

# 가중치를 이용한 LQ-Servo형 PI 제어기 설계

정희원 서병설\*

## Design of LQ-servo PI Controller Considering Weight

Byung-suhl Suh\* *Regular Member*

### 요 약

본 논문은 LQ-서보구조를 부분적 상태 피드백을 갖고 있는 PI 제어기로 해석하여 LQ-서보형 PI 제어기를 제안하고 이를 설계하기 위하여서 종전의 LQ-servo 설계 기법의 설계 매개 변수에 가중치를 도입하여 설계 알고리즘을 보다 유연성 있게 개발하는데 있다. 제안된 알고리즘은 설계 루프 전달 함수의 최대 및 최소 특이값을 저주파와 고주파에서의 일치로 향상시킬 수 있을 뿐만 아니라 성능 향상을 위해 루프 형상을 유연성 있게 설계할 수 있었다.

### ABSTRACT

This paper proposes LQ-servo PI controller by considering LQ-servo structure as PI controller with a partial state feedback and concerns about the development of the flexible design algorithm by introducing weights to the design parameters of the previous LQ-servo design method. The proposed algorithm improves the matchings of the maximum and minimum singular values at high and low frequencies of the design loop transfer function as well as its loop shaping for performance.

### I. 서 론

PID 제어기 설계(동조) 방법에 최적이론의 도입은 수치적 계산이 매우 복잡하고 난해하여 온라인 동조 개발을 어렵게 하고 있고 다변수 시스템에서는 이 어려움이 더욱 가중되어 디커플링(decoupling)을 통한 순차적 루프차단(sequential loop closing)방법 등이 사용되어 왔으나<sup>[1][2][3]</sup>, LQ-LTR<sup>[4]</sup>,  $H^\infty$ <sup>[5]</sup> 등과 같은 새로운 강인 최적 제어기 설계 이론들이 창출되어 이들을 활용하려는 강인 최적 PID 제어기 설계 기법들이 연구되어지고 있다. 최근에 Grimble<sup>[6]</sup>과 Mattezzoni와 Rocco<sup>[7]</sup> 등은  $H^\infty$  방법을 활용하려는 시도가 있었는데, 전자의 방법은 어떤 특정한 부류의 플랜트에서만 사용 가

능 하여 매우 제한적이며 구한 PID는 매우 복잡한 구조를 갖고 있어 제어기 설계가 매우난해하여져 실용성의 문제가 있으며 후자의 방법은 3개의 설계 파라미터로 구성된 PID를 단지 하나의 변수를 갖고 있는 단일 설계 파라미터로 유도하였기 때문에 설계의 유연성에 문제가 되어 실제적으로 성능향상을 가하는 데 문제가 있다.

또한 이들의 방법은 단일 입력력 플랜트에서만 적용 가능한 제한성을 갖고 있다.

본 연구에서는 언급된 문제점들을 극복할 수 있고 근원적으로 다변수 시스템을 다룰 수 있는 LQ-서보형 PI 제어기를 고려하고자 한다. 여기서, LQ-서보(servo)형 PI 제어기란 MIT의 Athans 교수<sup>[8]</sup>가 창출한 LQ-서보 구조가 PI 제어기로 해석할 수 있음을 말한다. 그래서 LQ-서보형 PI 제어기의 설계

\* 한양대학교 전자전기공학부

논문번호: 99134-0413, 접수일자: 1999년 4월 13일

※ 이 논문은 98년도 한국학술진흥재단 대학부설연구소 지원에 의한 결과임(과제번호:98-005-E00268)

방법은 사실상 LQ-서보 설계 방법과 동일하다.

