

## 교환기의 지연시간 분포 분석방법

正會員 尹馥植\*, 白章鉉\*\*, 李昶勳\*\*\*

### Analytic Method for Delay Time Distributions in Switching System

Bok Sik Yoon\*, Jang Hyun Baek\*\*, Chang Hoon Lie\*\*\* Regular Members

#### 要 約

교환기의 종합적인 성능분석을 위한 신뢰할 만한 분석적 도구의 개발은 매우 중요한 문제이다. 본 연구에서는 이동통신 교환기를 비롯한 일반적인 교환기의 지연시간 분포를 구하는 분석적 방법이 제시된다. 우선 TDX-10 ISDN 교환기의 구조와 자국호 처리과정을 토대로 큐잉 네트워크로의 모형화가 행해지고 신호들이 큐잉 네트워크의 각 노드를 이동하는 과정이 세마이 마코프 체인으로 근사화된다. 이때 신호들의 외부로부터의 도착과정과 서비스 시간은 일반적인 분포로 가정하고 GPH 분포를 토대로 근사화되어 각 노드에서 GPH/GPH/1 큐를 분석하여 노드별 체류시간 분포를 GPH 형태로 구한다. 이에 따라 신호의 노드 이동과정이 GPH 세마이 마코프과정으로 얻어지게 되고 그 과정에서의 최초전이시간 분포를 구하는 방식으로 전체 지연시간 분포가 구해진다. 앞에서 얻어진 큐잉네트워크에 전체과정을 적용하여 지연시간 분포를 구하는 과정이 예시되고 시뮬레이션과의 결과와의 비교를 통해 정확성과 타당성이 검증된다.

#### ABSTRACT

A reliable analytic tool for the comprehensive performance analysis of switching systems is urgently needed. In this study we propose an analytic method to compute delay distributions for general switching systems including the mobile switching system. We first establish the queueing network model representing the call processing procedure in TDX-10 ISDN switch and then

\*弘益大學校 基礎科學科  
Hongik University, Dept. of Science

\*\*韓國電磁通信研究所  
ETRI

\*\*\*서울대학교 산업공학과  
Seoul National University, Dept. of Industrial  
Engineering

論文番號 : 95112-0318

接受日字 : 1995年 3月 18日

본 연구는 부분적으로 1994년도 한국전자통신연구소의 연구비 지원에 의해 수행되었음.

approximate the location process of a typical signal as a semi-Markov chain. We use the GPH distribution to approximate the interarrival time distribution of the input process and the service time distribution at each node. Then, we analyse the GPH/GPH/1 queue to get the waiting time distribution at each node as the GPH form. Accordingly, the location process of the typical signal is modelled as a GPH semi-Markov chain and we get the sojourn time distribution of the queueing network by considering the first passage time distribution of the semi-Markov chain. Based on the comparison study with the simulation for the TDX-10 queueing network, we confirm the validity and the accuracy of the proposed method.

## 1. 서 론

교환기는 전체 통신시스템의 성능을 결정하는 핵심적인 부분이다. 따라서 통신망 계획 및 운용에서 교환기 성능의 정확한 평가가 요구된다. 일반적으로 교환기의 성능은 제어계의 호처리 용량(call handling capacity), 통화로계의 통화처리용량(traffic carrying capacity), 그리고 종단용량(termination capacity)의 세 가지 측면에서 정의된다. 제어계의 호처리용량은 여러 지연시간들에 대한 권고값들을 만족하면서 교환기가 처리할 수 있는 호의 수를 말하며 단위는 BHCA(Busy Hour Call Attempts)가 된다. 통화로계의 통화처리용량은 블럭킹 확률에 대한 권고값을 만족시키면서 스위치 네트워크가 수용할 수 있는 트래픽의 양을 말하며 단위는 Erlang이 된다. 종단용량은 교환기가 수용할 수 있는 최대 가입자회선 및 트렁크의 수를 말한다.

본 연구에서 다루고자 하는 분야는 지연시간에 대한 것으로, 직접적으로 교환기에 일정한 트래픽이 가해졌을 경우에 지연시간의 기준이 만족되는지를 파악함으로써 제어계의 호처리용량 평가를 지원하는데 이용될 수 있다. 일반적으로 교환기의 지연시간은 교환기를 큐잉 네트워크로 모형화하여 주로 평균적인 개념에서 근사적인 분석이 행해지고 있는데, 이질적인 다양한 트래픽이 혼합되는 ISDN 상황에서는 평균 지연시간보다는 지연시간 분포 자체에 기반을 둔 성능분석이 보다 바람직할 것이다. 그러나 곱형태(product form)가 아닌 경우, 큐잉 네트워크 모형의 지연시간 분석을 위한 효과적인 방법은 매우 드물다. 이러한 큐잉네트워크의 이론을 교환기나 컴퓨터에 적용하여 지연시간 분포를 구하려는 시도는 주로 포아송 도착과정 등과 같은 단순한 가정하

에서 진행되어 왔다. 큐잉 네트워크의 지연시간 분석에 대한 대표적인 연구로는, 마코프적인 모형에 근거한 PANACEA<sup>(3)</sup>, 보다 일반적인 가정에 근거하였지만 지연시간의 평균과 분산만을 분석한 QNA<sup>(9)</sup>, QNET<sup>(12)</sup> 등을 들 수 있는데 현재까지 일반적인 상황하에서의 큐잉 네트워크의 지연시간 분포를 줄 수 있는 효과적인 방법은 거의 제안되지 못하고 있는 실정이다.

본 연구는 일반적인 트래픽이 주어질 때 교환기의 지연시간의 평균, 분산분포를 구하는 분석적인 방법을 제시하는 것을 목표로 한다. 우선 TDX-10 ISDN 교환기의 구조와 자국호 처리 과정이 조사하여 이를 토대로 큐잉 네트워크로의 모형화를 행한 후 큐잉 네트워크를 대상으로 체류시간의 분석에 초점을 맞춘다. 전체적인 분석은 고객들이 큐잉 네트워크 각 노드 사이를 이동하는 과정을 세마이 마코프 과정으로 단순화시키고 이 세마이 마코프 체인에서 최초로 특정 상태로 전이되는 시간의 분포를 구하는 방식으로 행해진다. 이 때 개별노드에서의 체류시간 분포를 GPH/GPH/1 대기시스템으로 근사화하여 시스템에서의 지연시간을 구하는 방법이 제시된다.

서론에 이어 2장에서는 분석과정에 이용되는 GPH 분포에 대하여 설명하고, 3장에서는 TDX-10 ISDN 교환기의 구조와 자국호 처리 과정을 토대로 큐잉 네트워크로의 모형화를 행한다. 4장에서는 교환기를 모형화한 큐잉 네트워크에서 지연시간 분포를 얻는 방법을 과정화하여 제시하고 5장에서는 타당성 검증을 위해 전체적인 과정을 컴퓨터 프로그램으로 작성하여 지연시간 분포를 계산하고 이를 TDX-10 ISDN 교환기에 대하여 적용하여 시뮬레이션 결과와 비교한 후 6장의 결론으로 논문을 맺는다.

