

일반화된 감마 신호원의 분산 불일치된 양자화

정회원 구기일*, 나상신**

Variance Mismatched Quantization of a Generalized Gamma Source

Ki-il Koo*, Sang-sin Na** *Regular Members*

요 약

이 논문은 일반화된 감마 신호원에 최소 평균제곱오차 왜곡을 갖도록 설계된 양자기가 다른 신호원에 사용될 때 발생하는 양자기 불일치에 대한 연구로서, 양자기의 여러 불일치 가운데, 설계 신호원과 사용 신호원의 분산이 불일치된, 분산 불일치 문제를 다루었다. 주 내용은 베넷 적분식을 기반으로 하여 유도한 양자기 왜곡의 두 근사 수식으로, 첫째 근사식은 양자기의 맨 바깥 경계값의 함수로 표시된 제1차 왜곡 근사식이며, 둘째 근사식은 이 맨 바깥 경계값의 근사식을 사용한 제2차 왜곡 근사식이다. 일반화된 감마 신호원의 일종인 라플라스 신호원의 경우에 다양한 분산 불일치에 대해, 양자기의 실제 왜곡을 수치로 구하였으며, 이 실제 왜곡과 두 근사식을 비교하였다. 제1차 및 2차 근사식은 모두, 설계 신호원의 분산에 대한 사용 신호원의 분산 비율이 클수록, 더 작은 양자점 수에서도 실제 왜곡에 근접하였으며, 또 양자점의 개수가 64 이상일 때 실제 왜곡의 2~4% 이내의 오차를 보여, 높은 정확도를 갖는 것이 관찰되었다. 이를 종합할 때, 이 논문에서 제시하는 근사식들은, 수식이라는 측면과 정확도라는 측면에서, 가치있는 것으로 평가된다.

ABSTRACT

This paper studies mismatched scalar quantization of a generalized gamma source by a quantizer that is optimally (in the mean square error sense) designed for another generalized gamma source. Specifically, it considers variance-mismatched quantization which occurs when the variance of the source to be quantized differs from that of the designed-for source. The main result is the two distortion formulas derived from Bennett's integral. The first formula is an approximation expression that uses the outermost threshold of an optimum scalar quantizer, and the second formula, in turn, uses an approximation formula for this outermost threshold. Numerical results are obtained for Laplacian sources, which are example of a generalized gamma source, and comparisons are made between actual mismatched distortions and the two formulas. These numerical results show that the two formulas become more accurate, as the number of quantization points gets larger and the ratio of the source variance to that of the designed-for source gets bigger. For example, the formulas are within 2~4% of the actual distortion for approximately 64 quantization points or more. In conclusion, the proposed approximation formulas are considered to have contribution as closed formulas and for their accuracy.

I. 서론

1.1 양자기의 표현

N -점 홀양자기(scalar quantizer)를 표현하는 데에

는 양자점, 경계값, 양자함수의 3요소가 필요하다. 양자점들은 양자영역을 대표하는 값으로서 그림1에 서처럼 y_1, y_2, \dots, y_N 로 표시하기로 하고, 경계값은 x_1, x_2, \dots, x_{N+1} 으로 표시하기로 하자. 양자함수

* 아주대학교 전자공학과 부호화 연구실(kookki@madang.ajou.ac.kr),
논문번호 : 00187-0601, 접수일자 : 2000년 6월 1일

** 아주대학교 전자공학과

* 본 연구는 정보통신부 우수대학원 지원 및 반도체설계교육센터(IDEC)의 지원에 의해 수행되었습니다

$Q(\cdot)$ 는 $x \in [x_i, x_{i+1})$ 일 때 $Q(x) = y_i$ 로서, 일종의 다대일 함수이다.

