계1] 그래프상의 단순경로들에 대해서 보수 연산을 하여 최소 컷셋을 구한다.

[단계2] 동일한 변수로 구성된 최소 컷셋을 분리하여 각각의 집합 g_i 으로 정렬시킨다.

[단계3] 각 집합 g_i 를 결합하여 G_1 를 구한다.

[단계4] 두 사상을 결합하여 F_1 를 구한다.

[단계5]와 [단계6] g_i , G_2 그리고 S_i 를 g_i , G_2' 그리고 F_i 로 대치하면 상한근사 신뢰도 알고리즘의 [단계5]와 [단계6]과 동일하다.

[단계7] 하한 근사신뢰도 계정

: 모든항이 통계적으로 독립이라 가정 하였을 때 다음의 확률식에 의해서 전체 실패함수 F를 변형하여 신뢰도를 계정한다.

$$T_1 = t_1 t_2 \text{ 이면 } P_r(T_1) = q_1 q_2 \quad (9)$$

그리고

$$T_2 = t_1 + t_2 \text{ 이면 } P_r(T_2) = 1 - (1 - q_1) (1 - q_2) \quad (10)$$

IV. 신뢰도 계산에

그림 4 와 같은 대칭망 그래프에 상한과 하한 근사신뢰도 알고리즘을 적용하면 다음과 같다.

1. 상한 근사신뢰도

1) [단계1]에 의해서 그림 4 에서 단순경로를 구한다.

$$T = \{X_3 X_9 X_{12}, X_3 X_9 X_{10} X_{11}, X_2 X_8 X_{12}, X_2 X_8 X_{10} X_{11}, X_2 X_7 X_{11}, X_2 X_7 X_{10} X_{12}, X_2 X_5 X_9 X_{12},$$

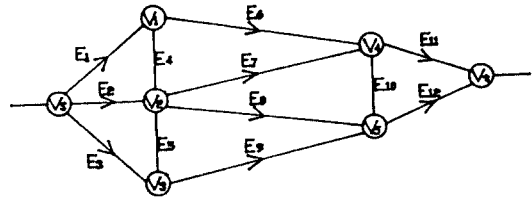


그림 4. 대칭망 그래프

Fig. 4. Symmetric network .

$$X_2 X_5 X_9 X_{10} X_{11}, X_3 X_5 X_7 X_{11}, X_3 X_5 X_7 X_{10} X_{12}, X_3 X_5 X_8 X_{10} X_{11}, X_3 X_5 X_8 X_{12}, X_1 X_6 X_{11}, X_1 X_6 X_{10} X_{12}, X_2 X_4 X_6 X_{11}, X_2 X_4 X_6 X_{10} X_{12}, X_3 X_4 X_5 X_6 X_{11}, X_3 X_4 X_5 X_6 X_{10} X_{12}, X_1 X_4 X_5 X_{12}, X_1 X_4 X_7 X_{11}, X_1 X_4 X_7 X_{10} X_{12}, X_1 X_4 X_{10} X_8 X_{11}, X_1 X_4 X_5 X_9 X_{12}, X_1 X_4 X_5 X_9 X_{10} X_{11} \}$$

2) [단계2]를 적용하면 g_5 는 다음과 같다.

$$g_3 = \{ X_3 X_9 X_{12}, X_2 X_8 X_{12}, X_2 X_7 X_{11}, X_1 X_6 X_{11} \}$$

$$g_4 = \{ X_3 X_9 X_{10} X_{11}, X_2 X_8 X_{10} X_{11}, X_2 X_7 X_{10} X_{12}, X_2 X_5 X_9 X_{12}, X_3 X_5 X_7 X_{11}, X_3 X_5 X_8 X_{12}, X_1 X_6 X_{10} X_{12}, X_2 X_4 X_6 X_{11}, X_1 X_4 X_5 X_{12}, X_1 X_4 X_7 X_{11} \}$$

$$g_5 = \{ X_2 X_5 X_9 X_{10} X_{11}, X_3 X_5 X_7 X_{10} X_{12}, X_3 X_5 X_8 X_{10} X_{11}, X_2 X_4 X_6 X_{10} X_{12}, X_3 X_4 X_5 X_6 X_{11}, X_1 X_4 X_7 X_{10} X_{12}, X_1 X_4 X_{10} X_8 X_{11}, X_1 X_4 X_5 X_9 X_{12} \}$$

$$g_6 = \{ X_3 X_4 X_5 X_6 X_{10}, X_{12}, X_1 X_4 X_5 X_9 X_{10}, X_{11} \}$$

3) [단계3]을 이용하면 G_1 은 g_4 와 g_5 의 합집합이 된다.