II. GPH(Generalized Phase Type) 분포

지수분포를 따르는 무작위 갯수의 단위 확률 변수들의 합의 분포로 정의되는 GPH 분포는 연속함수에 관련된 계산을 이산함수 계산으로 변환시켜줌으로써, 확률분석에 있어서 어려운 계산들을 보다 간편하게 해준다. GPH 분포의 이러한 성질은 대기시스템을 비롯한 여러 분야의 확률적 분석에 폭넓게 응용될 잠재성을 가지고 있는데 윤복식 등<sup>(11)</sup>은 양의 구간에서 정의된 임의의 연속 분포함수를 GPH 분포로 근사화시킬 수 있음을 보이고 근사화의 효율성 및 정확성에 대한 실험적인 연구를 행한 바 있는데, 이 결과를 이용하면 많은 모형의 확률적 분석을 보다 정확하고 간편하게 수행할 수 있다.

우선  $(E_n)_{n=0}^{\infty}$ 을 평균이  $1/\lambda$ 인 지수분포를 따르는 확률 변수열이라 하고(단,  $E_0=0$  w. p. 1),  $L$ 을 분포함수  $g$ 를 따르는 이산적인 확률변수라고 할 때,

$$X = \sum_{n=0}^L E_n$$

의 분포함수  $F$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!}, \quad x > 0$$

이 분포를  $GPH(\lambda, g)$ 로 정의한다. 하나의 GPH 분포를 표시하는  $\lambda$ 와  $g$ 의 쌍이 무수히 많이 존재하게 되는데, 일반적으로는  $\lambda$ 를 고정시키고, 그에 따라  $g$ 를 확정할 수 있다.

이때  $[0, \infty)$ 에서 정의된 유계함수(bounded function)  $F$ 에 대하여,

$$F_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{n}{\lambda}\right) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0, \lambda > 0$$

라고 정의하면,  $\lambda \rightarrow \infty$  일 때

$$F_{\lambda}(t) \rightarrow F(t)$$

이 성립하는데 이를 이용하여  $[0, \infty)$ 에서 정의된 임의의 연속분포를 GPH 분포로 근사화 할 수 있다. 위 식을 보면 무한개의 항을 더하는 경우가 발생하는데, 오차의 한계를 설정하여, 더하는 항의 갯수를 구한 다음 truncation시켜서 계산을 수행할 수 있고, 여러가지 경우에 대하여 임의의 함수를 GPH 함수의 형태로 바꾸어 보고 그 결과를 원래의 함수와 비교해 본 결과를 살펴보면,  $\lambda$ 를 충분히 크게 잡으면 거의 오차없이 임의의 분포를 GPH 분포로 근사화할 수 있음을 알 수 있다<sup>(11)</sup>.

III. 교환기의 구조 및 큐잉 네트워크 모형화

1. 교환기의 구조

TDX-10 ISDN 교환기는 종합정보통신망에서 중추적인 역할을 담당하는 대용량 전자 교환기이다. TDX-10 ISDN 교환기는 기본호 접속 기능과 더불어 1차군 접속 가입자들과 패킷 기능 가입자들을 위한 회선 교환 서비스 및 패킷교환 서비스를 제공하는 기능을 가지고 있어, 기존망에서 제공되는 서비스와 ISDN 서비스간의 상호접속이 가능하도록 설계되어 있다.

TDX-10 ISDN 교환기의 기본구조는 그림 1과 같이 ASS(Access Switching Subsystem), INS(Interconnection Network Subsystem), CCS(Central Control Subsystem)의 세 서브시스템으로 구성되어 있다. ASS는 분산된 호처리 기능을 수행하며, CCS는 운용 및 보전의 집중화 기능을 담당한다. INS는 시스템의 중앙에 위치하여 ASS와 CCS를 상호연결한다.

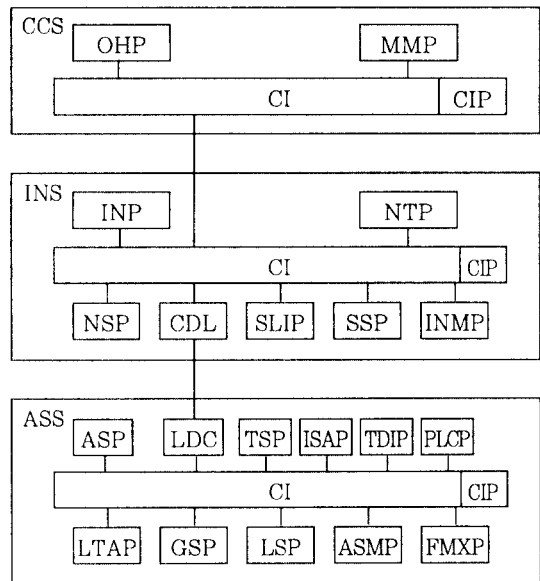


그림 1. 서브시스템의 프로세서 구성  
Fig. 1. Processors of subsystems

각 ASS, INS, CCS에서 메시지를 처리하게 되는 프로세서들이 그림에 표시되어 있다. 호처리 관련 기능을 수행하는 주요 프로세서로는 가입자 정합 기능을 담당하는 LTAP, ISAP, T-S-T 그룹스위치의 T단을 제어하는 TSP, 각종 tone 발생기 등을 제어하는 LSP, ASS의 모든 제어기능 및 유지보수 기능을 총괄하는 ASP, 스위치 연결 및 해제 기능을 수행하는 INP, Space 스위치를 제어하는 SSP와 번호번역을 담당하는 NTP, 과금 관련 기능을 담당하는 OMP 등이 있다.

## 2. 자국호 진행과정

두 가입자 사이의 통화가 성공적으로 이루어지기 위해서는 여러 종류의 메시지가 여러 프로세서에서 처리되어야만 한다. 디지털 가입자간의 자국호 진행과정을 호 설정 및 호 해제 중심으로 살펴보면 그림 2와 같다.

가입자로부터 발신 호요구 메시지 'SETUP'이 수신되면 시스템 상태, 메시지내의 호 참조번호, 정보 전달 능력, 채널 식별자 등을 조사하여 서비스 가능 여부를 진단한 후 발신 처리기능이 개시된다. 가입자 전송모드가 enbloc인 경우 호 설정에 필요한 모든 정보가 'SETUP' 메시지내에 포함되어 수신되고 발신가입자에게 이에 대한 통보를 하고 수신된 정보를 분석한다. 가입자 전송모드가 overlap인 경우는 발신가입자에게 이의 응답과 톤을 제공한다. 이후 호 설정에 필요한 추가 정보가 일정시간내에 수신되는 경우 톤을 끊고 수신된 정보를 분석한다.

번호번역 결과 착신가입자가 동일한 시스템에 수용된 경우(자국호) 착신가입자 처리를 위한 착신처리기능이 개시된다. 착신처리기능은 착신가입자에 대한 착신요구 처리를 위해 필요한 정보를 발신가입자에게 요구한다. 이에 발신가입자로부터 수신된 정보를 착신처리기능으로 통보하고, S-스위치 및 발신측 통화로를 연결한다. 착신처리기능은 발신가입자로부터 정보를 수신하여 착신가입자에게 'SETUP' 메시지를 전송하여 착신요구를 한다.

