

## Echo Canceller의 수렴상수 최적화에 관한 연구

正會員 鄭 基 碩\*

A Study on the Optimum Convergence Constant  
of an Echo CancellerKi Seog Jeong\* *Regular Member*

## 要 約

본 논문에서는 echo canceller에서 LMS 알고리즘을 이용할 때 원하는 MSE하에서 가장 빠른 수렴 속도를 가져오는 최적 수렴상수에 대한 공식을 유도하였다. White 입력 데이터에 대해서 최적 수렴상수는 필터의 탭수, 입력신호 분산, 초기 MSE, 원하는 MSE의 간단한 폐쇄 형태(closed-form)의 함수가 되고 이런 특성으로 인해 실제 적용에서 쉽게 디자인될 수 있다 또한 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서 유도된 결과의 정확성과 유효성을 검증하였다.

## ABSTRACT

This paper presents a derivation of the optimum convergence constant to yield the most rapid convergence under a desired mean-square error (MSE) for echo canceller using the LMS algorithm.

For white input data, the optimum convergence constant is a simple closed-form function of the number of filter taps, the input signal variance, the initial MSE, and the desired MSE. This characteristic makes it easily designed in many practical applications. Computer simulations are also employed to show the correctness and effectiveness of the derived results.

## I. 서 론

Echo canceller에서 주로 사용되는 적응 알고리즘에는 least-mean square(LMS) 알고리즘과 Sign 알고리즘이 있다. LMS 알고리즘은 수렴 속도가 빠르고 계산이 용이한 장점이 있고, Sign 알고리즘은 수

렴속도는 느리지만 A/D 변환기가 필요치 않아서 회로가 간단하다는 장점이 있다. 지금까지 LMS 알고리즘과 Sign 알고리즘의 수렴특성에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다.<sup>[1][7]</sup>

수렴상수(적응상수)는 수렴률을 제어하는 상수로서 큰 수렴상수에서는 수렴속도는 빨라지나 정상상태의 excess MSE가 커지고, 작은 수렴상수에서는 수렴속도는 느리지만 정상상태의 excess MSE가 작아진다.

\*高麗大學校 電子工學科  
Dept. of Electronic Eng., Korea University  
論文番號 : 93-38

Bershad<sup>[8]</sup>는 해석과 수치 계산을 이용하여 LMS 알고리즘에 대한 관찰 구간(observation interval)의 끝에서 가장 작은 excess MSE를 가져오는 최적 수렴 상수는 필터의 탭수, 초기 weight setting, Wiener weight, learning sample의 수의 함수가 됨을 밝힌 바 있다.

본 논문에서는 원하는 MSE하에서 가장 빠른 수렴을 가져올 수 있는 LMS 알고리즘에 대한 수렴상수의 최적화를 위한 새로운 접근 방법을 제시하고 최적 수렴 상수는 필터의 탭수, 입력 신호 분산, 초기 MSE, 원하는 MSE의 함수가 됨을 보인다.

본 논문의 구성은 II장에서 echo canceller의 이론을 고찰하고, III장에서 수렴상수의 최적화 공식을 유도하며, IV장에서 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 이론적 결과를 검증하고, 끝으로 V장에서 결론을 맺는다.

## II. Echo canceller의 이론

전 이중 디지털 전송 시스템에서 echo canceller의 기본 모형을 그림 1.에 나타내었다.

Echo 신호는 송신기와 수신기 사이의 원하지 않는 전송 path(echo path)에 의하여 모델될 수 있다. 기저대역(baseband) 데이터 전송에서 이 echo path는 기본적으로 선형이고 시간에 따라서 아주 느리게 변한다(예를 들어 온도변화). 그러므로 echo 감쇠는 수신된 echo  $e(k)$ 의 replica  $\hat{e}(k)$ 가 적응 디지털 필터에 의하여 자동적으로 형성되는 송신기와 수신기 사이에 parallel path를 제공함으로써 이루어질 수 있다.