LQ-서보 방법은 LQR(linear quadratic regulator) 방법의 결여된 성능-강인성(performance robustness)을 보장할 수 있도록 수정 보완된 방법이다. 다시 말하면 LQR은 안정도-강인성(stability robustness)이 Kalman의 주파수역 동가식(Kalman equality)에 의해 완전히 보장될 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. 그러나 이와 같은 보장은 완전한 상태피환(full state feedback)이 존재할 때만 성립한다. 그리고 LQR은 출력피환(output feedback)이 구성되어 있지 않아 시스템 수행의 주요목표인 명령추종(command following)을 성취할 수 없다. 그래서 안정도-강인성은 물론 명령추종, 외란제거(disturbance rejection), 잡음감소(noise reduction)등의 성능-강인성을 보장시키려는 목적으로, 시스템의 상태를 부분적으로 분리하여 일부의 상태피환과 출력피환을 동시에 사용하는 기법이다. 그리고 LQ-서보는 출력피환을 구성하고 있을지라도 시스템 입력 부분에서 볼 때는 완전한 상태피환으로 간주될 수 있어 LQR의 안정도-강인성은 그대로 이어 받는다.

LQ-서보 설계 방법에서 명령추종 및 출력측 외란제거 등의 성능을 효과적으로 개선하기 위해서는 플랜트 출력측 혹은 이와 동등한 오차신호 부분에서 간단한 루프 전달함수  $T(s)$ 를 사용하여 특이값 형상으로 설계하여야 한다. 그러나 Athans에 의한 LQ-서보 설계 방법<sup>[9]</sup>에서는  $T(s)$ 를 사용하는 것이 아니라 플랜트 입력측에서 간단한 루우프 전달함수  $G_L(s)$ 를 사용하여 특이값 형상으로 설계하기 때문에 안정도-강인성은 보장받을 수 있으나, 성능-강인성은 보장받을 수 없다. 이러한 문제를 해결하기 위해 Kwakernaak과 Sivan이 발표한 제어이득행렬의 극한 거동<sup>[10][11]</sup>을 이용하여  $T(s)$ 의 특이값 형상을 사용하는 새로운 설계 절차를 윤파 서<sup>[12]</sup> 방법에 의해 최근에 제안한 바 있다. 윤파 서 방법은 루프 전달함수  $T(s)$ 의 최대와 최소 특이값을 저주파와 고주파에서 가까이 일치시킬 수 있을 뿐만 아니라 Athans의 방법에 비해 우수한 성능-강인성을 보일 수 있었다. 그러나 이 방법은 주어진 플랜트에 따라  $T(s)$ 의 특이값 일치 정도가 결정되어질 뿐만 아니라  $T(s)$ 의 형상도 결정되어져 즉 유연성이 없기 때문에 보다 향상된 설계를 기할 수 없는 문제점을 갖고 있다.

본 연구에서는 이를 해결하기 위해 루프 형상 선도에서 설계 매개 변수에 가중치를 도입하는 새로운 유연성 있는 알고리즘을 제안함으로써  $T(s)$ 의 특

이값 일치 정도를 효율적으로 조절할 수 있을 뿐만 아니라 특이값을 저주파에서 중대시키고 고주파에서 감소시켜 성능-강인성을 향상시킬 수 있음을 보이고자 한다.

## II. LQ-서보형 PI 제어기 구조

LQR 방법은 안정도-강인성을 보장할 수 있는 가장 잘 알려진 제어기 설계방법으로 그 구조는 그림 1과 같다.

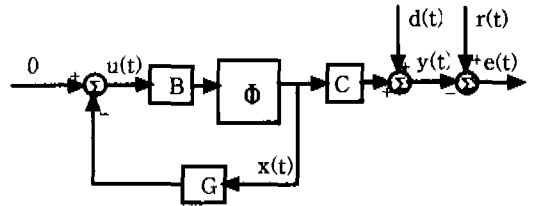


그림 1. LQR의 구조

서보 문제에 있어서 LQR은 성능-강인성에 대한 최적 제어법칙을 수행하지 못한다. 즉, 서보 문제-기 준입력을 추적하는 문제-에 있어서 LQR은 그림 1에 보는 바와 같이 출력측 외란  $d(t)$  및 시스템의 출력  $y(t)$ 와 기준입력  $r(t)$ 과의 오차가 폐환 되지 않기 때문에 명령추종의 성능-강인성 문제는 만족스런 결과를 얻을 수 없다. 다시 말해서 그림 1의 LQ-서보의 최적해  $u_{opt}(t)$ 는 외란  $d(t)$ 와 기준입력  $x(t)$ 의 미래값에 의해 결정되기 때문에 실질적으로 최적해를 구할 수 없다. 이를 해결하기 위하여 출력변수를 폐환할 상태변수에 (1)과 같이 포함시켜야 한다. 여기서  $x_r(t)$ 은 출력에 영향을 주지 않는 상태이다.

