

# 이산형 자연관측변환에 있어서 불확정성의 원리에 관한 연구

정회원 김 태 수\*

## A Study on Uncertainty Principle in Natural Observation Transform of Discrete Type

Taeso Kim\* *Regular Member*

요 약

파형의 이론적 해석은 주로 푸리에해석 방법에 의하여 이루어져왔다. 그러나, 푸리에해석 방법은 인식문제 등의 시시각각 변하는 파형의 형태에 관한 문제에 있어서는 불합리성을 가진다. 이러한 푸리에해석이 가지는 문제점을 개선하기 위한 방법으로 자연관측변환이 제안되었다. 본 논문에서는 이산신호에 대한 불확정성을 표현하였고, 이산형 자연관측변환에 대한 불확정성의 원리가 성립함을 입증하였다. 또한, 자연관측변환의 신호해석 방식이 푸리에변환을 이용한 해석 보다 더 정밀한 해석 방식임을 밝혔다.

### ABSTRACT

Theoretical analysis of waveform has been achieved by using Fourier analysis method. But Fourier analysis has irrational properties for the problems of time-varying waveform types in recognition problems. In order to improve the problems, the natural observation theory has been proposed. In this paper, the uncertainty principle in discrete signals is presented and the uncertainty principle of discrete natural observation transform is proved. Furthermore it is showed that the natural observation transform is minute method than the analysis using Fourier transform.

### I. 서 론

파속의 폭과 운동량 확률분포의 폭에 대한 관계에 있어서 불확정성의 원리가 존재함을 W. Heisenberg가 밝힌 이래, 여러 다른 분야에 있어서도 동일한 관계가 성립함이 알려졌고, 같은 입장에서 논의가 계속되어왔다<sup>[1]-[5]</sup>. 이 원리를 이론적으로 정식화하기 위해서는 대상으로 하는 두 물리량을 각각 확률변수로서 잡아서 그들의 분산의 곱을 취했을 때의 값이 일정치 미만으로 될 수밖에 없다는 것을 증명하는 것이다.

푸리에변환의 측면에서는 시간 축  $t$ 상에 있어서 파형  $f(t)^2$  값으로부터 구한 분산  $D_t^2$ 과 각주파수

$\Omega$ 상에 변환된 함수의 분포  $|F(j\Omega)|^2$  값으로부터 구한 분산  $D_\Omega^2$ 을 구하여 이들의 곱이

$$D_t^2 D_\Omega^2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (1)$$

로 되는 식에 의하여 평가된다. 따라서, 푸리에변환은 시간  $t$ 와 각 주파수  $\Omega$  사이에 불확정성의 원리가 성립하게 된다.

파형은 주로 시간의 함수로 기술되며, 이러한 파형의 해석을 행하는데 유력한 수단으로 이용된 푸리에 해석법에서는 파형을 주파수축상의 분포로 해서 등가적으로 표현하는 방식을 취하여 왔다. 그러나, 이것을 엄밀하게 실행하려고 하면, 과거부터 현

\* 위덕대학교 정보통신공학과(e-mail:tskim@viro.uiduk.ac.kr)  
논문번호 : 98466-1027, 접수일자 : 1998년 10월 27일

재까지 파형의 양상을 주지해야 함을 물론 미래의 형태까지도 알고 있어야만 된다. 종래, 현재를 특정 시하지 않을 경우 푸리에 해석이 널리 이용되어 왔으나, 정보과학의 발달과 함께 인식문제 등을 다루는 신호처리 분야에서는 현재의 시점에서 갖는 문제의 의미가 대단히 중요하게 취급된다. 예를 들어, 현재의 입력 파형의 양상을 파악하는 당면 문제에서는 과거와 미래의 양상보다는 현재를 아는 것이 중요시된다. 이러한 측면에서 푸리에해석법의 비합리성이 지적된다. 그러므로 지금까지 이러한 문제를 해결하기 위하여 running spectrum 개념이 이용되어 왔다.<sup>[1]</sup> 또한, [1]에서는 파형 중에 포함된 스펙트럼과 이들의 시간적 추이에 착안하여 푸리에해석법이 가지는 모순 점을 보완한 자연관측법 이론을 제안해 왔고, 또한 연속 시간 신호에 대한 자연관측 변환에 있어서 불확정성의 원리가 성립함을 보여왔다. 그러나, 아직 이산신호에 대한 불확정성과 더불어 이산형 자연관측변환에 대한 불확정성의 원리에 대해서는 해석된 바 없다. 따라서, 본 논문에서는 이산형 자연관측변환에 있어서 불확정성의 원리가 성립함을 보이고, 또한, 이산신호 파형에 대한 이들의 관계를 유도한다.