Echo 신호로부터 그 replica를 감산함으로써 echo

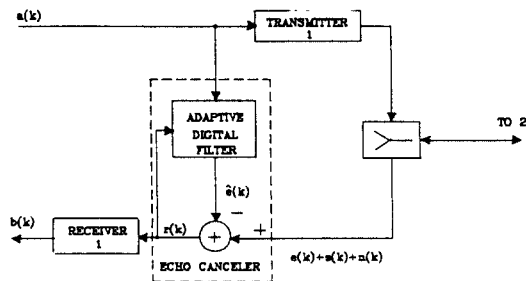


그림 1. 전이중 전송 시스템에서 echo canceller의 기본 모형.

Fig. 1. Basic configuration of an echo canceller in a full-duplex transmission system.

는 소멸된다. 감산후에 잔류신호  $r(k)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$r(k) = s(k) + n(k) + e(k) - \hat{e}(k) \quad (1)$$

신호  $r(k)$ 는 검파를 위하여 수신기1에 공급되고, 최소 mean-square error gradient에 따라서 필터계수를 adapting하기위하여 디지털 필터에 공급된다.

그림1.에서 EC로 들어가는 위쪽 입력 신호는 송신기1의 원래 입력 데이터시퀀스  $a(k)$ 이다. 이러한 방법은 필터에서 적응 과정을 위하여 더 좋으며 또한 EC의 하드웨어를 간단히 한다. EC면에서 분배 송신기는 echo path의 일부분이다.

그림1.에 있는 모든 신호는 입력데이터 시퀀스  $a(k)$ 의 심볼구간  $T$ 와 같은 기본 시간 구간을 가지는 이산 시간으로 나타낸 것이다. 그러나 하이브리드와 감산기 사이의 신호는 고유하게 아나로그이며 많은 상황에서 수신기 신호가 아나로그신호로 나타내지는 것이 원해진다. 그러므로 디지털 EC의 실제구현에서는 샘플 주파수의 대응하는 선택(S/H)과 함께 A/D, D/A 변환기가 제공되어야 한다.

Echo path는 유한 임펄스 응답  $g(n)$ 으로 표현될 수 있다고 가정하면(여기서,  $n < 0, n \geq N$  일 때  $g(n) = 0$ )  $N$ 개의 계수,  $c_0(k), c_1(k), \dots, c_{N-1}(k)$ 를 가지는 트랜스버설 디지털 필터를 echo replica  $\hat{e}(k)$ 의 발생을 위하여 사용할 수 있다.

또한 원단 송신기로부터 근단 수신기까지의 전송 path가 임펄스 응답  $h(n)$ 을 가진다고 가정한다( $n < 0, n \geq M$  일 때  $h(n) = 0$ ).

EC의 해석을 쉽게 하기 위하여 다음과 같은 벡터를 도입한다.<sup>[9]</sup>

1) 근단입력 벡터

$$a(k) = (a(k), a(k-1), \dots, a(k-N+1))^T \quad (2)$$

2) echo path 벡터

$$g = (g(0), g(1), \dots, g(N-1))^T \quad (3)$$

3) 계수 벡터

$$c(k) = (c_0(k), c_1(k), \dots, c_{N-1}(k))^T \quad (4)$$

4) 원단 입력 벡터

$$b(k) = (b(k), b(k-1), \dots, b(k-M+1))^T \quad (5)$$

5) 전송 path 벡터

$$h(k) = (h(0), h(1), \dots, h(M-1))^T \quad (6)$$

여기서,  $( )^T$ : Transpose 벡터.

$N$ : 디지털 필터의 탭수.

이제 echo 신호  $e(k)$ , echo replica  $\hat{e}(k)$ , 수신신호  $s(k)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e(k) = a^T(k) \cdot g \quad (7)$$

$$\hat{e}(k) = a^T(k) \cdot c(k) \quad (8)$$

$$s(k) = b^T(k) \cdot h \quad (9)$$

수신 신호  $s(k)$ 와 잡음신호  $n(k)$ 를 "uncancelable" 신호

$$u(k) = s(k) + n(k) \quad (10)$$

로 나타내면 식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$r(k) = e(k) - \hat{e}(k) + u(k) \quad (11)$$

잔류 echo(residual echo)는

$$\varepsilon(k) = e(k) - \hat{e}(k) = a^T(k)(g - c(k)) \quad (12)$$

가 된다.