$$x_p(t) = [y_p(t) \ x_r(t)]^T \quad (1)$$

$$x_r(t) \in \mathbb{R}^m, \ y_p(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$$

또한, 출력측 외란에 의한 정상상태 오차를 제거하기 위해서는 피이드 포워드 루프(feed forward loop)에 적분제어요소를 포함한 구조가 되어야 하므로, 출력의 적분값에 해당하는 상태  $z_p(t)$ 를 포함하는 덧붙임 상태(augmented state)공간 모델식을 아래와 같이 구성해야한다.

$$\dot{z}_p(t) = I y_p(t) \quad (2)$$

$$x(t) = [z_p(t) \ x_p(t)]^T, \ x(t) \in \mathbb{R}^{n+m} \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$C_p = [I_{m \times m}; 0_{m \times (n-m)}], \quad (6)$$

$$D_p = [0_{(n-m) \times m} \quad I_{(n-m) \times (n-m)}] \quad (6)$$

이때 제어법칙은 (7)과 같이 되며, 제어이득을 편이상 (8)과 같이 분해하면 그림 2와 같이 LQ-서보의 구조를 나타낼 수 있다.

$$u(t) = -Gx(t) \quad (7)$$

$$G = [G_x \quad G_y \quad G_r] \quad (8)$$

$$\Phi_p(s) = (sI - A_p)^{-1} \quad (9)$$

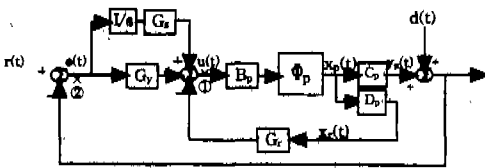


그림 2. 출력궤환과 비례 및 적분요소를 포함하는 LQ-servo 구조

그림 2의 구조는 부분적으로(partially)상태궤환을 갖고 있는 PI 제어기로 간주할 수 있다. 그리고  $G_x$  와  $G_y$ 는 PI 제어기의 적분상수와 비례상수에 해당되며,  $G_r$ 은 부분적 상태 피드백을 위한 설계 변수이다. 이와 같은 LQ-서보 구조를 본 논문에서는 LQ-서보형 PI 제어기라고 명명한다.

### III. LQ-서보형 PI 제어기 설계

앞장에서 설명한 출력궤환과 비례 및 적분 제어 요소를 포함한 LQ-서보 시스템 즉 LQ-서보형 PI 제어기는 안정도-강인성을 보장 할 뿐만 아니라, 서보 시스템에서 무엇보다도 중요시되는 명령추종 및 외란의 성능-강인성을 보장할 수 있도록 설계되어야 한다. 그러기 위해서는 (4)의 구축 조건을 갖고 (10)의 가격함수 J를 최소화하는  $G_x, G_y, G_r$ 의 최적 해를 구하여야 한다. 이들은 가격함수에 포함되어 있는 설계 매개변수  $N, \rho$ 를 먼저 결정한 후 (11)의

Riccati 방정식을 풀어서 구할 수 있다.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (10)$$

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1}B^T K = 0 \quad (11)$$

(10)과 (11)에서  $Q = N^T N$  이고  $R = \rho I$  이다.