값연속 신호원 $(X_N)_{k=-\infty}^{\infty}$ 의 제1차 확률밀도함수 $p(x)$ 가 주어질 때, 최소 평균제곱오차 N 점 홀양자기 Q_N 을 설계한다는 것은 평균제곱오차를 최소화하는 N 개의 양자점 $y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*$ 과 $N-1$ 개의 경계값 $x_2^*, x_3^*, \dots, x_N^*$ 을 설정한다는 것을 의미한다. (일반적으로 $x_1^* = -\infty, x_{N+1}^* = +\infty$ 으로 설정한다고 하자.) 이 논문에서는 최적(최소 평균제곱오차) 양자기를 설계하는 방법으로 [1,2]의 로이드-맥스(Lloyd-Max)법을 사용하여, 확률밀도함수의 지지역(support)의 오른쪽 끝에서부터 양자점과 경계값을 번갈아 가며 구하였다. 이때 맨 처음에 오른쪽 끝 경계값 x_N 을 임의로 설정하고 시작하는데, 이 값이 실제 최적 양자기의 오른쪽 끝경계값 x_N^* 에 얼마나 가깝게 설정되었느냐에 따라, 최적 설계에 필요한 반복 회수를 줄일 수 있다. 이렇듯 오른쪽 끝경계값이 설계에 중요한 역할을 하므로, 최적 양자기의 오른쪽 끝경계값 x_N^* 은 중요변수(key-parameter)라 불려왔다 [3]. 이러한 중요변수는 양자기의 왜곡에도 중요한 영향을 미친다.

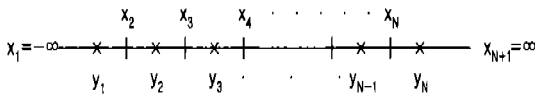


그림 1. N -점 양자기의 표현

신호원의 확률밀도함수가 $p(x)$ 로 주어질 때, N 점 양자기 Q_N 의 평균제곱오차 왜곡 $D(Q_N)$ 은 다음 식으로 표현된다.

$$D(Q_N) = E_p\{(X - Q_N(X))^2\}$$

여기서 $E_p(\cdot)$ 는 확률밀도함수 $p(x)$ 에 대한 평균값을 뜻한다. 경계값과 양자점으로 이 왜곡 $D(Q_N)$ 을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D(Q_N) &= \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx \\ &= \sum_{i=2}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx + \int_{-\infty}^{x_2} (x - y_1)^2 p(x) dx \\ &\quad + \int_{x_N}^{\infty} (x - y_N)^2 p(x) dx \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)의 첫째항은 안쪽 양자점들에 의한 내부 양자 영역의 합구간 $[x_2, x_N)$ 에서의 왜곡의 값으로 안 왜곡(inner distortion)이라 부르기로 하고, $D_i(Q_N)$ 이라 표시하기로 하자. 또 둘째항과 셋째항은 맨 바깥 양자점들에 의한 외각 영역에서의 왜곡으로 바깥왜곡(outer distortion)이라 부르기로 하고, $D_o(Q_N)$ 으로 표시하기로 하자.

1.2 양자기의 불일치

실제 통신 시스템에서는 입력 신호원의 통계적 특성이 때때로 변화하여, 설계된 양자기와 사용 신호원이 일치하지 않는 양자기의 불일치 문제가 발생할 수 있다. 다시 말하면 양자기의 불일치란, 어떤 신호원에 최적으로 동작하도록 설계된 양자기가 이와는 다른 신호원에 사용되어, 설계된 의도에 따라 동작을 하지 않는 상황을 일컫는 말이다. 이러한 양자기의 불일치는 불일치의 내용에 따라 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 첫째는 같은 종류의 확률밀도 함수를 갖는 신호원 사이에서의 불일치이고, 둘째는 다른 종류의 확률밀도 함수를 갖는 신호원의 경우이다. 같은 종류의 확률밀도 함수안에서의 불일치는 평균 불일치, 분산 불일치, 복합 불일치된 경우로 나눌 수 있다. 평균 불일치는 입력 신호원의 평균값이 양자기 설계에 사용된 신호원의 평균값과 같지 않음으로 발생하는 불일치이고, 분산 불일치는 입력 신호원과 설계 신호원의 분산이 서로 달라 발생하는 불일치이다. 복합 불일치는 두 신호원의 평균과 분산이 모두 달라 복합적으로 발생하는 불일치를 말한다. 다른 종류의 확률밀도 함수인 경우의 불일치는 입력 신호원과 양자기 설계 신호원이 각각 다른 확률분포인 경우로서, 예를 들면 가우스 신호원에 설계된 양자기에 입력 신호원으로 가우스 분포가 아닌, 라플라스 또는 레일리 신호원이 입력될 때 발생하게 된다.