### III. 수렴상수의 최적화

적용 상수  $\alpha$ 를 최적화하기 위하여 다음과 같이 가정을 한다.

1) 입력신호  $a(k)$ 와 원단수신신호  $u(k)$ 는 각각 분산  $\sigma_a^2$ 과  $\sigma_u^2$ 를 가지며 zero-mean wide-sense stationary 상호 독립적인 stochastic process이다. 또,  $a(k)$ 는 white process이고  $u(k)$ 는 Gaussian이다.

2)  $g \cdot c(k)$ 는  $a(k)$ 와  $u(k)$ 로부터 통계적으로 독립적이다.

어떤 지정된 성능요구하에서 가장 빠른 수렴을 얻을 수 있는  $\alpha_{opt}$ 를 구하기 위하여 원하는 MSE ( $MSE_d$ )를 성능조건으로 택한다. 다시말하면 반복을

고정시키고 수렴상수로 MSE를 최소화 하는 대신에  $MSE_d$ 와 초기 MSE에 대하여 수렴상수로 반복수를 최소화한다.

$$R(k) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(k)}{\sigma_u^2} \quad (13)$$

로 정의하면 전체 수렴시간은 EC가  $R(k)$ 의 값을  $R(O)$ 에서  $R_d$ 까지 감소시키는데 필요한 반복 수로서 정의된다. 이 반복 수를  $N_d$ 라하면 LMS 알고리즘에서  $N_d$ 는 다음과 같이 표현된다.<sup>[2]</sup>

$$\frac{N_d}{N} = \frac{-0.57}{R^2(\infty)} \log \frac{R_d^2 - R^2(\infty)}{R^2(O) - R^2(\infty)} \approx \frac{0.25}{R^2(\infty)} \cdot \ln \frac{R^2(O)}{R_d^2 - R^2(\infty)} \quad (14)$$

$$\text{여기서, } R^2(\infty) = \frac{\alpha N \sigma_a^2}{1 - \alpha N \sigma_a^2} \quad (15)$$

식(14)에서  $x = R^2(\infty)$ ,  $B = R_d^2$ ,  $D = R^2(O)$ ,  $f(x) = N_d/N$ 으로 놓으면

$$f(x) = \frac{0.25}{x} \ln \frac{D}{B-x} \quad (16)$$

식(16)을  $x$ 에 대하여 미분하여 0으로 놓으면

$$-\frac{1}{x^2} \ln \frac{D}{B-x} + \frac{1}{x(B-x)} = 0 \quad (17)$$

$$\ln(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 \dots$$

을 이용하면, 식(17)는

$$x^2 + B \ln \frac{D}{B-x} - B^2 \ln \frac{D}{B} = 0 \quad (18)$$

따라서 최적  $x$ , 즉  $R^2(\infty)$ 는

$$R^2(\infty)_{opt} = R_d^2 \left[ -\ln \frac{R(O)}{R_d} + \sqrt{\ln^2 \frac{R(O)}{R_d} + 2 \cdot \ln \frac{R(O)}{R_d}} \right] \quad (19)$$

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{N \sigma_a^2} \cdot \frac{R^2(\infty)_{opt}}{1 + R^2(\infty)_{opt}} \approx \frac{1}{N \sigma_a^2} R^2(\infty)_{opt} \quad (20)$$

식(20)로부터 최적 적용상수  $\alpha_{opt}$ 는  $N$ ,  $\sigma_a^2$ ,  $\sigma_u^2$ ,  $R(O)$ 를 알면 결정될 수 있음을 알 수 있다.  $R_d = -20\text{dB}$  일 때  $R(O)$ 를 파라미터로하여  $R(\infty)$ 에 대한  $N_d/N$ 을 그림2.에 나타내었다.