착신처리기능은 착신가입자로부터 착신가능 통보가 수신되거나 호출중임을 알리는 'ALERTING' 메시지가 수신되는데, 'ALERTING' 메시지가 수신되게 되면 착신처리기능은 B채널을 통해 발신가입자에게 호출음을 제공하거나 또는 발신처리기능에 의해서 D 채널상의 정보를 통해 발신가입자에게 호출중임을 송출하게 된다.

이후 착신가입자로부터 착신요구에 대한 최종 응답인 'CONNECT' 메시지를 수신하게 되면, 착신처리기능은 통화로(T-스위치)를 연결하고 D채널을 통해 착신가입자의 호 연결통보를 발신가입자에게 전달하게 된다. 이후 통화해제시까지 B채널을 통한 물리적 통화로 및 관련 호 자원을 유지하여 서비스가 제공된다.

통화 완료후 발(착)신 가입자가 호해제를 하는 경우, 발(착)신가입자의 해당호를 위해 사용되었던 호 자원(채널)을 절제하고, 필요시 B 채널을 통해 필요한 톤 및 표시 등을 발(착)신가입자에게 제공한다. 또한 이를 발(착)신처리기능에 통보하여 발(착)신가입자에게 호 해제를 요구한다. 이후 가입자와의 UNI(User Network Interface) 계층 3 프로토콜을 사용하여 최종적으로 호를 해제하고 해당호를 위해 사용되었던 호 자원을 해제한다.

그림 2는 블럭 단위의 메시지 흐름을 보여주고 있는데, ORIG/TERM은 발/착신가입자를 나타내며 TSW는 TSP에, DSI는 ISAP에, MDGC, CDG, LSC, DSC는 ASP에, NTR은 NTP에, SNC는 INP에, SSW는 SSP에 속한다. 또한 블럭 이름 뒤의 a, b는 각각 발신 가입자에 관련된 블럭(a), 착신 가입자에 관련된 블럭(b)임을 나타낸다.

## 3. 교환기의 큐잉 네트워크 모형화

호처리 과정을 보면, 하나의 호를 형성하는 여러 메시지들은 일정한 경로를 따라 TDX-10 ISDN 교환기내의 프로세서 사이를 이동한다.

교환기를 큐잉 네트워크로 모형화하기 위해서, 먼저 각 프로세서를 노드(node)로 표시하고 프로세서간 메시지 이동을 링크(link)로 표시한다. 그 다음, 호가 성공적으로 연결되어 완료되기까지 메시지의 경로선택 과정으로부터 각 링크에 확률값을 할당한다. 예를 들어, 하나의 완료호에 대하여, ASPa에서 다른 프로세서로 나가는 메시지의 갯수가 m개라고 하자. 이 중에서 ASPb로 나가는 메시지의 갯수가 n개라면, ASPa에서 ASPb로의 전이확률은 n/m이 된다. 이러한 과정은 하나의 교환기에 시간당 수십만 호가 발생하기 때문에 가능하다.

ISDN 회선교환 자국호에 대한 큐잉 네트워크 모형의 전이확률 행렬은 표 1과 같다. 예를 들어, NTP에서 나가는 메시지들은, 1/2의 확률로 ASPa로 가거나 1/2의

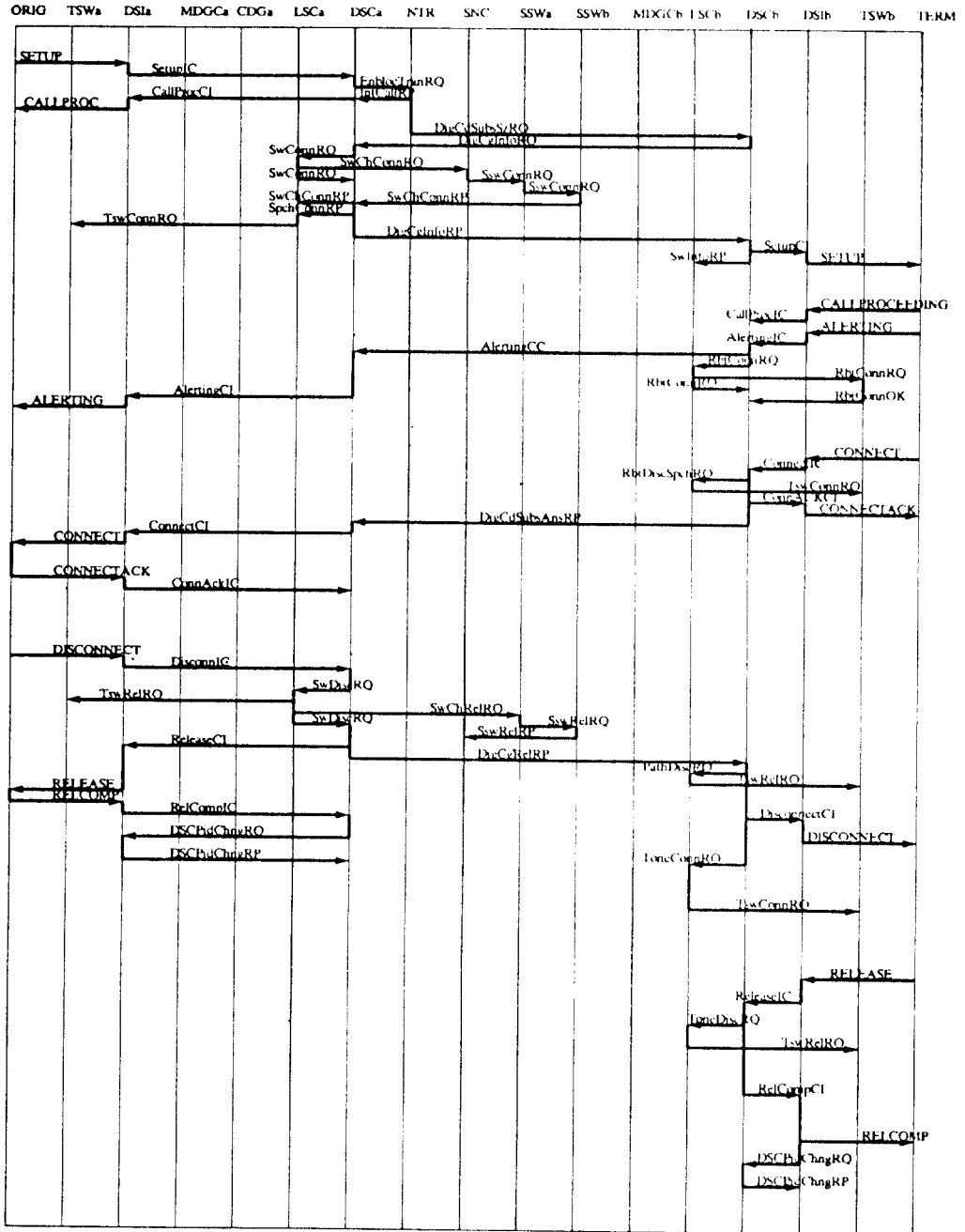


그림 2. ISDN 회선교환 자국호 처리과정  
Fig. 2. ISDN circuit switching internal call scenario

표 1. 전이확률 행렬  
Table 1. Transition probability matrix

From \ To	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	5/9	0	0	0	0	0	0	0	4/9
3	2/20	5/20	6/20	1/20	1/20	1/20	0	2/20	0	0	2/20
4	0	0	1/2	0	0	0	0	1/2	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1/2	0	0	0	0	1/2
6	0	0	0	0	0	0	2/2	0	0	0	0
7	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0	0	0
8	0	0	3/23	0	0	0	0	7/23	5/23	5/23	3/23
9	0	0	0	0	0	0	0	5/7	0	0	2/7
10	0	0	0	0	0	0	0	1/6	0	0	5/6