#### 3.1 기존의 윤곽 서 방법<sup>[12]</sup>

LQ-서보형 PI 제어기의 성능-강인성을 보장하기 위해서는 출력 측에서 절단한 전달함수  $T(s)$ 의 복이값 형상으로 설계하여야 한다는 것을 서론에서 설명하였다. 이  $T(s)$ 는 (12)와 같이 구하였다.

$$T(s) = C_p(sI - A_p + B_p G_p D_p)^{-1} B_p (G_y + \frac{1}{s} G_x) \quad (12)$$

저주파수 및 고주파수 부분에서  $T(s)$ 의 복이값을 일치시키기 위하여 Kwakernaak Sivan<sup>[10][11]</sup>이 발표한 제어 이득행렬  $G$ 의 극한거동에 관한 [정리 1]을 이용하였다.

정리 1 :  $N\Phi(s)B$ 가 최소위상 플랜트이면 제어 이득행렬  $G$ 의 극한거동은 다음과 같다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G = WN \quad (13)$$

여기서  $W$ 는 일원행렬 (unitary matrix)로  $W^T W = I$  이다.

증명: 참고문헌[10] 참조 ■

LQ-서보에서 제어 이득행렬  $G$ 와 설계 매개변수  $N$ 은 (14), (15)와 같으므로 정리 1은 다음 (16), (17), (18)과 같이 확장시켰다.

$$G = [G_x \quad G_y \quad G_r] \quad (14)$$

$$N = [N_x \quad N_y \quad N_r] \quad (15)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_x = WN_x \quad (16)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_y = WN_y \quad (17)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_r = WN_r \quad (18)$$

여기서  $N_x, N_y, N_r$ 은 설계 매개변수이므로  $W$ 가 단위행렬이 되도록 하는  $\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_r$ 이 존재한다. 그러면 (16), (17), (18)은 (19), (20), (21)과 같이 된다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_x = \bar{N}_x \quad (19)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_y = \bar{N}_y \quad (20)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} G_r = \bar{N}_r \quad (21)$$

LQ-서보의 성능-강인성을 보장하기 위하여  $T(s)$ 의 특이값을 아래와 같이 저주파수, 고주파수 부분에서 각각 일치시켰으며 그 결과는 다음과 같이 간략히 요약되었다.

3.1.1 저주파수 부분에서  $T(s)$ 의 특이값 일치

저주파수 부분에서는  $s \rightarrow 0$ 이므로  $T(s)$ 는 아래 (22)와 같이 근사되고 (23)와 같이 변형된다.

$$T(s) \approx C_p(-A_p + B_p G_r D_p)^{-1} B_p \frac{1}{s} G_x \quad (22)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} C_p(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \sqrt{\rho} G_r D_p)^{-1} B_p \sqrt{\rho} G_x \quad (23)$$

여기서 플랜트가 최소위상 일 때,  $\rho \rightarrow 0$ 에서 (19), (21)가 성립하므로 이를 이용하면 (23)은 (24)과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} C_p(-A_p + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_p \bar{N}_r D_p)^{-1} B_p \bar{N}_x \quad (24)$$

한편, 플랜트 식  $A_p$ 와  $B_p$ 를 다음과 같이 분해할 때,

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

다음과 같이 (26)으로 간략히 나타낼 수 있다.

$$T(s) = - \frac{1}{s\sqrt{\rho}} A_{11}^{-1} B_1 \bar{N}_x \quad (26)$$

저주파 부분에서  $T(s)$  특이값을 일치시키기 위해서는 (27)을 만족해야 하므로 이로부터 설계 매개변수  $\bar{N}_x$ 는 (28)과 같이 결정된다.

$$\sigma_d [T(s)] = \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \sigma_d [A_{11}^{-1} B_1 \bar{N}_x] \quad (27)$$

$$A_{11}^{-1} B_1 \bar{N}_x = I \quad (28)$$

$$\therefore \bar{N}_x = B_1^{-1} A_{11} \quad (29)$$

그리고 설계 매개변수  $\bar{N}_r$ 은 (30)와 같이 결정된다.