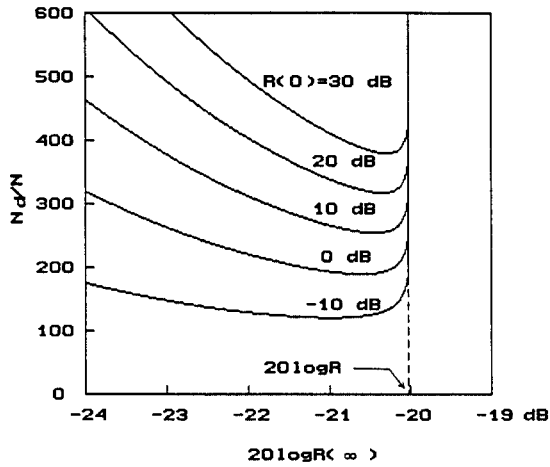


그림 2.  $R(\infty)$ 의 함수로서 정규화된 반복 수  
 Fig. 2. Normalized number of iterations as a function of  $R(\infty)$

그림2.에서  $R(0) > 1$ (보통의 경우)에 대하여  $R(\infty)_{opt}$ 의 값이  $R_d - 0.5dB$ 내에 있음을 볼 수 있다. 이것을 이용하여 suboptimum 상수  $\alpha_s$ 를 얻는다. 이렇게 해서  $\alpha_{opt} = 0.0089 / N\sigma_a^2$ 가 얻어진다. 또 [2]에서  $R(\infty) = R_d - 3dB$ 로부터  $\alpha = 0.005 / N\sigma_a^2$ 를 얻는다.  $R_d = -20dB$  일 때  $\alpha_{opt}$ ,  $\alpha_s$ ,  $\alpha = 0.01 / N\sigma_a^2$ 에 대하여  $R(0)$ 의 함수로서  $N_d/N$ 를 그림3.에 나타내었다.

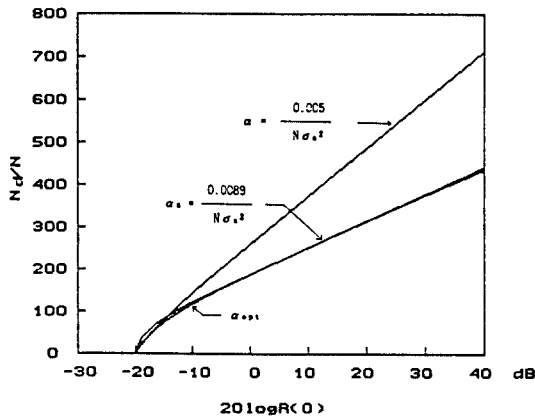


그림 3.  $R(0)$ 의 함수로서 정규화된 반복 수  
 Fig. 3. Normalized number of iterations as a function of  $R(0)$

#### IV. 시뮬레이션 및 결과 고찰

유도된 결과의 정확성과 유효성 검증하기 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

컴퓨터 시뮬레이션에 사용된 echo path의 impulse response는

$$g(k) = e^{-0.8k} \quad 1 \leq k \leq N$$

이고, 입력 데이터는 biphase 코드를 사용하였다.

Echo canceller의 디지털 필터의 탭수는  $N=8$ 로 하였으며, 잔류 echo 분산의 초기값  $\sigma_e^2(0) = -10dB$ 를 택하였다.

수신된 원단 신호  $u(k)$ 는 zero mean과 분산  $\sigma_u^2 = -40dB$ 를 갖는 Gaussian이라고 하면 수신된 원단 신호  $u(k)$ 의 분산에 대한 잔류 echo의 분산 비의 초기치  $R(0) = 30dB$ 가 된다.

$R(k)$ 의 원하는 값은  $R_d = -20dB$ 로 한다.

$$\alpha_{opt} = 1.128 \times 10^{-3}, \quad \alpha_s = 1.113 \times 10^{-3}, \quad \alpha = 0.625 \times 10^{-3}$$

에 대하여 시뮬레이션한 결과를 그림4.에 나타내었다.