## II. 이산형 자연관측변환

관측 계의 임펄스응답을 각각  $u_k, v_k$ 라고 가정하면, 임의의 파형  $f_n$ 에 대한 관측 계의 출력  $a_n, b_n$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>[8]</sup>

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k f_{n-k} \\ b_n &= \sum_{k=0}^{\infty} v_k f_{n-k} \end{aligned} \quad (2)$$

(2)식을 만족하는  $a_n, b_n$ 을 도출하기 위해서, 임펄스응답  $u_k, v_k$ 과 파형  $f_n$ 과의 사이에  $a_n + b_n = f_n$ 으로 되는 관계가 성립하려면,  $u_k + v_k = \delta_k$ 이어야만 됨이 분명하다. 단,  $\delta_k$ 는  $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k = 1, (\delta_k = 0, k \neq 0)$ 로 되는 식을 만족하는 델타함수이다. 따라서, (2)식을 만족하기 위한 조건은

$$\begin{aligned} U(z) + V(z) &= 1 \\ |U(e^{j\omega})|^2 + |V(e^{j\omega})|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 여기서,  $U(z), V(z)$ 는 각각 임펄스응답  $u_k,$

$v_k$ 의 z변환이다. 그리고,  $\omega = \Omega T$ 이고, T는 샘플링 주기이다. 각 관측 계의 전달함수는 [8]에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(z) = \frac{1}{1+W(z)}, \quad V(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)} \quad (4)$$

여기서,  $W(z)$ 는 단위원 상에서 임의의 순허수치를 갖는 복소함수이다. 실제로 이러한 함수는 무수히 존재한다. 그러나,  $U(z), V(z)$ 에 관한 (3)식의 두 조건을 만족하는  $W(z)$ 는

$$W(z) = \frac{C(z-1)}{z+1} \quad (5)$$

의 경우로 한정된다. 위 식에서 계수 C를 제외한 분모 분자 항이 바뀌어도 성립하나 본 논문에서는 (5)식의 경우만을 취급한다. (5)식을 (4)식에 대입하여 얻어지는 전달함수  $U(z), V(z)$ 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(z) = \frac{z+1}{(C+1)z - (C-1)} \quad (6)$$

$$V(z) = \frac{Cz - C}{(C+1)z - (C-1)} \quad (7)$$

연속형 자연관측법의 원시관측계 ( $\int_0^{\infty} u(t)dt = 1$ )에 대응되는 이산형 자연관측법의 초기관측계 ( $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = 1$ )를 가정하여, 원시관측계의 연속시간  $t = kT$ 에서 샘플 파형을 정하여 관측 계의 임펄스응답  $b_k$ 의 지수부와 비교하여 계수 C를 구하면 다음과 같다.

$$C = \frac{1 + e^{-T/s}}{1 - e^{-T/s}} \quad (8)$$

여기서, s는 임의의 정수이다. [8]로부터 근접형, 평형형 이산자연관측변환을 전달함수  $U(z), V(z)$ 를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_m(z) &= U_m(z)F(z) = V(z)^m U(z)F(z) \\ B_m(z) &= V_m(z)F(z) = U(z)^m V(z)F(z) \end{aligned} \quad (9)$$

또한, (9)식에 나타낸 이산자연관측변환에 대한 역변환인 이산형 기본 관측치  $a_{m,n}$  및  $b_{m,n}$ 으로부터 파

형  $f_n$ 은 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = f_n \quad (10)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{m,n} = f_n$$

다음 장에서는 평균이산시간, 분산, 이산푸리에변환에 대한 불확정성의 원리를 보인다.