$$\therefore \bar{N}_r = \sqrt{\rho} B_1^{-1} A_{12} \quad (30)$$

3.1.2 고주파수 부분에서  $T(s)$ 의 특이값 일치

고주파 부분에서는  $s \rightarrow \infty$ 이므로  $T(s)$ 는 (31)와 같이 근사되어 (32)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} T(s) &\approx \frac{1}{s} C_p B_p G_y \\ &= \frac{1}{s} [I \ 0] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} G_y = \frac{1}{s} B_1 G_y \end{aligned} \quad (31)$$

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} B_1 \sqrt{\rho} G_y \quad (32)$$

또한,  $\rho \rightarrow 0$  이고 최소위상 플랜트라는 가정 하에 (20)가 성립하므로 이를 이용하여 (32)을 (33)과 같이 근사시킨다.

$$T(s) \approx \frac{1}{s\sqrt{\rho}} B_1 \bar{N}_y \quad (37)$$

특이값을 일치시키기 위하여 (35)를 만족해야 하므로 이로부터 설계 매개변수  $\bar{N}_y$ 는 (36)과 같이 결정된다.

$$\sigma_d [T(s)] = \frac{1}{s\sqrt{\rho}} \sigma_d [B_1 \bar{N}_y] \quad (34)$$

$$B_1 \bar{N}_y = I \quad (35)$$

$$\therefore \bar{N}_y = B_1^{-1} \quad (36)$$

위의 설계 과정은  $B_1$ 이 정칙행렬이어야 한다.

3.2 본 논문에서 제안된 방법

기존의 윤과 서 방법의 핵심은  $G_{LQ}(s)$ 대신  $T(s)$ 를 이용하는 설계절차를 개발하고자 하는 것이었다. 그리고 이는 Athans이 성공하지 못한  $T(s)$ 의 저주파와 고주파 영역에서의 특이값 일치 및 외란제거 및 명령추종의 성능향상을 성취할 수 있었으나 좀 더 향상을 위한 유연성 있는 설계 방법을 제시하지는 못하였다. 본 논문에서 이를 위해 설계 매개변수  $N$ , 즉 (15)에 가중치  $\beta, \gamma$  를 도입하여 루프 형상 설

제 방법에서 저주파 영역의 특이값을 크게 하여 명명 추종 및 외란 제거에 대한 성능-강인성을 향상시키고, 고주파 영역 특이값을 작게 하여 센서 잡음에 대한 성능-강인성을 향상시킬 수 있는 설계방안을 제안하고자 한다. 그러므로 가중치를 도입함으로써 즉 이를 극대화하고자 한다.

좀 더 구체적으로 그 방안을 서술하면, 저주파 영역에서  $T(s)$ 의 근사식 (24)를 살펴 볼 때  $A_p, B_p, C_p$ 는 플랜트, Athans<sup>[9]</sup>이 제시한 설계 절차에 의하면  $\rho$  는 교차 주파수  $\omega_c$ 가  $\rho = \frac{1}{\omega_c^2}$ 인 관계에 의해 결정되므로  $N$  성분 중  $N_z$ 와  $N_r$ 만이  $T(s)$  형상에 영향을 준다는 사실을 알 수 있다. 그래서  $\alpha N_z$ 와  $\beta N_r$ 의 형태로  $\alpha, \beta$  가중치를 도입하여  $T(s)$ 의 특이값의 변화를 이론적으로 고찰하고, 이와 마찬가지로 고주파 영역에서  $T(s)$ 의 근사식 (33)을 살펴볼 때,  $N_y$ 만이 영향을 주고 있으므로 가중치  $\gamma$ 를 도입하여  $\gamma N_y$ 에 따른  $T(s)$ 의 특이값 변화를 고찰하고자 한다. 그리고, 이 가중치들이  $T(s)$ 의 특이값 형상에 독립적으로 영향을 주고 있는지를 이론적으로 고찰하여야 한다. 왜냐하면 가중치들이 서로에 영향을 주어  $T(s)$  특이값 형상이 만들어진다면 가중치 설계가 매우 복잡하여지기 때문이다.