$$G_1 = \{ X_3 X_9 X_{10} X_{11}, X_2 X_8 X_{10} X_{11}, X_2 X_7 X_{10} X_{12}, X_2 X_5 X_9 X_{12}, X_3 X_5 X_7 X_{11}, X_3 X_5 X_8 X_{12}, X_1 X_6 X_{10} X_{12}, X_2 X_4 X_6 X_{11}, X_1 X_4 X_7 X_{11}, X_2 X_5 X_9 X_{10} X_{11}, X_3 X_5 X_7 X_{10} X_{12}, X_3 X_5 X_8 X_{10} X_{11}, X_2 X_4 X_6 X_{10} X_{12}, X_3 X_4 X_5 X_6 X_{11}, X_1 X_4 X_7 X_{10} X_{12}, X_1 X_4 X_{10} X_8 X_{11}, X_1 X_4 X_5 X_9 X_{12} \}$$

4) [단계4]를 적용하여 G_1 의 S_i 를 구한다.

$$S_1 = X_3 X_9 X_{10} X_{11} + X_2 X_5 X_9 X_{10} X_{11} = X_9 X_{10} X_{11} (X_3 + X_1 X_5)$$

$$S_2 = X_2 X_8 X_{10} X_{11} + X_3 X_5 X_8 X_{10} X_{11} = X_8 X_{10} X_{11} (X_2 + X_3 X_5)$$

$$S_3 = X_2 X_7 X_{10} X_{12} + X_3 X_5 X_7 X_{10} X_{12} = X_7 X_{10} X_{12} (X_2 + X_3 X_5)$$

$$S_4 = X_2 X_5 X_9 X_{12} + X_1 X_4 X_5 X_9 X_{12} = X_5 X_9 X_{12} (X_2 + X_1 X_4)$$

$$S_5 = X_3 X_5 X_7 X_{11} + X_3 X_4 X_5 X_6 X_{11} = X_3 X_5 X_{11} (X_7 + X_4 X_6)$$

$$S_6 = X_2X_4X_6X_{11} + X_2X_4X_6X_{10}X_{12} = X_2X_4X_6(X_{11} + X_{10}X_{12})$$

$$S_7 = X_1X_4X_5X_{12} + X_1X_4X_7X_{10}X_{12} = X_1X_4X_{12}(X_5 + X_7X_{10})$$

$$S_8 = X_1X_4X_7X_{11} + X_1X_4X_8X_{10}X_{11} = X_1X_4X_{11}(X_7 + X_8X_{10})$$

5) 나머지는 g_3, g_6 와 G_1 에서 결합을 이루지 못한 잔여사상이 존재하는 g_4 이므로 [단계5]에 의하여 G_2 는 다음과 같다.

$$G_2 = g_3 \cup g_4$$

$$= \{ X_3X_9X_{12}, X_2X_8X_{12}, X_2X_7X_{11}, X_1X_6X_{11}, X_3X_5X_8X_{12}, X_1X_6X_{10}X_{11} \}$$

따라서 G_2 의 S_i 는 다음과 같다.

$$S_9 = X_3X_9X_{12} + X_3X_5X_8X_{12} = X_3X_{12}(X_9 + X_5X_8)$$

$$S_{10} = X_1X_6X_{11} + X_1X_6X_{10}X_{12} = X_1X_6(X_{11} + X_{10}X_{12})$$

그리고 G_3 는 g_6 와 G_2 의 잔여사상 g_3 와 결합을 이룬다.

$$G_3 = \{ X_2X_8X_{12}, X_2X_7X_{11}, X_3X_4X_5X_6X_{10}X_{12}, X_1X_4X_5X_9X_{10}X_{11} \}$$

G_3 의 S_i 는 다음과 같다.

$$S_{11} = X_2X_8X_{12} + X_3X_4X_5X_6X_{10}X_{12} = X_{12}(X_2X_8 + X_3X_4X_5X_6X_{10})$$

$$S_{12} = X_2X_7X_{11} + X_1X_4X_5X_9X_{10}X_{11} = X_{11}(X_2X_7 + X_1X_4X_5X_9X_{10})$$

6) 더이상 사상이 존재하지 않으므로 [단계6]을 적용할 수 없다.