### III. 이산 등가시점수를 이용한 푸리에변환에 있어서 불확정성의 원리

3.1. 이산 푸리에변환에 있어서 불확정성 임의의 파형  $f(n)$ 에 대하여, 평균이산시간  $\bar{n}$ 을

$$\bar{n} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n f^2(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f^2(n)} \quad (11)$$

으로 정의하면, 이산신호  $f(n)$ 에 대한 분산  $(\Delta n)^2$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\Delta n)^2 = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-\bar{n})^2 f^2(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f^2(n)} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 f^2(n)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f^2(n)} - (\bar{n})^2 \quad (12)$$

(12)식을 푸리에변환과 Parseval의 등식에 의하여 다시 쓰면,

$$(\Delta n)^2 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} |F'(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} - (\bar{n})^2 \quad (13)$$

위 식에서  $(\bar{n})^2$ 은 일반성을 잃지 않게 평행 이동시켜서 0으로 놓을 수 있다. 그리고, 분자식을 다음과 같이 바꾸어 표현할 수 있다. 즉,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \omega F(e^{j\omega}) F'(e^{j\omega}) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\omega F(e^{j\omega})|^2 d\omega \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |F'(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (14)$$

(14)식의 좌변에서

$$\int_{-\pi}^{\pi} \omega F(e^{j\omega}) F'(e^{j\omega}) d\omega = \left[ \frac{1}{2} \omega F^2(e^{j\omega}) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F^2(e^{j\omega}) d\omega \quad (15)$$

$$= \pi F^2(e^{j\pi}) - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F^2(e^{j\omega}) d\omega$$

또한,  $F(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} F_a(j\Omega)$ ,  $|\omega| \leq \pi$  임으로 (15)식 우변의 첫 항도 다음과 같이 구해진다.

$$\left[ \omega \frac{F^2(e^{j\omega})}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi F^2(e^{j\pi}) \quad (16)$$

여기서,  $nf(n) \leftrightarrow jF'(e^{j\omega})$ 임으로, Parseval의 등식에 의하여 (17)식과 같이 표현된다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F'(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |f(n)|^2 \quad (17)$$

그리고, Schwarz부등식에 의하여

$$\frac{1}{2\pi} |\pi F^2(e^{j\pi}) - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F^2(e^{j\omega}) d\omega|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\omega F(e^{j\omega})|^2 d\omega \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |f(n)|^2 \quad (18)$$

로 된다. 따라서, 분산은 (19)식의 관계와 같다.

$$(\Delta n)^2 \geq \frac{\frac{1}{2\pi} |\pi F^2(e^{j\pi}) - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F^2(e^{j\omega}) d\omega|^2}{\int_{-\pi}^{\pi} |\omega F(e^{j\omega})|^2 d\omega \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (19)$$

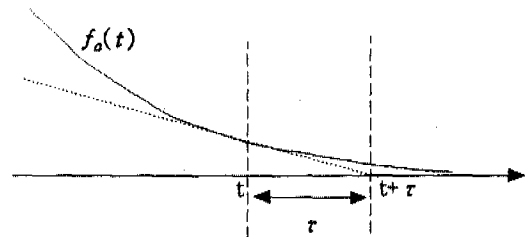


그림 1. 연속시간파형에 대한 시점수( $\tau$ )  
Fig. 1. Time-constant( $\tau$ ) of continuous time waveform

신호  $f(t)$ 가  $|\omega| = \sigma$ 에 대하여  $F_a(j\Omega) = 0$  이라고 가정하면,  $|\omega| = \pi$ 에서  $F(e^{j\omega}) = 0$ 이다.