3.2.1 설계 매개변수  $N_z$

저주파 영역의 특이값 일치를 위해 (28)을 (37)와 같이 변형할 수 있다.

$$A_{11}^{-1} B_1 \bar{N}_z = aI \tag{37}$$

$$\therefore \bar{N}_z = a B_1^{-1} A_{11} \tag{38}$$

따라서,  $a$ 를 1보다 큰 값으로 설계하면 저주파 영역의 특이값이 커지고 루프 전달 함수 행렬과 반비례 관계인 감도 함수 행렬의 특이값이 저주파 영역에서 작아진다. 이는 감도 함수 행렬의 특이값이 1보다 작은 저주파 영역을 넓게 하여 명명 추종 및 외란 제거의 성능을 향상시킬 수 있다.

3.2.2 설계 매개변수  $N_r$

$N_r$ 에 가중치를 도입하면 (39)과 같다.

$$\beta \bar{N}_r = \sqrt{\rho} B_1^{-1} A_{12} \tag{39}$$

식 (39)을 살펴보면,  $N_r$ 은  $N_z$ 와는 달리  $\rho$ 에 비례하기 때문에 가중치  $\beta$ 에 의한  $N_r$ 의 변화를  $\rho$ 의

변화로 간주할 수 있다. 즉 (40)을 만족시키도록  $\rho$  값을 조정할 수 있다.

$$-A_{12} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} B_1 \beta \bar{N}_r = 0 \tag{40}$$

$\beta > 1$  일 때는  $\rho$ 가 증가한다고 볼 수 있고, 이는  $\rho \rightarrow 0$  일 때  $T(s)$ 의 특이값을 일치시킨다는 가정을 역행함으로 저주파 영역에서  $T(s)$ 의 특이값 형상이 더 벌어지게 될 것이다. 반면,  $0 < \beta < 1$  일 때는 매우 작은  $\rho$  값이 더 작아진다고 볼 수 있기 때문에  $\rho \rightarrow 0$  라는 가정에 더욱 충실할 수 있어 특이값 일치가 더 잘 이루어지게 됨을 알 수 있다.

3.2.3 설계 매개변수  $N_y$

고주파 영역의 특이값 형상 일치를 위해 (35)을 (41)와 같이 변형할 수 있다.

$$B_1 \bar{N}_y = \gamma I \tag{41}$$

$$\therefore \bar{N}_y = \gamma B_1^{-1} \tag{42}$$

따라서,  $\gamma > 1$  이면  $N_y$ 는 증가하게 되고,  $T(s)$ 의 특이값 또한 증가하게 된다. 마찬가지로,  $0 < \gamma < 1$  일 때,  $T(s)$ 의 특이값은 감소하게 된다.

3.2.4 설계 매개변수  $N_z, N_y, N_r$ 의 상호 독립성

설계 매개변수  $N_z, N_y, N_r$ 에 부여된 가중치  $\alpha, \beta, \gamma$ 가 특이값 형상에 있어서 서로가 독립적으로 영향을 주지 않고 서로가 의존되어 영향을 준다면 설계는 매우 복잡하게 될 수 있다. 앞에서 저주파 영역에서는  $N_z$ 와  $N_r$ 이  $T(s)$ 에 영향을 미치고,  $N_z$ 는 특이값을 증가 또는 감소시키는 역할을 하고,  $N_r$ 은  $T(s)$ 의 최대특이값과 최소특이값의 일치정도에 영향을 주게 되므로 상호 독립적이라할 수 있다. 또한,  $N_y$ 는 고주파 영역에서만  $T(s)$ 의 특이값에 영향을 주고 있다. 따라서,  $N_z, N_y, N_r$  각각이 상호 독립적으로  $T(s)$ 의 형상에 영향을 주고 있기 때문에 칼만 필터(Kalman filter) 설계의 분리정리(separation theorem)의 역할과 같이 설계를 용이하게 한다.

본 논문에서 제안하는 설계 절차를 정리하면 다음과 같다.