1 : TSPa 2 : ISAPa 3 : ASPa 4 : NTP 5 : INP 6 : SSPa  
7 : SSPb 8 : ASPb 9 : ISAPb 10 : TSPb 0 : External

확률로 ASPb로 나가게 된다

그림 2의 호처리 과정에 근거하여 TDX-10 ISDN 교환기를 큐잉 네트워크로 모형화한다. 프로세서 중에서 CCS에 속하는 OMP와 MMP는 시스템 M&A(Maintenance and Administration)에만 관련되므로 모형화에서 제외하였다. 따라서 모형화에 필요한 프로세서는, 발신 ASS에 있는 ASPa, TSPa, ISAPa와 착신 ASS에 있는 ASPb, TSPb, ISAPb, 그리고 ISS에 있는 INP, NTP, SSPa, SSPb의 10가지이다. 하나의 TDX-10 ISDN 교환기에는 최대 63개의 ASS가 가능하나, 본 연구에서는 착신 ASS와 발신 ASS만을 고려한다. 이러한 방법에 따라 TDX-10 ISDN 교환기를 큐잉 네트워크로 모형화하면 그림 3과 같다.

각 프로세서에서의 메시지 처리시간(각 노드에서의 서비스 시간)은 메시지 종류에 따라 다르며, 특정 메시지의 처리시간은 특정 상수값을 갖는다. 따라서 한 프로세서에서의 메시지 처리시간은, 그 프로세서로 들어오는 메시지의 종류와 수를 고려한 확률분포를 따르는 것으로 한다. 예를 들어, ASPa로 들어오는 메시지가 'setIC'일 확률이 0.5이고 이 메시지의 처리시간이 20 msec라면, ASPa의 메시지 처리시간은 0.5의 확률로 20 msec가 되는 것이다. 이런 식으로 모든 메시지의 확률

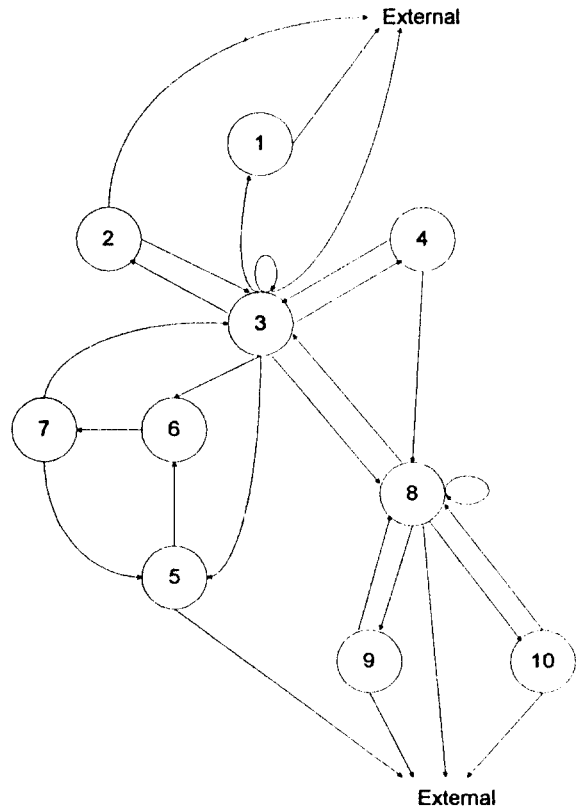


그림 3. 큐잉 네트워크 모형  
Fig. 3. Queueing network model

값과 처리시간을 고려하면, 그 프로세서의 메시지 처리 시간 분포가 주어지게 된다. 결국, TDX-10 ISDN 교환기를 각 노드간 전이확률 행렬과 노드에서의 서비스 시간 분포가 주어지는 큐잉 네트워크로 모형화할 수 있다.

#### IV. 교환기의 지연시간 분포 계산과정

전체적인 분석은 그림 3과 같은 큐잉 네트워크에서 고객들이 각 노드 사이를 이동하는 과정을 GPH 세마이 마코프 과정으로 단순화시키고 이 세마이 마코프 체인에서 최초로 특정 상태로 전이되는 시간의 분포를 구하는 방식으로 행해졌다. 이 때 개별노드에서의 체류시간 분포는 GPH/GPH/1 큐로 근사화하여 지연시간 분포를 구하는 방법을 따른다.

전체적인 분석과정은 다음과 같다.

- (1) 교환기의 큐잉 네트워크 모형화
- (2) 각 노드에서의 도착 파라메타 계산
- (3) 각 노드에서의 도착 분포를 GPH 분포로 근사화
- (4) 각 노드에서의 서비스 분포를 GPH 분포로 근사화
- (5) 각 노드에서의 지연시간 계산(GPH/GPH/1 큐)
- (6) 세마이 마코프 체인을 이용한 최초 전이시간 계산

첫번째 단계인 교환기의 큐잉 네트워크 모형화는 앞에서 설명하였다. 대상이 되는 네트워크는 N개의 노드로 구성되며 각 노드에서의 서비스 분포는 일반 분포를 따르고 경로이동은 마코프 전이(Markovian routing)를 하는 개방형 큐잉 네트워크가 된다. 이 때 주어져야 할 입력 데이터는 다음과 같다.

- 각 노드간 전이확률
- 노드별 외부 도착 트래픽의 도착율
- 노드별 외부 도착 트래픽의 변동계수(squared coefficient of variation)
- 서비스 분포함수(또는 평균과 분산계수)

두번째 단계부터 차례대로 살펴보자.

##### 1. 각 노드에서의 도착 파라메타 계산

트래픽들이 큐잉 네트워크 노드 사이를 이동하며 서비스를 받을 때 비독립적인 트래픽들의 중첩이 일어나게 되어 정확한 도착과정을 표현하기는 거의 불가능하다. 본 연구에서는 기존의 연구들(8,10)과 유사하게 각 노드에서의 총 도착 트래픽의 도착율과 변동계수들 사이의

일차방정식 계로부터 이 두개의 파라미터들을 구하고, 두 파라미터로부터 도착 프로세스를 근사화시키는 방식을 따른다. 도착율과 변동계수만으로 각 노드별 도착 프로세스를 정확히 묘사하기는 불가능하지만 오차가 그리 크지 않으리라는 것을 실험적으로 파악할 수 있다.

먼저 각 노드별 도착율  $\lambda_j$ 는 다음과 같은 N개의 식을 풀어서 구한다. 0은 외부를 나타낸다.

$$\lambda_j = \lambda_{0j} + \sum_{i=1}^N \lambda_i q_{ij}, j=1,2,\dots,N$$

단,  $\lambda_{0j}$  : 노드 j로의 외부 도착율

$q_{ij}$  : 노드 i에서 j로의 전이확률

그리고 다음의 각 파라미터를 구해낸다.