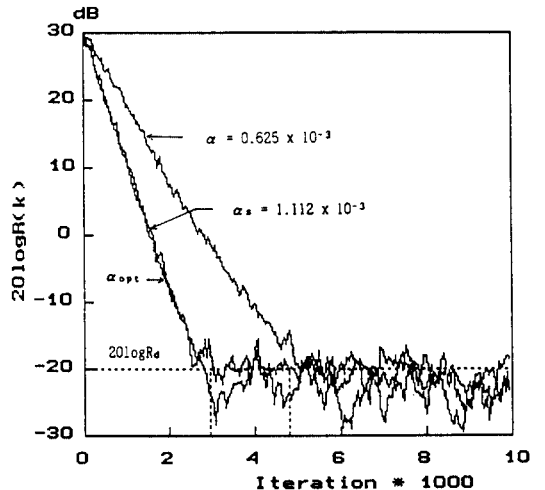


그림 4. 수렴곡선의 시뮬레이션 결과  
 Fig. 4. Simulation results of convergence curve

그림3.에서  $R(0)$ 가 30dB 일 때  $N_d$ 는  $\alpha_{opt} = 1.128 \times 10^{-3}$  일 때 약 2900,  $\alpha_s = 1.113 \times 10^{-3}$  일 때 약

3000,  $\alpha = 0.625 \times 10^{-3}$  일 때 약 4800이 되는 것을 볼 수 있으며,  $\alpha_{opt}$ 에서 수렴 속도가 가장 빠른 것을 알 수 있다.

또한 이들 값은 그림4.에서  $R_d = -20dB$ 에 도달하는 iteration과 잘 일치함을 볼 수 있다.

## V. 결 론

LMS 알고리즘을 이용하는 적응 FIR 디지털 필터를 디자인할 때 수렴상수는 안정도와 수렴률을 결정하므로 아주 중요한 디자인 파라미터이다.

본 논문에서는 echo canceller에서 원하는 MSE 하에서 가장 빠른 수렴을 얻기 위한 수렴 상수의 최적값에 대한 공식을 유도하였다. 최적 수렴상수는 필터의 탭수, 입력 신호 분산, 초기 MSE, 원하는 MSE의 간단한 폐쇄형태(closed-form) 함수가 됨을 알 수 있었다. 이런 특성으로 해서 실제적용에서 쉽게 디자인 할 수 있고, 본 논문에서 제시한 수렴상수의 최적화 방법은 다른 적응 시스템, 예를 들어 decision feedback equalization에도 적용 가능할 것으로 생각한다.

## 참 고 문 헌

1. T.A.C.M. Claasen and W.F.G. Mecklenbrauer, "Comparison of the convergence of two algorithms for adaptive FIR digital filters," IEEE Trans. Circuit and System, Vol.CAS-28, pp.510-518, June, 1981.
2. N.A.M. Verhoeckx and T.A.C.M. Claasen, "Some considerations on the design of adaptive digital filters equipped with the sign algorithm," IEEE Trans. Commu., vol.COM-32, pp.

258-266, Mar., 1984.

3. A. Feuer and E. Weinstein, "Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated Gaussian data," IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Processing, vol.ASSP-33, pp.222-230, Feb. 1985.
4. N.J.Bershad, "Comments on 'Comparison of the convergence of two algorithms for adaptive FIR digital filters'," IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Processing, vol.ASSP-33, pp. 1604-1606, Dec.1985.
5. V.J. Mathews and S.H.Cho, "Improved convergence analysis of stochastic gradient adaptive filters using the sign algorithm," IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Processing, ASSP-35, pp.450-454, Apr. 1987.
6. E.Eweda, "Almost sure convergence of a decreasing gain sign algorithm for adaptive filtering," IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Processing, vol.ASSP-36, pp.1669-1671, Oct. 1988.
7. E.Eweda, "A tight upper bound of the average absolute error in a constant step size sign algorithm," IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Processing, vol.ASSP-37, pp.1774-1776, Nov. 1989.
8. N.J.Bershad, "On the optimum gain parameter in the LMS adaptation," IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Processing, vol.ASSP-35, pp. 1065-1068, July. 1987.
9. N.A.M. Verhoeckx et al., "Digital echo cancellation for baseband data transmission," IEEE Trans. Acoustic Speech Signal Processing, ASSP-27, pp.768-781, Dec. 1979.



鄭 基 碩(Ki Seog Jeong) 정희원  
 1960년 6월 18일생  
 1983년 2월 : 고려대학교 전자공학과 졸업  
 1988년 8월 : 고려대학교 대학원 전자공학과 석사과정 졸업(공학석사)  
 1992년 8월 : 고려대학교 대학원 전자공학과 박사과정 졸업(공학박사)