7) [단계7]을 적용하여 상한 근사신뢰도를 결정한다.

(1) 식에 의하여,

$$Ru(P) = 1 - (1 - Pr(S_1)) (1 - Pr(S_2)) (1 - Pr(S_3)) (1 - Pr(S_4)) (1 - Pr(S_5)) \times 1 - (1 - Pr(S_6)) (1 - Pr(S_7)) (1 - Pr(S_8)) (1 - Pr(S_9)) (1 - Pr(S_{10})) \times 1 - (1 - Pr(S_{11})) (1 - Pr(S_{12})) \quad (11)$$

그런데 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = S_9 = S_{10}$ 그리고 $S_{11} = S_{12}$ 이므로 식(11)은 다음과 같이 된다.

$$Ru(P) = 1 - (1 - Pr(S_1))^8 (1 - Pr(S_2))^2 (1 - Pr(S_3))^2 \quad (12)$$

식(7)과 (8)에 의하여,

$$Pr(S_1) = p^2 \{ 1 - (1 - p)(1 - p) \},$$

$$Pr(S_9) = p^2 \{ 1 - (1 - p)(1 - p^2) \},$$

$$Pr(S_{11}) = p \{ 1 - (1 - p)(1 - p^5) \} \quad (13)$$

$$\therefore Ru(P) = 1 - [1 - p^2 \{ 1 - (1 - p)(1 - p)^2 \}]^8 [1 - p^2 \{ 1 - (1 - p)(1 - p)^2 \}]^2 \times [1 - \{ 1 - p(1 - p^2)(1 - p^5) \}]^2 \quad (14)$$

지로의 확률 값이 0.9이면, $Ru = (p=0.9) = 0.999999$

2. 하한 근사신뢰도

1) [단계1]에 의하여 최소컷셋을 구한다.

$$T' = \{ X_{11}'X_{12}', X_{10}'X_8'X_9'X_{11}', X_3'X_5'X_8'X_{11}', X_7'X_8'X_9'X_6', X_3'X_5'X_7'X_8'X_6', X_7'X_{10}'X_{12}'X_6', X_1'X_2'X_5'X_9', X_1'X_7'X_9'X_8'X_4, X_1'X_3'X_5'X_7'X_8'X_4', X_1'X_7'X_{10}'X_{12}'X_4', X_2'X_3'X_4'X_6', X_2'X_5'X_9'X_4'X_6' \}$$

2) [단계2]를 적용하면 g' 은 다음과 같다.

$$g_2' = \{ X_{11}'X_{12}' \} \quad g_3' = \{ X_1'X_2'X_3' \}$$

$$g_4' = \{ X_{10}'X_8'X_9'X_{11}', X_7'X_8'X_9'X_6', X_7'X_{10}'X_{12}'X_6', X_1'X_2'X_5'X_9', X_2'X_3'X_4'X_6' \}$$

$$g_5' = \{ X_3'X_5'X_7'X_8'X_6', X_3'X_5'X_8'X_{10}'X_{11}', X_1'X_7'X_8'X_9'X_4', X_1'X_7'X_{12}'X_{10}'X_4', X_2'X_5'X_9'X_4'X_6' \}$$

$$g_6' = \{ X_1'X_3'X_5'X_8'X_4' \}$$

3) [단계3]을 이용하면 G_1' 은 g_4' 과 g_5' 의 합집합이 된다.

$$G_1' = \{ X_{10}'X_8'X_9'X_{11}', X_7'X_8'X_9'X_6', X_7'X_{10}'X_{12}'X_6', X_1'X_2'X_5'X_9', X_2'X_3'X_4'X_6', X_3'X_5'X_7'X_8'X_6', X_3'X_5'X_8'X_{10}'X_{11}', X_1'X_7'X_8'X_9'X_4', X_1'X_7'X_{12}'X_{10}'X_4', X_2'X_5'X_9'X_4'X_6' \}$$

4) [단계4]를 적용하여 G_1' 의 F_i 를 구한다.

$$F_1 = X_{10}'X_8'X_9'X_{11} + X_3'X_5'X_8'X_{10}'X_{11}' = X_8'X_{10}'X_{11}' (X_9' + X_3'X_5')$$

$$F_2 = X_1'X_2'X_5'X_9 + X_2'X_5'X_9'X_4'X_6' = X_2'X_5'X_9' (X_1' + X_4'X_6')$$

$$F_3 = X_7'X_{10}'X_{12}'X_6 + X_1'X_7'X_{10}'X_{12}'X_4' = X_7'X_{10}'X_{12}' (X_6' + X_1'X_4')$$

$$F_4 = X_7'X_8'X_9'X_6 + X_3'X_5'X_7'X_8'X_6' = X_6'X_7'X_8' (X_9' + X_3'X_5')$$

5) 잔여된 g' 은 단일사상만이 존재하므로 G_2' 을 구할 수 없다.