한편,  $|F(e^{j\omega})|^2$ 은  $\omega$ 의 우함수이므로,  $\omega$ 의 분산을 구하면

$$(\Delta \omega)^2 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \omega^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (20)$$

으로 된다. 이들의 관계를 알아보기 위하여 이산시간에 대한 분산과 주피수에 대한 분산의 곱으로 나타내면

$$(\Delta n)^2 (\Delta \omega)^2 \geq \frac{1}{8} \pi \quad (21)$$

$$\Delta n \Delta \omega \geq \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}$$

과 같이 불확정성의 관계가 얻어진다.

$$y[n] \cong \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n T f(k) \quad (26)$$

3.2. 이산 등가시점수

그림 1에서 보이는 연속시간 파형  $f_a(t)$ 를 고려 하자. 그러면, 미분과 기울기의 관계에서  $f_a'(t) = -\frac{f_a(t)}{\tau}$ 로 표현할 수 있다. 여기서,  $\tau$ 가 의미하는 것은 현시점에서 파형의 기울기가 감소하는 방향으로 계속 나아가서 그 크기가 없어 질 때까지의 시간폭이다. 위의 관계식으로부터  $\tau = -\frac{f_a(t)}{f_a'(t)}$ 로 된다. 따라서,  $\tau$ 는 시간에 관계없는 일정한 값으로 된다. 여기서, 전 시간구간( $-\infty \sim \infty$ )에서 그 적분이 1이 되는 무게함수를 정의하고, 일반 파형  $f(t)$ 대한  $\tau$ 의 자승에 대한 무게평균치를 구하면 다음 식과 같다.<sup>[7]</sup>

$$(\delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} (f'(t))^2 dt} \quad (22)$$

신호  $f(t)$ 의 도함수  $y_a(t) = f'(t)$ 의 이산치  $y[n] = y_a(nT)$ 를  $f_a(t)$ 의 이산치  $f[n] = f_a(nT)$ 라고 하자. 만일,  $T$ 가 충분히 작다고 가정하면,

$$f'(t) \cong \frac{f(t) - f(t-T)}{T} \quad (23)$$

과 같이 표현할 수 있다. 여기서,  $t = nT$ 라고 하면,

$$y[n] \cong \frac{1}{T} (f[n] - f[n-1]) \quad (24)$$

으로 나타낼 수 있고, 또한 위 식을 제1차분 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\Delta f[n] = f[n] - f[n-1] \quad \text{즉,} \quad y[n] \cong \frac{1}{T} \Delta f[n].$$

적분에 있어서도  $t = nT$ 로 놓고 이산치를 구하여 합계로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} y(nT) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-nT}^{nT} f(\tau) d\tau \\ &\cong \lim_{n \rightarrow \infty} T (f(-nT) + \dots \\ &\quad + f(T) + f(2T) + \dots + f(nT)) \end{aligned} \quad (25)$$

따라서, 이산치의 적분은 다음 식으로 표현된다.

(22)식에 대하여 (24)식과 (26)식으로부터 이산 등가시점수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} (\delta n)^2 &= \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} T \{f(k)\}^2}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} T \left\{ \frac{f(k) - f(k-1)}{T} \right\}^2} \\ &= \frac{T^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^2(k)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} (f(k) - f(k-1))^2} \end{aligned} \quad (27)$$

과 같다. 여기서,  $f(k)$ 의 이산푸리에변환을  $F(e^{j\omega})$ 로 두면 Parseval의 등식에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(\delta n)^2 = \frac{T^2 \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} |1 - e^{-j\omega}|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (28)$$

다음 장에서는 이산 자연관측변환에 있어서 불확정성의 원리가 성립함을 보인다.