이 논문에서 다루는 불일치는 분산의 불일치이며, 구체적으로 일반화된 감마 신호원에 최적으로 설계된 양자기에 분산이 더 큰 신호원이 입력으로 들어와 발생하는 불일치에 관해 연구하였다. 분산 불일치의 정도는 표준편차의 비율로 ρ 로 나타내었는데, $\rho = \sigma_p / \sigma_q$ 로 정의하였으며, 여기서 σ_p 는 입력 신호원의 표준편차이고 σ_q 는 최적 양자기를 설계할 때 신호원의 표준편차이다. 따라서, 이 ρ 가 클수록 불일치의 정도가 심하게 된다.

이 논문의 초점은 이러한 분산 불일치로 인해, 양

자기의 왜곡이 정량적으로 얼마나 영향을 받는지, 또 왜곡에 영향을 미치는 요소들은 무엇이며, 이 요소들이 어떠한 과정을 통하여 영향을 미치는지에 맞추어졌다.

1.3 방법론

이 논문의 연구에 사용된 방법은 다음과 같다. 먼저 최적 양자기를 설계한 뒤, 이 양자기를 분산이 다른 입력 신호원에 사용하여 양자기를 불일치시켜, 실제 왜곡 값을 구한다. 한편 왜곡의 근사식을 유도하여, 실제 왜곡값과의 비교를 통해, 근사식의 정확도를 관찰한다. 정확도가 검증된 뒤에, 왜곡 근사식의 중요한 요소를 발견하고, 이 요소들이 어떤 과정을 통하여 왜곡에 영향을 끼치는지 고찰한다.

양자기 왜곡 근사식은 다음과 같이 얻는다. 먼저, 왜곡을 안왜곡 D_1 와 바깥왜곡 D_2 로 분리한다. 다음에는 D_1 의 근사식으로 [4]의 베넷 적분식을 사용하고, D_2 의 근사식으로는 실제 왜곡식을 사용한다. 그리고, 이 두 근사식을 합한 식을 양자기 왜곡의 근사식으로 사용한다.

왜곡의 근사식은 중요변수(최적 양자기의 오른쪽 끝경계값 x_2)에 대한 식으로 표현될 수 있는데, 이 중요변수에 얼마나 정확한 값을 사용하느냐에 따라, 근사식의 정확도가 영향을 받게 된다. 이 논문에서는 일반화된 감마 신호원에 대한 불일치 양자기의 왜곡 근사식을, 설계를 통해 구해진 중요변수의 실제값과 최근 연구된 [3]의 근사식을 사용하여, 각각 제1차 왜곡 근사식과 제2차 왜곡 근사식을 유도 제시하였다. 일반화된 감마 신호원 중 라플라스 신호원의 경우, 제1차 왜곡 근사식은 양자점 개수가 64 이상에서, 불일치 비율 $\rho = \sigma_p / \sigma_q$ 이 2 이상인 경우에 실제 왜곡과 오차가 2% 이내의 높은 정확도를 보였으며, 제2차 왜곡 근사식은 실제 왜곡과 약 4% 정도의 정확도를 보였다.