6) [단계6]에 의하여 산출된 F_6 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F_5 &= X_{11}'X_{12}' \\
 F_6 &= X_1'X_2'X_3' + X_3'X_4'X_2'X_6' \\
 &= X_2'X_3'(X_1' + X_4'X_6') \\
 F_7 &= X_1'X_7'X_8'X_9'X_4' + X_1'X_3'X_5'X_7'X_8'X_4' \\
 &= X_1'X_4'X_7'X_8'(X_9' + X_3'X_5')
 \end{aligned}$$

7) [단계7]을 적용하여 하한 근사신뢰도를 계정한다.

(2)식으로부터,

$$\begin{aligned}
 R_L(P) &= (1 - Pr(F_1))(1 - Pr(F_2))(1 - Pr(F_3)) \\
 &\quad (1 - Pr(F_4))(1 - Pr(F_5)) \times (1 - Pr(F_6)) \\
 &\quad (1 - Pr(F_7)) \quad (15)
 \end{aligned}$$

그런데 $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 =$ 이므로 식(15)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 R_L(P) &= (1 - Pr(F_1))^4 (1 - Pr(F_5))(1 - Pr(F_6)) \\
 &\quad (1 - Pr(F_7)) \quad (16)
 \end{aligned}$$

식(9)와 (10)에 의하여,

$$\begin{aligned}
 Pr(F_1) &= q^3 \{1 - (1 - q)(1 - q^2)\}, Pr(F_5) = q^2 \\
 Pr(F_6) &= q^2 \{1 - (1 - q)(1 - q^2)\}, \\
 Pr(F_7) &= q^4 \{1 - (1 - q)(1 - q^2)\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore R_L(P) &= (1 - q^2) [1 - q^4 \{1 - (1 - q)(1 - q^2)\}] \\
 &= (1 - q^2) \{1 - (1 - q)(1 - q^2)\} \\
 &\quad [1 - q^3 \{1 - (1 - q)(1 - q^2)\}]^4 \quad (18)
 \end{aligned}$$

지로의 확률값이 0.9이면, $R_L(p=0.9) = 0.988479$

식(14)와 (18)에 확률값을 대입하여 정확한 신뢰도와 비교하면 표 1 과 같다.

표 1. 대칭망 그래프의 정확한 신뢰도와 근사 신뢰도와의 비교

Table 1. Comparison of the exact reliability and the reliability bounds for symmetric network.

| P | Pr(P) | Re(P) | Ru(P) |
|------|----------|--------|----------|
| 0.99 | 0.999898 | 0.9999 | 0.999999 |
| 0.95 | 0.997342 | 0.9973 | 0.999999 |
| 0.9 | 0.988479 | 0.9885 | 0.999999 |
| 0.8 | 0.943699 | 0.9446 | 0.999853 |
| 0.7 | 0.843755 | 0.8512 | 0.992171 |
| 0.6 | 0.671088 | 0.7003 | 0.924935 |
| 0.5 | 0.439195 | 0.5059 | 0.723237 |
| 0.4 | 0.210093 | 0.3048 | 0.430552 |

V. 검토 및 고찰

본 논문에서는 알고리즘의 성능을 분석하기 위하여 몇가지 방법과 비교하였다. 그림 4 의 그래프에 대한 상한 근사신뢰도 계산 결과는 [4, 5, 6]방법과 비교하기 위하여 표 2 에 나타나 있으며 그림 5 에서 이를 도식화 하였다. 표 2 에서 정확한 신뢰도와 비교된 본 논문의 상한 근사신뢰도는 Esary-Proschan [4]의 값 보다는 더욱 근접되어지나 Shogan [5]과 Gopal