IV. 이산형 자연관측변환에 있어서 불확정성의 원리

4.1. 관측차수의 평균과 분산

본 절에서는 이산 근접형 자연관측변환에 국한하여 설명한다. 우선, 이산 근접형 기본관측 Filter의 전달함수를  $U_m(z)$ 로 표시하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>[8]</sup>

$$U_m(z) = V(z)^m U(z) \quad (29)$$

여기서,  $m$ 은 임의의 파형을 관측하여, 축차 (successive) 자연관측에 의하여 파형을 근사시키는데 있어서 자연관측 계의 차수를 의미하며,  $U(z)$ 와  $V(z)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{e^{\beta T} + 1}{(C+1)e^{\beta T} - (C-1)} \\ V(z) &= 1 - U(z) \\ &= \frac{C(e^{\beta T} - 1)}{(C+1)e^{\beta T} - (C-1)} \end{aligned} \quad (30)$$

샘플링주기를  $T$ 로 하여  $z = e^{\beta T}$ 를 대입하면,  $U_m(z)$ 는

$$U_m(z)|_{z=e^{pT}} = V(z)^m U(z)$$

$$= \left( \frac{C(e^{pT}-1)}{(C+1)e^{pT}-(C-1)} \right)^m \cdot \frac{e^{pT}+1}{(C+1)e^{pT}-(C-1)} \quad (31)$$

$$= \frac{C(e^{pT}-1)^m(e^{pT}+1)}{\{(C+1)e^{pT}-(C-1)\}^{m+1}}$$

로 된다. 이 전달함수  $U_m(z)$ 의 절대값의 제곱에 대한 전체의 합은 1이다. 즉,

$$\sum_{m=0}^{\infty} |U_m(z)|_{z=e^{pT}}^2 =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{(e^{pT}+1)}{(C+1)e^{pT}-(C-1)} \cdot \left( \frac{C(e^{pT}-1)}{(C+1)e^{pT}-(C-1)} \right)^m \right|^2$$

$$= 1 \quad (32)$$

단, 위 식의 무한 합은 다음의 조건하에서 만족한다.

$$\left| \frac{C(e^{pT}-1)}{(C+1)e^{pT}-(C-1)} \right| < 1.$$

다음은  $m$ 에 대하여 값을 구하면 다음과 같다.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m |U_m(z)|^2$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} m \left| \frac{(e^{pT}+1)}{(C+1)e^{pT}-(C-1)} \cdot \left( \frac{C(e^{pT}-1)}{(C+1)e^{pT}-(C-1)} \right)^m \right|^2$$

$$= \left| \frac{(e^{pT}+1)C(e^{pT}-1)}{[(C+1)e^{pT}-(C-1)]^2 \cdot \left( \frac{(C+1)e^{pT}-(C-1)-C(e^{pT}-1)}{(C+1)e^{pT}-(C-1)} \right)^2} \right|^2$$

$$= \left| \frac{C(e^{pT}-1)}{e^{pT}+1} \right|^2 \quad (33)$$

여기서,  $pT=j\omega$ 임으로,

$$\sum_{m=0}^{\infty} m |U_m(z)|^2 = \left| \frac{C C(\cos \omega + j \sin \omega) - 1}{\cos \omega + j \sin \omega + 1} \right|^2 \quad (34)$$

$$= \frac{C^2(1 - \cos \omega)}{1 + \cos \omega}$$

로 된다. 또한,  $m^2$ 에 대하여 동일한 과정을 반복하여 다음의 식을 얻는다.

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 |U_m(z)|^2 = \left| \frac{C\{2C(1-e^{2pT})^2 - (1-e^{2pT})\}}{(1+e^{2pT})^2} \right|^2 \quad (35)$$

따라서, 기본관측계열  $a_{m,n}$ 에 대하여  $\bar{m}$ 의 평균치를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{m} = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} m \|a_m\|^2}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \|a_m\|^2} \quad (36)$$

여기서,  $a_m$ 의 Norm  $\|a_m\|$ 은  $\|a_m\| = \sqrt{(a_m, a_m)}$ 으

로 정의한다.