1.4 관련연구 및 기여도

불일치 왜곡에 대한 과거의 연구된 결과, [5]는 단지 수치 실험에 치중하여 양자기의 불일치 왜곡을 구한 것이다. 그리고 [6]은 점양자기(vector quantizer)의 경우 베넷의 적분식을 사용하지만, 베넷의 적분식이 유한한 경우에 수식전개가 가능하며, 라플라스 신호원의 경우, 이 논문의 용어로 바꾸어 말하면, $\rho < 3/2$ 일 때에만 해당되는 경우이다. 또 $\rho \geq 3/2$ 인 경우에는, 통상의 베넷 적분식은 정확한 적분 구간 $[x_2, x_N]$ 의 수식이 알려지지 않았던 관계

로, 적분값이 ∞ 가 되었었다. 따라서, 이러한 경우 불일치 왜곡 수식은 보고된 전례가 없었다.

근본적으로 이 논문이 지금까지의 연구와 다른 점은 왜곡의 근사식을 유도 제시한 것이다. 또 라플라스 신호원의 경우에, 이 식이 $\rho \geq 3/2$ 에서도 실제 왜곡과 비교하여 대단히 정확하다는 사실을 발견한 점이다. 따라서, 라플라스 신호원의 경우 $\rho \geq 3/2$ 일 때도 적용되는 적절한 공식을 최초로 제시했다는 점에서 의미가 크다고 볼 수 있다.

이 논문의 기여도는 다음과 같다. 첫째 양자기 불일치 왜곡의 정확한 근사식을 유도하였으며, 이 식을 통하여 양자기를 직접 설계하지 않고도 불일치된 양자기 왜곡의 양을 추정할 수 있게 되었다. 둘째 왜곡에 영향을 미치는 요소들이 무엇이며, 이들이 어떠한 과정을 통하여 왜곡에 영향을 미치는지 쉽게 알 수 있게 되었다.

II. 일반화된 감마 신호원에 대한 최적 양자기 설계

2.1 일반화된 감마 신호원

일반화된 감마 신호원이란 신호원의 제1차 확률 밀도함수가 다음 형태로 표시되는 신호원을 말한다.

$$f(x) = \mu \lambda x^\beta \exp(-\lambda x^\alpha) \tag{2}$$

여기서 매개변수 $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ 는 각각 지수거듭제곱수(exponential power parameter), 거듭제곱수(power parameter), 지수감소상수(exponential decay constant), 정규화상수(normalization constant)로서 다음과 같은 관계를 갖는다 [3].

$$\alpha > 0, \beta > -1,$$

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\beta+3}{\alpha})^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta+1}{\alpha})^{\frac{\alpha}{2}}}, \mu = \frac{1}{\sigma^{\beta+1}} \frac{\Gamma(\frac{\beta+3}{\alpha})^{\frac{\beta+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta+1}{\alpha})^{\frac{\beta+3}{2}}}$$

이때, σ 는 신호원의 표준편차이고, $\Gamma(x)$ 는 감마 함수로 양의 x 에 대해 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ 이다. 특별한 몇 경우는 가우스, 라플라스, 레일리, 통상의 감마 신호 등으로 이들을 표1과 그림2에 나타냈다.

2.2 중요변수

최근 일반화된 감마 신호원에 대해 중요변수를 추정하는 근사식이 [3]에 의해 보고되었다. 이 근사

식은 본질적으로 양자점 개수 N 이 증가할 때 더욱 정확해지는 점근식인데, [7]에서 이 점근식이 실제 중 요변수와 얼마나 가까운지 연구되어 있다. 이 연구에 의하면 가우스와 양방향 레일리 신호원의 경우, N 이 8 이상일 때 점근식이 99% 이상, 라플라스와 통상의 감마 신호원의 경우 N 이 128 이상일 때 점근식은 99% 이상의 정확도를 갖는 것으로 보고되었다.