Step 1. 기존의 설계방법과 같이 우선 설계 사양으로 주어지는 명명 추종 및 외란 제거 장벽의 경계값  $\Omega_c$ 과 센서 잡음의 경계값  $\Omega_n$  사이에 교차

주파수  $\omega_c$ 가 존재하도록 다음 관계식이 만족되도록 설계 매개변수  $\rho$  를 결정한다.

$$\frac{1}{\omega_n^2} < \rho < \frac{1}{\omega_r^2} \quad (51)$$

Step 2. step 1에서 결정된  $\rho$  값을 가지고 저주파 및 고주파 영역에서  $T(s)$ 의 특이값을 일치 및 극화시키기 위해 설계 매개변수  $N$ 을 다음과 같이 가중치가 도입된 관계식을 가지고 결정한다.

$$\begin{aligned} WN &= [\bar{N}_x : \bar{N}_y : \bar{N}_z] \\ &= [aB_1^{-1}A_{11} : \gamma B_1^{-1} : \frac{\sqrt{\rho}}{\beta} B_1^{-1}A_{12}] \end{aligned} \quad (52)$$

여기서, 저주파 영역의 특이값을 증가시키기 위해서  $\alpha > 1$ , 특이값을 잘 일치시키기 위해서  $0 < \beta < 1$  인 값을 선택한다.

Step 3. 가격 함수식 (10)에 포함되는  $Q, R$ 을 다음과 같은 식 (53)에 의해 정하고, CARE의 최적해  $K$ 를 구함으로써 최적이득  $G = [G_x, G_y, G_z]$ 를 구함으로써 LQ 서보형 PI제어기 설계가 끝난다.

$$\begin{aligned} Q &= N^T N \\ R &= \rho I \\ G &= R^{-1} B^T K \end{aligned} \quad (53)$$

Step 4. 시스템의 주파수 응답과 시간 응답을 구하여 만족할 만한 성능인가 확인하고, 안정도-강인성을 만족하는지 확인하여 응답이 좋지 못하면,  $\alpha$  와  $\beta$  값을 조절하여 step2와 step3의 절차를 다시 수행한다.

#### IV. 예 제

(예 제 1)

이 예제는 기존의 방법<sup>[4]</sup>의 연구에서 보인 것으로, 본 논문에서 제안하는 방법과의 비교를 쉽게 하기 위해 선택하였다.

(다변수 상태 공간 모델식)

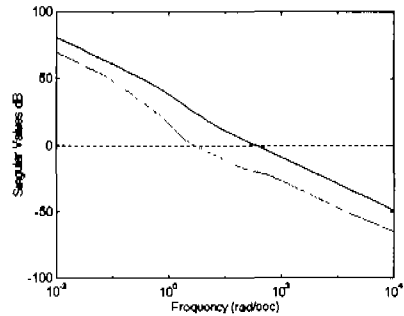
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1.4600 & 0.0000 & 2.4276 \\ 0.1643 & -0.4000 & -0.3788 \\ 0.3107 & 0.0000 & -2.2300 \end{bmatrix}$$

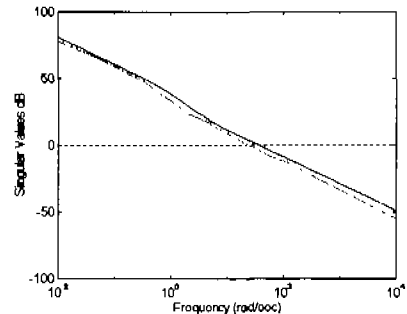
$$B = \begin{bmatrix} 0.4182 & 5.2026 \\ 0.3921 & -0.1245 \\ 0.5186 & 0.0236 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

설계 파라미터 값을  $\rho = 0.001, \alpha = 2, \beta = 0.1$ 로 선정하였다.



(a) 기존의 방법



(b) 본 논문의 방법

그림 3. 루프 전달 함수 T(s)의 특이값 선도

그림 3에서 볼 수 있듯이 본 논문에 제안된 방법은 가중치를 도입함으로써 기존의 방법보다 특이값이 훨씬 더 일치되었고 특히 저주파 부분의 특이값이 증가함으로써 명령추종 및 외란제거의 성능을 개선할 수 있음을 보였다.