(36)식은 (29)식, (33)식과 이산 푸리에변환에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{m} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} m |U_m(e^{j\omega})|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} |U_m(e^{j\omega})|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (37)$$

$$= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{C(e^{pT}-1)}{e^{pT}+1} \right|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

그리고,  $m^2$ 에 대하여도 같은 계산을 행하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\bar{m}^2 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} m^2 |U_m(e^{j\omega})|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} |U_m(e^{j\omega})|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (38)$$

$$= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{C\{2C(1-e^{2pT})^2 - (1-e^{2pT})\}}{(1+e^{2pT})^2} \right|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

그러므로,  $m$ 의 분산은 다음 식과 같이 표현된다.

$$(\Delta m)^2 = \bar{m}^2 - (\bar{m})^2$$

$$= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{C\{2C(1-e^{2pT})^2 - (1-e^{2pT})\}}{(1+e^{2pT})^2} \right|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (39)$$

$$- \left[ \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{C(e^{pT}-1)}{e^{pT}+1} \right|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \right]^2$$

위에서는 관측치수  $m$ 의 평균치와 분산  $(\Delta m)^2$ 을 구했지만, 다음절에서는 이들을 이용하여 관측치수와 시간과의 사이의 불확정성 관계를 밝힌다.

#### 4.2. 관측치수와 이산시간과의 불확정성 관계 Schwarz의 부등식에 의하여

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{C(e^{pT}-1)}{e^{pT}+1} \right|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega \right\}^2 \quad (40)$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{C(e^{pT}-1)}{e^{pT}+1} \right|^4 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

의 관계가 성립한다. (40)식을 (39)식에 대입하면 다음 관계식이 구해진다.

$$(\Delta m)^2 \geq \bar{m} + (\bar{m})^2 \quad (41)$$

$T$ 가 작다고 가정하면, 다음과 같이

$$(\delta n)^2 \cdot \overline{m} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|C(e^{j\omega T} - 1)|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{e^{j\omega T} + 1}}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|1 - e^{-j\omega T}|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{T}} \quad (42)$$

$$\cong (s - \frac{T}{2})^2$$

된다. (41)식으로부터  $(\delta n)^2$ 을 작게 하려면,  $\overline{m}$ 을 크게 하여야 만 되므로, (41)식으로부터  $(\Delta m)^2$ 도 크게 할 수밖에 없다. 반대로,  $(\Delta m)^2$ 을 작게 하려면, (41)식으로부터  $\overline{m}$ 를 작게 하여야만 하므로, (42)식으로부터  $(\delta n)^2$ 은 크게 될 수밖에 없다. 따라서,  $(\Delta m)^2$ 과  $(\delta n)^2$ 은 동시에 작게 될 수 없으므로, 불확정성의 관계에 있다고 할 수 있다.

4.3. 계산 예

본 절에서는 이산 신호의 간단한 예를 사용하여 이산 근접형 자연관측변환의 불확정성의 원리를 만족함을 보이고자 한다.

예제 1) 연속신호  $f_a(t)$ 가 다음과 같을 때, 즉,

$$f_a(t) = E \frac{\sin^2(2\pi Wt)}{(2\pi Wt)^2} \quad (43)$$

이 신호에 대한 푸리에변환은 다음과 같이 표현된다.

$$F_a(j\Omega) = \begin{cases} \frac{E}{2W} (1 - \frac{|\Omega|}{4\pi W}), & |\Omega| \leq 4\pi W \\ 0, & |\Omega| > 4\pi W \end{cases} \quad (44)$$

$f(n)$ 이  $f_a(t)$ 의 샘플치  $f_a(nT)$ 라고 하자. 또한 주기  $T = \frac{1}{4W}$ 로 정한다.

그러면, 신호  $f(n)$ 을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(n) = E \frac{\sin^2(n\pi/2)}{(n\pi/2)^2} \quad (45)$$

$f(n)$ 의 푸리에변환은 다음과 같이 유도된다.

$$F(e^{j\omega}) = F_a(j\Omega)/T \quad (46)$$

$$= 2E(1 - \frac{|\omega|}{\pi}), \quad \text{for } |\omega| \leq \pi$$

위 신호에서 신호의 에너지가 1이고,  $E^2$ 이 3/4이라고 가정하면, 푸리에변환에 대한 시간 폭과 주파수 폭을 곱하면 다음과 같다.

$$D_n^2 = \frac{32E^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(\frac{n\pi}{2})}{n^2} = \frac{4}{\pi^2} \quad (47)$$

$$D_w^2 = 8E^2 \int_0^{\pi} (\omega^2 - 2\frac{\omega^3}{\pi} + \frac{\omega^4}{\pi^2}) d\omega = \frac{1}{5} \pi^3$$

따라서,  $D_n D_w = 2\sqrt{\frac{\pi}{5}} > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  임으로 불확정성의 원리를 보인다.