표 2. 중요 변수 근사식

| | α | β | λ | μ |
|---------|----------|----------------|----------------------------|--------------------------------------|
| 가우스 | 2 | 0 | $\frac{1}{2\sigma^2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ |
| 라플라스 | 1 | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{\sigma}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ |
| 양방향 레일리 | 2 | 1 | $\frac{1}{\sigma^2}$ | $\frac{1}{\sigma^2}$ |
| 통상의 감마 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2\sigma}$ | $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}\sigma}$ |

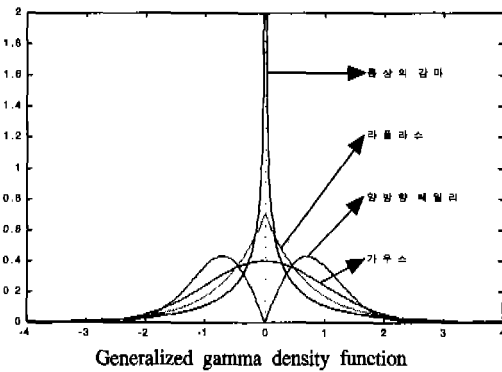


그림 2. 감마 신호원의 특별 경우

최적 양자기 Q_N^* 의 왜곡 $D(Q_N^*)$ 은 안왜곡 $D_i(Q_N^*)$ 과 바깥왜곡 $D_o(Q_N^*)$ 의 합으로 표현할 수 있다. 참고문헌 [3]으로부터, 이 양자기가 설계된 $p(x)$ 신호원에 사용된 경우의 안왜곡은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 D_i(Q_N^*) &= \sum_{i=2}^{N-1} \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} (x - y_i^*)^2 p(x) dx \\
 &\cong \frac{1}{12(N-2)^2} \left(\int_{x_2^*}^{x_N^*} p^{\frac{1}{3}}(x) \right)^3 \\
 &\cong \frac{1}{12N^2} \left(\int_{x_2^*}^{x_N^*} p^{\frac{1}{3}}(x) \right)^3 \quad (3)
 \end{aligned}$$

여기서, x_2^*, \dots, x_N^* 는 최적 양자기의 경계값을 y_1^*, \dots, y_N^* 는 양자점을 의미한다. 또 바깥왜곡은 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned}
 D_o(Q_N^*) &= \int_{-\infty}^{x_1^*} (x - y_1^*)^2 p(x) dx + \int_{x_N^*}^{\infty} (x - y_N^*)^2 p(x) dx \\
 &= 2 \int_{x_N^*}^{\infty} (x - y_N^*)^2 p(x) dx
 \end{aligned}$$

따라서, 신호의 확률밀도 함수 $p(x)$ 가 좌우 대칭인 경우, 총 왜곡 $D(Q_N^*)$ 는 다음식으로 근사화된다.

$$D(Q_N^*) \cong \frac{2}{3N^2} \left(\int_0^{x_N^*} p^{\frac{1}{3}}(x) \right)^3 + 2 \int_{x_N^*}^{\infty} (x - y_N^*)^2 p(x) dx \quad (4)$$

일반화된 감마 신호원의 확률 밀도 함수는 모두 좌우 대칭이므로, 식(4)에 $p(x)$ 를 대입하고, 또 y_N^* 을 x_N^* 의 함수로 표시한 뒤, 미분하여 0으로 놓고 풀면, 근사왜곡을 최소로 하는 중요변수에 대한 근사식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 x_N^{*a} &= \frac{3}{\lambda} \ln N - \frac{3\alpha - \beta - 3}{\alpha\lambda} \ln x_N^{*a} \\
 &\quad - \frac{3}{\lambda} \ln \left(3^{\frac{\beta+3}{3\alpha}} \lambda^{\frac{3\alpha-\beta-3}{3\alpha}} \Gamma\left(\frac{\beta+3}{3\alpha}\right) \right) + \alpha \left(\frac{1}{x_N^{*a}} \right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

여기서, $\alpha(t)$ 는 $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)/t = 0$ 인 함수를 의미한다. 논문 [3]에 제시된 방법에 따라 식(5)로부터 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 x_N^{*a} &= \frac{3}{\lambda} \ln N - \frac{3\alpha - \beta - 3}{\alpha\lambda} \ln \ln N \\
 &\quad - \frac{1}{\lambda} \ln \left(3^3 \Gamma^3\left(\frac{\beta+3}{3\alpha}\right) \right) \\
 &\quad + \frac{(3\alpha - \beta - 3)^2}{3\alpha^2\lambda} \frac{\ln \ln N}{\ln N} + \alpha \left(\frac{\ln \ln N}{\ln N} \right) \quad (6)
 \end{aligned}$$

표 2에 몇 경우의 x_N^* 의 근사식을 수록하였다.