$\lambda_{ij} = \lambda_i q_{ij}$  : 노드 i에서 노드 j로의 도착율

$p_{ij} = \lambda_{ij} / \lambda_j$  : 노드 j로 도착하는 트래픽 중에서 노드 i에서 온 트래픽의 비율

$\rho_i = \lambda_i / \mu_i$  : 노드 i의 트래픽 부하량

또한 다음 N개의 식을 풀면 각 노드별 도착 트래픽의 변동계수  $c_{aj}$ 를 구할 수 있다.

$$c_{aj}^2 = a_j + \sum_{i=1}^N c_{ai}^2 b_{ij}, j=1,2,\dots,N$$

단,  $a_j = 1 + w_j \{ (\rho_{0j} c_{0j}^2 - 1)$

$$+ \sum_{i=1}^N p_{ij} \{ (1 - q_{ij}) + q_{ij} \rho_i^2 x_i \} \}$$

$b_{ij} = w_j p_{ij} q_{ij} (1 - \rho_i^2)$

$x_i = 1 + (\max \{ c_{ai}^2, 0.2 \} - 1)$

$w_j = (1 + 4(1 - \rho_j)^2 (v_j - 1))^{-1}$

$v_j = (\sum_{i=0}^N p_{ij}^2)^{-1}$

위의 식을 풀어서 구한 각 노드별 도착율과 변동 계수를 이용하여, 각 노드별 도착 트래픽의 도착간격 시간의 평균과 분산을 구해낼 수 있다.

##### 2. 각 노드의 도착분포를 GPH 분포로 근사화

평균이 m, 분산이 v로 주어진 임의의 분포를 GPH 분포, 즉

$$X \sim \text{GPH}(\lambda, g) \text{ 단, } L \sim G(n)$$

로 근사화 시키면, L의 평균과 분산은 각각

$$E(L) = \lambda m \tag{1}$$

$$V(L) = \lambda^2 v - \lambda m \tag{2}$$

이 된다. L의 분포만 근사화시키면 임의의 분포가

GPH 분포로 근사화될 수 있는데 적당한 L의 분포로 음이항(negative binomial) 분포를 선택한다. 이것은 두 개의 파라미터로써 결정이 되고 변동계수의 값이 1보다 클 수도 있고 작을 수도 있기 때문에, 두 개의 파라미터로써 근사화할 수 있는 이산분포로서 적절하다. 파라미터 n, u를 갖는 음이항분포는 아래식

$$\Pr \{X=k\} = \binom{n+k-1}{n-1} \left(\frac{u}{1+u}\right)^k \left(\frac{1}{1+u}\right)^n,$$

$$k=0,1,2,\dots, \quad n, u > 0.$$

과 같이 표현되고 평균과 분산은 각각 nu, nu(1+u)이 된다. 이것과 위의 (1), (2)식을 비교하여

$$u = \lambda \frac{v}{m} - 2 \tag{3}$$

$$n = \lambda \frac{m}{u} \tag{4}$$

과 같이 파라미터값을 얻을 수 있다.

### 3. 각 노드의 서비스 분포를 GPH 분포로 근사화

교환기의 큐잉 네트워크 모형화 과정에 따르면, 각 노드에서의 서비스 시간(각 프로세서에서의 메시지 처리시간)은 고객(메시지)에 따라 다르며, 특정 고객에 대한 서비스 시간은 특정 상수값을 갖는다. 즉, 한 노드에서의 서비스 시간은 그 노드에 도착하는 고객의 종류와 수를 고려한 확률분포를 따른다. 따라서 2장에서 설명한 일반분포의 GPH 분포로의 근사화 방법을 이용하여 주어지는 서비스 시간 분포를 GPH 분포로 근사화한다.

### 4. 각 노드에서의 지연시간 계산

각 노드에서의 도착 분포가 GPH 분포로 근사화되었고 각 노드에서의 서비스 분포가 GPH 분포로 근사화되었으므로 각 노드는 GPH/GPH/1 큐로 표현이 된다. GPH/GPH/1 큐의 대기시간을 계산하기 위하여, 먼저 n번째 도착간격 시간  $A_n$ 과 서비스 시간  $B_n$ 이 각각  $GPH(\lambda_1, g_a)$ ,  $GPH(\lambda_2, g_b)$ 분포를 따른다고 하자. 이때 계산상의 편의를 위해  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 로 놓아도 분포의 일반성은 계속 유지된다. GPH/GPH/1 시스템에서의 최초 고객의 대기중의 지연시간  $W_q^0$ 가  $GPH(\lambda, g_q^0)$ 분포를 따른다고 하면, n번째 고객의 시스템 체류시간  $W^n$ 과 n번째 고객의 대기중의 대기시간  $W_q^n$ 은 각각  $GPH(\lambda, g_w^n)$ ,  $GPH(\lambda, g_q^n)^{(1)}$  (이때

$$g_w^n = g_q^n * g, \quad n=0,1,\dots \tag{5}$$

$$g_q^n = g_w^{n-1} \oplus g_a^*, \quad n=1,2,\dots \tag{6}$$

$$g^*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k+1} g(k+1), \quad n=1,2,\dots \tag{7}$$

$$g^*(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} g(k+1) + g(0) \tag{8}$$

$\oplus$ 는 nonnegative condition을 갖는 negative convolution)

를 따르게 되므로 다음의 과정에 의해 GPH/GPH/1 시스템에서의 대기시간의 안정상태 확률 분포를 계산할 수 있다.

(1) (7), (8)에 의해  $g_a^*$ 를 구하고 이것과  $g_s$ 를 각각 도착간격 시간의 확률분포와 서비스 시간의 확률분포로 갖는 GI/G/1 이산 대기시스템을 고려한다.

(2) GI/G/1 이산 대기시스템의 정상상태에서의 대기열과 시스템에서의 대기시간 분포를 (5), (6)을 적용하여 이산합수convolution 계산에 의해 계산한다. 먼저,

$$c(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} g_s(k+n) g_a^*(k) & n=1,2,\dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} g_s(k) g_a^*(k) & n=0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} g_s(k) g_a^*(k-n) & n=-1,-2,\dots \end{cases} \tag{9}$$

을 계산하고,  $c(n)$ 은 임의의 고객의 대기행렬에서의 대기시간이 주어져 있을 때, 그 대기시간에  $c(n)$ 의 확률 분포를 가지는 시간만큼 더함으로써, 바로 그 다음 고객의 대기행렬에서의 대기시간을 구하는데 사용된다.) 이것을

$$g_q(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} g_q(k) \sum_{r=-\infty}^{-k} c(r) & n=0, \\ \sum_{k=-\infty}^{n-1} g_q(n-k) c(k) & n=1,2,\dots \end{cases} \tag{10}$$

와 같이 다시 convolution함으로써, 그 다음 고객의 대기열에서의 대기시간의 분포를 구한다. 이때 FFT(Fast Fourier Transform) 알고리즘을 사용하고 초기의  $g_q(n)$ 은

$$g_q(n) = \begin{cases} 1 & n=0, \\ 0 & n=1,2,\dots \end{cases}$$

로 놓는다. (9), (10)의 계산을 반복적으로 수행하면서,  $g_q(n)$ 의 변화가 일정한 값보다 작으면, 정상상태로 간주한다.  $g_q$ 과  $g_s$ 을 다시 한번 convolution하여, 이산



시스템에서의 정상상태의 대기시간의 확률분포  $g_w$ 를 구한다.