표 2. 대칭망 그래프(그림 4)에 대한 상한 근사신뢰도의 비교

Table 2. Comparison of the reliability upper bounds for symmetric network

| P | 정확한 Re(P) | Proschan [4] | Shogan [5] | Gopal [6] | 본 논문 Ru(P) |
|------|-----------|--------------|------------|-----------|------------|
| 0.99 | 0.9999 | 0.99999 | 0.9999 | 0.99990 | 0.999999 |
| 0.95 | 0.9973 | 0.99999 | 0.9975 | 0.99749 | 0.999999 |
| 0.9 | 0.9885 | 0.99999 | 0.9898 | 0.98977 | 0.999999 |
| 0.8 | 0.9446 | 0.99999 | 0.9560 | 0.95574 | 0.999853 |
| 0.7 | 0.8512 | 0.99786 | 0.8871 | 0.88568 | 0.992171 |
| 0.6 | 0.7003 | 0.95515 | 0.7634 | 0.76019 | 0.924935 |
| 0.5 | 0.5059 | 0.76892 | 0.5754 | 0.57142 | 0.723237 |
| 0.4 | 0.3048 | 0.54094 | 0.3527 | 0.34988 | 0.430552 |

[6]의 결과값 보다는 편차율이 높아짐을 알 수 있다. 따라서 본 논문의 상한 근사신뢰도 알고리즘은 [5]와 [6]에 비교하여 성능이 다소 못하는데 이것은 중복되는 논리변수가 [5]와 [6]에 비해서 덜 제거 되었기 때문이다. 마찬가지로 하한 근사 신뢰도 계산 결과는 표 3에 나타나 있다. 이 표 4는 본 논문의 하한 근사 신뢰도가 Esary-Proschan [4]와 Shogan [5]의 결과

값 보다는 좀더 근접되며 Gopal [6]의 결과값 보다는 편차율이 높아짐을 보여 주고 있다. 그러나 [6]의 방법을 비대칭망에 적용할 경우에 다중해답이 발생할 우려가 있다. 예를 들어 알파망에 적용 한다면 두개의 하한 신뢰도를 산출하게 된다. 이러한 부적합성을 본 논문은 해결 하므로써 대칭망 뿐만 아니라 비대칭망에도 적용할 수 있게 되었다.

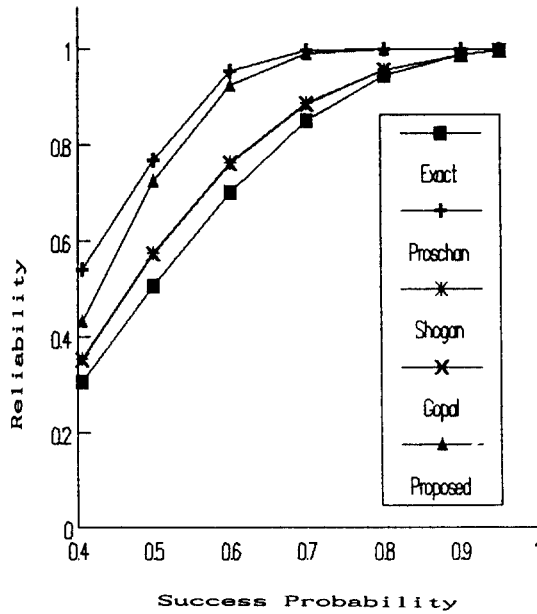


그림 5. 상한 근사 신뢰도값들의 비교
Fig. 5. Comparison of the reliability upper bounds.

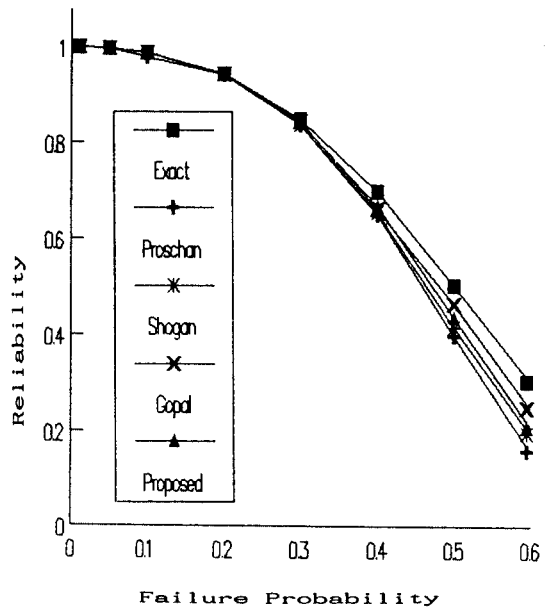


그림 6. 하한 근사 신뢰도값들의 비교
Fig. 6. Comparison of the reliability lower bounds.