이산형 근접형 자연관측변환을 적용하면,

$$\overline{n} = 0, \quad (\Delta n)^2 = \infty \quad \text{이고,} \quad (\delta n)^2 = \frac{10T^2}{\pi^2} \quad \text{이다.}$$

또한, 평균  $\overline{m}$ 은

$$\overline{m} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|C(e^{j\omega T} - 1)|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{e^{j\omega T} + 1}}{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega} \quad (48)$$

$$= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|C(e^{j\omega T} - 1)|^2 |2E(1 - \frac{|\omega|}{\pi})|^2 d\omega}{e^{j\omega T} + 1}}{\int_{-\pi}^{\pi} |2E(1 - \frac{|\omega|}{\pi})|^2 d\omega}$$

$$= \frac{C^2 \pi^2}{40}$$

이다. 그리고,  $\overline{m^2}$ 은  $pT = j\omega$ 로 놓고 정리하면 다음과 같다.

$$\overline{m^2} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|C\{2C(1 - e^{j\omega})^2 - (1 - e^{j2\omega})\}|^2 |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}{(1 + e^{j\omega})^2}}{\int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

$$= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|C\{2C(1 - e^{j\omega})^2 - (1 - e^{j2\omega})\}|^2 |2E(1 - \frac{|\omega|}{\pi})|^2 d\omega}{(1 + e^{j\omega})^2}}{\int_{-\pi}^{\pi} |2E(1 - \frac{|\omega|}{\pi})|^2 d\omega} \quad (49)$$

$$= \frac{3}{2} (C\pi)^2 \{ \frac{(1 + C\pi)}{10} + \frac{(C\pi)^2}{35} \}$$

여기서,  $m$ 의 분산은

$$(\Delta m)^2 = \overline{m^2} - (\overline{m})^2 \quad (50)$$

$$= \frac{3}{2} (C\pi)^2 \{ \frac{(1 + C\pi)}{10} + \frac{(C\pi)^2}{35} \} - (\frac{C^2 \pi^2}{40})^2$$

으로 구해진다. 따라서, 이들의 관계는

$$(\Delta m)^2 > \overline{m} + (\overline{m})^2 = \frac{C^2 \pi^2}{40} + (\frac{C^2 \pi^2}{40})^2 \quad (51)$$

$$= \frac{C^2 \pi^2}{1600} (40 + C^2 \pi^2)$$

과 같이 나타내어진다. 만약, 신호의  $W$ 가 크다면,  $(\delta n)^2$ 이 적어진다. 그리고,  $\overline{m}$ 가 커지면, 동시에  $(\Delta m)^2$ 도 커진다. 반대로,  $W$ 가 작다면,  $(\delta n)^2$ 은 크게되고, 또한  $\overline{m}$ 와  $(\Delta m)^2$ 도 함께 적어진다. 즉, 이산형에 있어서도 연속형과 동일하게 동시에 적어지

거나 커지지 않으므로 불확정성의 원리가 성립함을 알 수 있으며, 푸리에변환의 경우보다 더 정밀한 표현임을 알 수 있다.