(3) GPH/GPH/1 에서의 고객의 시스템 대기시간과, 대기 행렬 대기시간 정상분포를 다음과 같이 구한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{W_n^o \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} G_{ij}(k) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!}, \quad x > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{W^n \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} G^w(k) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!}, \quad x > 0$$

위의 과정을 보면, 대기시간을 계산하기 위한 모든 연산은 이산함수의 단순연산들 뿐이다. 이런 잇점 때문에 대기 시스템에서 도착과 서비스가 GPH 분포로 표현만 되면, 대기시간의 분포의 계산이 가능하게된다.

5. 교환기 내부에서의 총 지연시간 분포 계산

교환기 내부에서의 총 지연시간을 구하는 과정은 메시지들이 교환기내의 각 프로세서 사이를 이동하는 과정을 세마이 마코프 프로세스로 단순화시키고 이 세마이 마코프 체인에서 최초로 특정 상태로 전이되는 시간의 분포를 구하는 방식으로 이루어진다. 즉, 큐잉 네트워크의 각 노드에서의 지연시간 분포가 4절에서와 같이 계산될 수 있으므로, 전형적인 고객의 각 노드에서의 지연시간이 iid라고 가정하여 세마이 마코프 체인을 만들고 최초로 외부로 나가는 시간의 분포를 구하면 교환기 내부에서의 총 지연시간의 분포를 구할 수 있게 된다.

먼저 일반적인 세마이 마코프 프로세스를 간단히 살펴보자. 프로세스 X의 세마이 마코프 커널(semi-Markov kernel)  $R_{ij}$ 와 도함수  $r(t)$ 는

$$R_{ij}(t) = P\{T_{n+1} - T_n \leq t, X(T_{n+1}) = j | X(T_n) = i\},$$

$= P_{ij} H_{ij}(t) \quad t \geq 0, i, j \in S$  (단,  $P_{ij}$ 는 전이확률,  $H_{ij}(t)$ 는 전이시간의 분포)

$$r(t) = \frac{dR(t)}{dt}, \quad t \geq 0$$

로 주어진다. 또한, 임의의 시간 t에서 상태 i에 머물러 있을 확률  $C_i(t)$ 는

$$C_i(t) = P\{T_{n+1} - T_n \leq t | X(T_n) = i\}$$

$$= \sum_{j \in S} R_{ij}(t), \quad t \geq 0, \quad i \in S$$

와 같이 계산된다. 마코프 재생함수  $M(t)$ 와 밀도함수  $m(t)$ 는

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)}(t), \quad t \geq 0$$

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{(n)}(t), \quad t \geq 0$$

가 된다.

이 때, 전이시간의 분포함수  $H_{ij}$ 가 GPH 분포로 표현되면, 계산시 적분식의 계산없이 여러 함수를 계산해 낼 수 있다. 먼저, 일반 분포를 따르는  $H_{ij}$ 가

$$H_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{H}_{ij}(n) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad i, j \in S, \quad i, j \in S$$

의 GPH( $\lambda, \hat{H}$ )함수의 형태를 따른다고 가정하면, 세마이 마코프 커널  $R(t)$ 와 도함수  $r(t)$ 는

$$R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{R}(n) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0$$

$$\text{단, } \hat{R}_{ij}(n) = P_{ij} \hat{H}_{ij}(n), \quad n=0,1,2,\dots$$

$$r(t) = \frac{dR(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{r}(n+1) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \lambda, \quad t \geq 0$$

$$\text{단, } \hat{r}(0) = 0$$

$$\hat{r}(n) = \hat{R}(n) - \hat{R}(n-1), \quad n=1,2,\dots$$

가 된다.

위 식의 R처럼 행렬의 각 요소함수가 GPH 분포를 따를 때, 이 행렬함수를 GMPH(Generalized Matrix Phase Type)라 하고, GMPH( $\lambda, \hat{R}$ )로 표시한다. 그런데, 행렬함수  $R(t)$ 가 GMPH이면,

$$r^{(k)}(t) = \sum_{u=0}^{\infty} \hat{r}^{(k)}(u+1) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^u}{u!} \lambda, \quad k=2,3,\dots$$

$$\text{단, } \hat{r}^{(k)}(u) = \sum_{v=0}^u \hat{r}^{(k-1)}(u-v) \hat{r}^{(v)}, \quad k=2,3,\dots$$

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{m}(n+1) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \lambda, \quad t \geq 0$$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{M}(n) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0$$

$$\text{단, } \hat{m}(0) = I, \quad \hat{m}(n) = \sum_{v=0}^{n-1} \hat{m}(v) \hat{r}(n-v),$$

$$n=1,2,\dots$$

$$\hat{M}(n) = \sum_{v=1}^n \hat{m}(v), \quad n=1,2,\dots$$

가 되어 GMPH 형태의  $r^{(k)}(t)$ ,  $M(t)$ ,  $m(t)$ 를 얻을 수 있게 된다.

이러한 함수들을 이용하여,  $i$  상태에서 시작한 프로세스가 B 집합의 임의의 상태로 전이하는 데 소요되는 시간을 구할 수 있다. 먼저, R이 GMPH( $\lambda, d$ )이면, 프로세스 X의 상태전이확률  $Q_{ij}(t)$ 는 다음과 같이 표현된다<sup>(12)</sup>.

$$Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad t \geq 0$$

$$\text{단, } q(0) = I, \quad q(n) = \sum_{k=0}^n \widehat{m}(k) \widehat{d}(n-k),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\widehat{d}(n) = I - \text{diag}(\widehat{R}(n)1), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

상태집합 A에 속하는 상태  $i$ 에서 상태집합 B에 속하는 임의의 상태로 최초로 전이하는 데 소요되는 시간을  $T_{iB}$ 라 하면,

$$T_{iB} = \inf\{t : X(t) \in B \mid X(0) = i\}, \quad i \in A$$

로 표현된다. 상태집합 A에 속하는 상태에서만 전이하는 프로세스  $X_A$ 를 정의하고, 이 프로세스의 커널을  $R_{AA}$ 라 하면  $P(T_{iB} > t)$ 는

$P(T_{iB} > t) = (Q_A(t)1)_i$  단,  $Q_A(t)$ 는  $X_A$ 의 전이 확률가 된다. 그런데, R이 GMPH( $\lambda, d$ )라하면, 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$P(T_{iB} > t) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_A(n) 1 \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \right)_i$$

$$\text{단, } q_A(0) = I$$

$$q_A(n) = \sum_{k=0}^n \widehat{m}_A(k) \widehat{d}_A(n-k), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\widehat{d}_A(n) = I - \text{diag}(\widehat{R}(n)1), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$\widehat{m}_A(0) = I$$

$$\widehat{m}_A(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{m}_A(k) \widehat{r}_A(n-k), \quad n = 1, 2, \dots$$

상태  $i$ 에서 상태집합 B로의 최초 전이시간을 T라 하면, 전이시간의 분포는

$$P(T < t) = P(T_{iB} < t) = 1 - P(T_{iB} > t)$$

가 되며 이는 위의 결과를 이용하여 계산할 수 있다. 계산과정이 이산 함수의 덧셈 연산으로 표현되므로 수리적 계산이 가능하다. 따라서 최초 전이시간 T의 분포를 얻게 된다.