#### V. 결 론

본 연구에서는 LQ-서보 구조를 PI 제어기로 해석으로써 새로운 LQ-서보형 PI 제어기를 제시하였고 그 설계 방법으로서 윤과 서<sup>[12]</sup>에 의해 제안된 LQ-서보 알고리즘에 가중치를 도입하여 -즉, 설계 매개변수  $N$ 에 가중치를 도입하여 - 보다 유연성 있

는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 플랜트 출력에서 절단하여 만들어진 부피 전달 함수  $T(s)$ 의 최대 특이값과 최소 특이값을 저주파와 고주파에서 효율적으로 일치시킬 수 있을 뿐만 아니라  $T(s)$ 의 특이값이 저주파영역에서 좀 더 증대될 수 있었다.

이러한 새로운 제안은 가중치를 도입하여 경직된 기존의 설계방법에 유연성을 부여한 보상적인 것으로 해석될 수 있다. 그러나 가중치 값의 선정이 시행착오적인 성격을 띠고 있어 좀 더 좋은 결과를 위해서는 반복 시행되어야 하는 단점이 지적될 수 있을 뿐만 아니라 고주파 영역에서  $T(s)$ 의 특이값을 더욱 작게 하여 잡음 감소까지도 실현될 수 있는 성능개선이 요구되고 있다. 이러한 부족한 면의 개선은 볼록형(convex) 최적화 기법을 활용함으로써 이루어질 수 있으리라고 사료된다. 끝으로 본 연구에서 제안한 LQ-서보형 PI 제어기는 다소 특별한 유형일지라도 인공위성에서 비행각(attitude angle)의 제어, 모터제어 등과 같은 실용 가능한 분야를 쉽게 찾을 수 있고 제안된 제어기 설계 방법은 다변수 시스템을 다룰 수 있고 최적 제어기 설계법에 의해 안정도-강인성, 부피 형성기법에 의해 성능-강인성 향상을 간편한 절차에 의해 성취시킬 수 있었다는 점을 언급하고자 한다.

참 고 문 헌

[1] 서병설, "다변수 제어 시스템의 동조에 대한 연구," 대한 외용 생체 공학회 논문집, 제 8권 2호, 1987

[2] A. Loh, C. Hang, C. Quek and V. Vasnami, "Autotuning of Multi loop Proportional-Integral Controllers Using Relay Feedback," Ind. Eng. Chem. Res. Vol. 32, pp.1102~1107

[3] T. Ham and Y. Kim, "Process Identification and PID Tuning in Multivariable Systems," J. of Japan, Vol.31 No.6 pp941~949, 1998

[4] M. Grimble, "  $H_{\infty}$  controllers with a PID structure," J. of Dynamic Syst. Meas. and Contr., Vol 112, pp 325-336, 1990

[5] C. Matzezzoni and P. Rocco, "Robust Tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification," European J. of Contr. Vol 3, pp 125~136, 1997

[6] J. Dogle and G. stein, "Robustness with Observers," IEEE Trans. Auto Contr. Vol AC-24, No.4, pp 607~611, 1979

[7] K. Zhou, J. Dogle and K. Glover, Roust and Optimal Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995

[8] M. Athans, *Lecture Notes on Multiv ariable Control Systems*, M.I.T. Ref. No. 840418/6236., 1984

[9] M. Athans, *Lecture Notes on Multiv ariable Control Systems*, M.I.T. Ref. No. 860224/6234., 1986

[10] H. Kwakernaak and R. Sivan, "The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal Filters", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-17, pp.79~86, 1972.

[11] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, Inc., 1972.

[12] 윤성오, 서병설, "명령추종과 출력속 외란제거를 위한 LQ-servo 설계", 제어·자동화·시스템 공학회 논문집 제 3권 5호, 1997

서 병 설(Byung-Suhl Suh)

정희원

한국통신학회논문지 제16권 제10호 참조  
 현재: 한양대학교 전자·전기공학부 교수