표 3. 대칭망 그래프(그림 4)에 대한 하한 근사신뢰도의 비교
Table 3. Comparison of the reliability lower bounds for symmetric network

| q | 정확한 $R_e(P)$ | Proschan [4] | Shogan [5] | Gopal [6] | 본 논문 $R_L(P)$ |
|------|--------------|--------------|------------|-----------|---------------|
| 0.01 | 0.9999 | 0.9989 | 0.9999 | 0.99990 | 0.999898 |
| 0.05 | 0.9973 | 0.99730 | 0.9973 | 0.99730 | 0.997342 |
| 0.1 | 0.9885 | 0.7955 | 0.9885 | 0.98849 | 0.988479 |
| 0.2 | 0.9446 | 0.94315 | 0.9430 | 0.94405 | 0.943699 |
| 0.3 | 0.8512 | 0.83925 | 0.8390 | 0.84654 | 0.843755 |
| 0.4 | 0.7003 | 0.65329 | 0.6574 | 0.66371 | 0.671088 |
| 0.5 | 0.5059 | 0.39915 | 0.4187 | 0.46549 | 0.439195 |
| 0.6 | 0.3048 | 0.15942 | 0.1971 | 0.24934 | 0.210093 |

VI. 결 론

통신망의 정확한 신뢰도를 구하기 위해서는 발생된 원래의 사상을 이접되어진 식으로 유도하는 과정이 필요하다. 그러나 이 과정은 지로의 수가 m 일 경우 2^m 의 수행시간이 필요될 수 있다. 따라서 본 논문은 이 문제점을 개선 하기 위하여 단순 경로와 컷셋을 이용하여 상한과 하한 근사 신뢰도를 구하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 통신망을 구성하는 소자의 성공과 실패함수의 변형에 의해서 논리식의 중첩된 변수를 공통변수 형태로 추출하여 중복성을 제거하므로써 상한에서는 Esary-Proschan [4]의 근사값보다, 그리고 하한에서는 Esary-Proschan [4]과 Shogan [5]의 근사값보다 더욱 근접한 신뢰도를 산출하였다. 또한 구성된 사상간을 분리하는 변수분리법을 사용하여 대칭망 뿐만아니라 Shogan [5]와 Gopal [6]의 방법으로는 해결할 수 없는 비대칭망에도 적용할 수 있는 알고리즘을 제시하였다. 앞으로 더 연구되어야 할 과제는 망을 분석하기 위하여 망의 구조적 성질이 명확히 규명되어야 하며, 보다 간단하면서도 정확한 신뢰도에 접근할 수 있는 방법에 관하여 연구가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. Y.H.Kim, K.E.Case, and P.M.Ghare, " A

method for computing complex system reliability," IEEE Trans. Reliability, Vol. R-21, No.4, pp.215-219, Nov. 1972.

2. L.Fratta and U.Montanary, " A Boolean algebra method for computing the terminal reliability in a communication network," IEEE Trans. circuit theory, Vol. CT-20, No.3, May 1973.
3. Y.B.Yoo and Narsingh Deo, "A comparison of algorithm for terminal-pair reliability," IEEE Trans. reliability, Vol.37, No.2, June 1988.
4. R.E.Barlow and F.Proschan, Statistical theory of reliability and life testing probability model. pp.32-40, Holt Rinehart and Winston, New york
5. A.W.Shogan, " A recursive algorithm for bounding network reliability," IEEE Trans, Reliability, Vol 26, pp.322-327, Dec. 1977.
6. Krishna. Gopal and V.K.Jain, "A new method for system reliability bounds" Microelectron. reliability, Vol.25, No.4, pp.703-708, 1985.
7. Sheldon M.Ross, Introduction to Probability models., chap. 9, Sept. 1985.



金 榮 憲 (Young Hun Kim) 정회원
 1966년 8월 30일생
 1990년 2월 : 광운대학교 전자통신
 학과 졸업(공학사)
 1990년 8월~현재 : 광운대학교 대
 학원 전자통신공학과
 석사과정 재학중
 ※주관심분야 : 네트워크 신뢰도,
 컴퓨터 네트워크



吳 英 煥 (Young Hwan Oh) 정회원
 1947년 12월 28일생
 1975년 2월 : 인하대학교 전자공학
 과 졸업
 1977년 2월 : 인하대학교 대학원 석
 사과정 졸업
 1983년 2월 : 인하대학교 대학원 박
 사과정 수료
 1980년 3월~현재 : 광운대학교 전자통신공학과 교수