따라서, 큐잉 네트워크에서의 노드간 이동과정을 세마이 마코프 과정으로 근사화하면, 4.4절의 결과를 이용하여 각 노드에서의 지연시간 분포를 GPH 형태로 얻을 수 있으므로 위 식을 이용하면 교환기 내부에서의 총 지연시간을 구할 수 있다.

### V. 교환기에의 적용

이상에서 설명한 지연시간 분포를 구하는 과정을 TDX-10 ISDN 교환기의 호처리 과정에 대한 큐잉 네트워크 모형에 적용하여 보았다. 여기에서의 지연시간은 ISAP에 도착한 메시지가 교환기를 떠나기까지의 시간이다. 추후 여러가지의 실제 지연시간 항목에 대하여 분포를 구하게 될 것이며 그 전 단계로써 최초 전이시간만을 대상으로 하였다.

여러가지 파라미터 값을 변화시키면서 지연시간 분포를 계산하고 시뮬레이션을 수행하여 두 값을 비교하였다. 시뮬레이션 패키지로는 SIMAN을 사용하였다. 대상이 되는 큐잉 네트워크 모형은 3.3절에서 주어졌으며 노드간 전이확률 행렬은 표 1에 주어졌다. 외부로부터의 도착은 모형의 2, 9번 노드에서만 발생하며 포아송 과정을 따른다고 가정하였다. 각 노드의 서비스 분포는 SIMAN에서 지원이 용이한 분포함수에 맞추어 지수 분포와 Erlang-2 분포를 가정하였다(추후 메시지별 처리 시간이 측정되면 그에 따른 서비스 분포가 입력되어야 할 것이다). 이 때 각 노드의 평균 서비스 시간은 모든 노드에서의 점유율이 동일하도록 조정하였다.

그림 4 - 그림 6은 각 노드의 점유율이 각각 0.4, 0.8, 0.9인 경우의 계산결과 및 시뮬레이션 결과를 나타내 주고 있다.

그림 4 - 그림 6에서 보듯이 체류시간 분포가 시뮬레이션 결과와 약간의 차이가 있지만 대체적으로 잘 들어맞는 것을 알 수 있다. 또한 시뮬레이션 값과 계산값의 차이가, 노드의 점유율이 증가하여도 별 차이가 없으며 점유율이 높아도 상당히 잘 들어맞는 것을 알 수 있다.

점유율이 0.4인 경우 계산값에 의한 분포함수는 시뮬레이션 값에 의한 분포함수보다 항상 작게 나타나고 있다. 그런데 점유율이 0.9인 경우 계산값에 의한 분포함수는 1000 msec 이후로는 시뮬레이션 값에 의한 분포함수보다 크게 나타나고 있다. 이는 점유율이 낮을 때는 실제 값에 비하여 계산값이 지연시간을 과대평가하다가