예제2) 이산신호가  $f(n) = \frac{1}{2} \delta(n-3) + \delta(n-4) + \frac{1}{2} \delta(n-5)$ 인 경우에 이산 푸리에변환은

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{1}{2} \delta(n-3) + \delta(n-4) + \frac{1}{2} \delta(n-5)] e^{j\omega n}$$

$$= e^{j4\omega} [\frac{e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{2} + 1] \quad (52)$$

$$= e^{j4\omega} (\cos \omega + 1)$$

이다. 이산형 자연관측변환의 경우  $\bar{n} = 4$ ,  $(\Delta n)^2 = \frac{1}{3}$  이고, (28)식으로부터 이산 등가시정수는

$$(\delta n)^2 = \frac{T^2 \int_{-\pi}^{\pi} |e^{j4\omega} (\cos \omega + 1)|^2 d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} |1 - 2j e^{j\omega/2} (\frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{2j}) (\cos \omega + 1)|^2 d\omega} \quad (53)$$

$$= \frac{T^2}{2}$$

로 된다. 또한, (37)식으로부터  $\bar{m} = C^2$ 으로 된다. 따라서,  $\frac{(\delta n)^2 \bar{m}}{0.5(TC)^2} = 1$ 의 관계가 얻어진다. 그리고,  $\bar{m}^2 = \frac{4C}{3} (\frac{1}{\pi}(16C + \frac{2}{3}) + 10C^2 + 2C + \frac{1}{2})$ 이다. 따라서, m의 분산  $(\Delta m)^2$ 은  $(\Delta m)^2 = \frac{4C}{3} (\frac{1}{\pi}(16C + \frac{2}{3}) + 10C^2 + 2C + \frac{1}{2}) - C^4$ 이다. 만약, T가 크다면, C는 작아지고,  $(\delta n)^2$ 은 커진다. 그러나,  $\bar{m}$ 은 작아지고, 동시에  $(\Delta m)^2$ 도 작아진다. 반대로, T가 작다면,  $(\delta n)^2$ 는 작아지고,  $\bar{m}$  및  $(\Delta m)^2$ 는 커진다.

### V. 결론

본 논문에서는 연속신호에 있어서 푸리에변환에 의한 불확정성의 원리를 이산신호에 있어서 명확히 할 수 있었던 것과 같이 그에 대한 확장으로 이산형 자연관측변환에 있어서도 본질적으로 불확정성의 원리가 적용됨을 입증하였다. 불확정성의 원리를 도출함에 있어서 이산 등가 시정수를 정의하고 이산 등가 시정수를 매체로 하여 불확정성의 원리의 정확한 표현을 얻을 수 있었다. 이산형 근접형 자연관측변환이 임의의 이산 파형에 대한 해석에 있어서 기존의 푸리에해석에 의존한 방식보다 더 정밀한 해석방식임을 예제를 통하여 명확히 하였다.

### 참고 문헌

- [1] 飯島泰藏, “波形的自然觀測に關する基礎理論”, 信學論(A), Vol. J67-A, no. 10, pp. 951-958, Oct. 1984
- [2] 飯島泰藏, “自然觀測法に基づく波形解析の基礎理論”, 信學論(A), Vol. J68-A, no. 3, pp. 302-309, March 1985
- [3] 飯島泰藏, “自然觀測變換の基礎理論”, 信學論(A), Vol. J76-A, no. 11, pp. 1020-1026, Nov. 1993
- [4] A. Papoulis, “The Fourier Integral and its Applications”, New York : McGraw-Hill, 1962
- [5] A. Papoulis, “Signal Analysis”, New York: McGraw-Hill, 1977
- [6] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, “Digital Signal Processing”, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975
- [7] 飯島泰藏, “近接型自然觀測變換における不確定性原理について”, 信學論 (A), Vol. J79-A, no. 11, pp. 1886-1893, Nov. 1996
- [8] 岩城 謙, 飯島泰藏, “離散時間波形に對する自然觀測法について”, 信學論 (A), Vol. J79-A, no. 3, pp. 728-735, March. 1996

김 태 수(Taesoo Kim)

정회원



1987년 : 경북대학교 전자공학과 졸업(공학사)

1991년 : 日本橫濱國立大學 電子情報工學科(工學修士)

1995년 : 日本橫濱國立大學 電子情報工學科(工學博士)

1996년~現在 : 위덕대학교 전임 강사

<주관심분야> 디지털신호처리, 영상처리, 회로 및 시스템