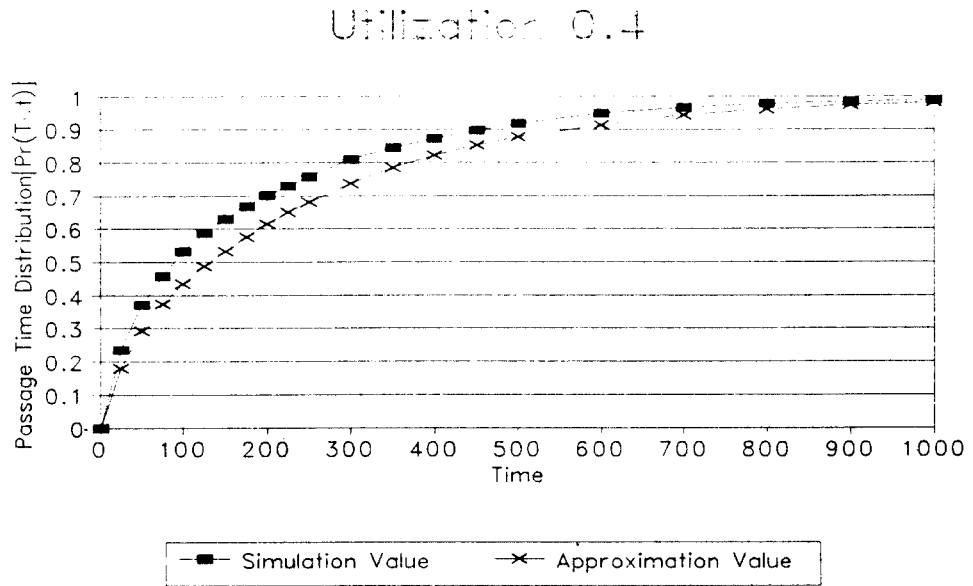


그림 4. 점유율 0.4인 경우의 지연시간  
Fig. 4. Delay time for utilization 0.4

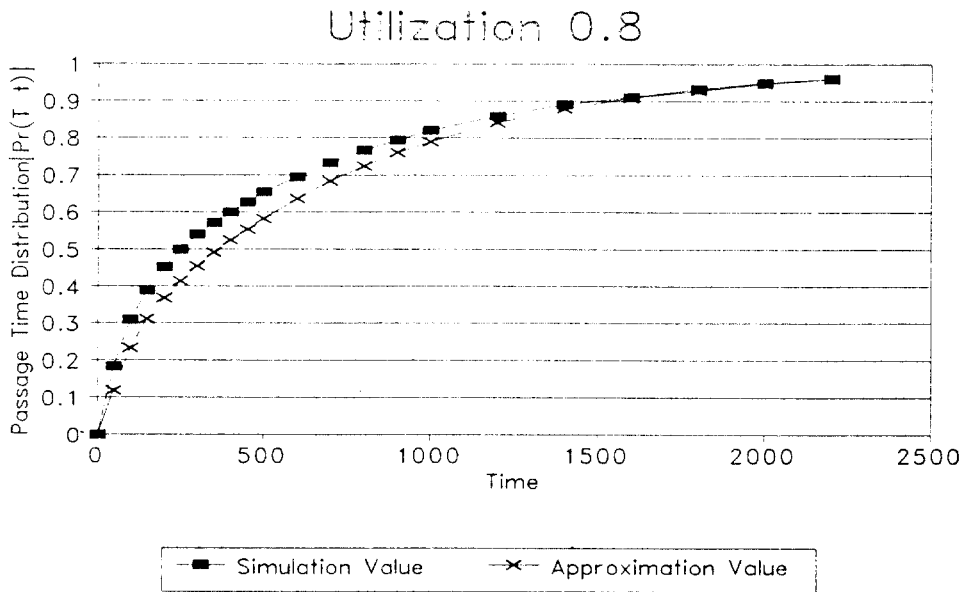


그림 5. 점유율 0.8인 경우의 지연시간  
Fig. 5. Delay time for utilization 0.8

## Utilization 0.9

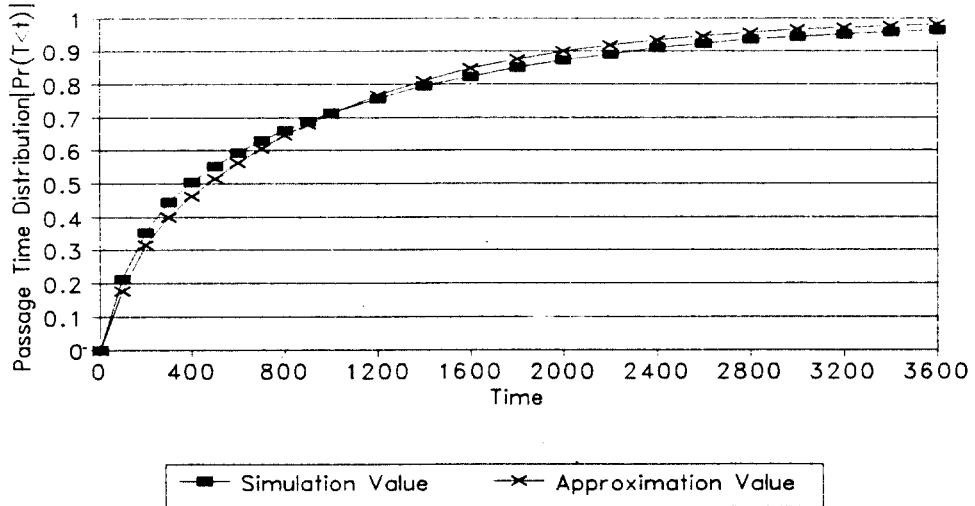


그림 6. 점유율 0.9인 경우의 지연시간  
Fig. 6. Delay time for utilization 0.9

점유율이 높아지면 과소평가한다는 것을 의미한다. 그러나 이러한 오차는 그리 크지 않으며, 상대적인 오차는 점유율이 높은 경우에 더 작게 나타난다.

### VI. 결 론

본 연구는 교환기의 지연시간 분포를 구하는 분석적인 방법을 제시하는 것을 목표로 하여, 교환기에 대한 큐잉 네트워크 모형에서의 지연시간 분포를 이론적인 근거하에서 근사화하는 데에 초점을 맞추어 진행하였다. 전체적인 분석은 고객들이 큐잉 네트워크 각 노드 사이를 이동하는 과정을 세마이 마코프 과정으로 단순화시키고 세마이 마코프 체인에서 최초로 특정 상태로 전이되는 시간의 분포를 구하는 방식으로 행해졌다. 이 때 개별노드에서의 체류시간 분포를 GPH/GPH/1 대기시스템으로 근사화하여 시스템에서의 지연시간을 구하는 방법이 제시되었다. 타당성 검증을 위해 전체적인 과정을 컴퓨터 프로그램으로 작성하여 지연시간 분포를 계산하고 이를 시뮬레이션 결과와 비교하였다. 비교 결과 본 연구의 방법이 지연시간 분포를 근사적으로 잘 표현하는 것을 알

수 있었다.

본 연구에서는 ISDN 교환기, 이동통신 교환기등의 종합적인 성능분석에 필요한 방법론적인 토대를 제시하였으며, 이는 복잡한 트래픽하의 통신망 분석에서도 간단한 성능분석 도구로 활용될 수 있을 것이다. 또한 GPH 분포를 이용한 근사화는 다양한 유형의 대기 시스템을 분석하는 데에 적절하게 사용될 수 있을 것이다. 현재 계산의 효율성과 정확성을 높이는 연구가 계속되고 있으며, 보다 구체적으로 교환기에 적용하는 과정이 TDX-10 이동통신 교환기를 대상으로 수행될 예정이다.

### 참고문헌

1. Boxma, O.J. and H. Daduna, "Sojourn Times in Queueing Newtworks", in *Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems*(ed. H. Takagi), Elsevier, 1990.
2. Harrison, J.M. and V. Nguyen, "The QNET method for two-moment analysis of open

queueing networks." *Queueing Systems*, vol. 6, pp.1-32, 1990.

3. Robertazzi, T. G., *Computer Networks and Systems : Queueing Theory and Performance Evaluation*, Springer-Verlag, 1992.

4. Ross S. M., *Stochastic Process*, John and Sons, Inc., 1983.

5. Schassberger, R., and H. Daduna, "Sojourn times in queueing networks with multiserver nodes," *J. Appl. Prob.*, vol. 24, pp.511-521, 1987.

6. Shanthikumar J. G. , "Bilateral Phase-Type Distributions," *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 32, pp.119-136, 1985.

7. Shanthikumar J. G. and J. A. Buzacott, "The time spent in a dynamic job shop," *European J. Oper. Res.*, vol. 17, pp.215-216, 1984.

8. Shanthikumar, J. G. and U. Sumita, "Approximations for the time spent in a dynamic job shop with applications to due-date assignment," *Int. J. Prod. Res.*, vol. 26, pp.1329-1352, 1988.

9. Walrand J. and P. Varaiya, "Sojourn times and the overtaking conditions in Jacksonian networks," *Adv. in Appl. Prob.*, vol. 12, pp.1000-1018, 1980.

10. Whitt, W., "The Queueing Network Analyzer," *B. S. T. J.*, vol. 62, pp. 2779-2814, 1983.

11. 윤복식, 박광우, 이창훈, "GPH 분포에 의한 확률적 근사화," *한국경영과학회지*, 19권 1호, pp.85-98, 1994.

12. 윤복식, "일반적인 큐잉 네트워크에서의 체류시간 분포의 근사화," *한국경영과학회지*, 19권 3호, pp.93-109, 1994.



尹 馥 植(Bok Sik Yoon) 정회원

1957년 10월 31일생.  
 1980년 2월 : 서울대학교 산업공학과 졸업(공학사)  
 1982년 2월 : 서울대학교 대학원 산업공학과 졸업(공학석사)

1988년 12월 : University of California, Berkeley, Dept. of IE & OR 졸업(Ph. D.)  
 1982년 9월~1983년 8월 : 국토개발연구원 연구원  
 1989년 2월~1989년 8월 : 한국전자통신연구소 선임연구원  
 1989년 8월~현재 : 홍익대학교 기초과학과(부교수)  
 ※주관심 분야 : 확률적 성능분석, 큐잉네트워크, 교환기의 트래픽 분석, 확률적 최적화



李 昶 勳(Chang Hoon Lie) 정회원

1946년 12월 20일생  
 1970년 2월 : 서울대학교 원자핵공학과(공학사)  
 1974년 8월 : 미국 캔사스 주립대학교 대학원 산업공학과(공학석사)

1977년 3월 : 미국 캔사스 주립대학교 대학원 산업공학과(공학박사)  
 1981년 2월~1982년 12월 : 국방부 정책자문위원  
 1983년 1월~1983년 12월 : 미국 캘리포니아대학교(버클리) 교환교수  
 1984년 9월~1989년 3월 : 체신부 정책자문위원  
 1991년 1월~1992년 12월 : 대한 산업공학회 부회장  
 1977년 4월~현재 : 서울대학교 교수  
 ※주관심 분야 : 품질 및 신뢰성공학, 품질 보증, Stochastic System의 성능평가



白章鉉(Jang Hyun Baek) 정희원

1963년 9월 28일생

1986년 2월 : 서울대학교 산업공학과 학사

1988년 2월 : 서울대학교 산업공학과 석사

1989년 6월~현재 : 한국전자통신연구소 이동망구조연구실 선임연구원

1992년 3월~현재 : 서울대학교 산업공학과 박사과정