2.3 최적 양자기 설계

최적 양자기는 최소 평균제곱오차를 갖는 양자기로서, 각각의 양자점과 경계값은 다음 조건식을 만족한다.

$$x_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}, \quad i=2,3,\dots,N \quad (7)$$

$$y_i = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} x f_x(x) dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_x(x) dx}, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (8)$$

이 논문에서의 최적 양자기의 설계는 [1,2]의 로이드-맥스의 방법을 사용하였다. 이때 초기 설정값 $x_{N/2}$ 은 표2의 식을 따랐으며, 이때 $\alpha(\cdot)$ 항은 무시하였다. 중요변수의 이 근사값을 사용하여 반복적인 설계를 할 때, 최적 양자기가 설계되었다고 판정하는데 필요한 반복 회수는 대체로 10회 이내가 되어, 최적 양자기를 설계하는데 반복회수를 줄일 수 있었다.

일반화된 감마 신호원의 특별 형태인 가우스, 라플라스, 양방향 레일리, 통상의 감마 신호원은 $f(x)$ 가 원점을 중심으로 대칭이므로, 최적 양자기 또는 최적 대칭 양자기의 경우 N 이 짝수이면 중앙의 경계값 $x_{N/2}$ 은 0이 되어야 한다. 따라서, 이 논문에서는 $x_{N/2}=0$ 에 가깝도록 위에 제시한 식(7)과 (8)의 최적 양자기 조건을 만족하도록, 반복적인 방법으로 오른쪽 끝에서부터 순서대로 양자점과 경계값을 탐색하게 된다. 결국, 최적 대칭 양자기의 모든 양자점과 경계값은 물론 실제의 중요변수 값을 구할 수 있게 된다. 이때 식(8)을 사용하여 각각의 경계값을 구하는 방법으로 [8]의 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson)법을 사용하였다. (이 방법의 정지조건은 원래의 양자점과 구하는 경계값으로 계산된 양자점 비율이 10^{-14} 보다 작을 경우로 하였다.) 그리고 설계된 양자기의 경우는 정확도를 높이므로 하였으며, $x_{N/2}$ 값이 이 범위가 되면 이때의 기 위해 $N \geq 2^{14}$ 일 때를 제외하고는 $|x_{N/2}| \leq 10^{-6}$ 양자기를 최적 양자기로 판정하였다.

사실 $N \geq 2^{14}$ 인 경우는 양자기를 설계할 때, 상대적으로 정확도가 떨어지게 되는데, 양자점들과 경계값 개수의 증가로 인해 각각의 양자점영역들이 작아지게 되면 인접한 양자점과 경계값에 비해 $x_{N/2}$ 의 경계값이 0에 더욱 가깝게 된다. 그러나 그 만큼 정밀한 양자점들과 경계값들을 계산하는 데에는 한계가 있으므로 $x_{N/2}$ 의 값에도 한계가 생기게 된다. 따라서 $N=2^{14}$ 이상일 때의 양자기 설계는, 계산상의 정확도가 떨어지므로, 쉽지 않았다.

위의 결과, N 이 증가할수록 설계된 중요변수 x_N^* 와 표2의 공식에 의한 근사값의 비율이 1에 가까워짐을 관찰하였다. 예를 들면, 가우스와 양방향 레일리

표 2. 중요 변수 근사식

| | 중요변수에 대한 근사식(x_N^*) |
|-------------|---|
| 일반화된 감마 신호원 | $\frac{3}{\lambda} \ln N - \frac{3\alpha - \beta - 3}{\alpha} \ln \ln N - \frac{1}{\lambda} \ln \left(3^3 \Gamma^3 \left(\frac{\beta+3}{3\alpha} \right) \right) + \frac{(3\alpha - \beta - 3)^2}{3\alpha^2 \lambda} \frac{\ln \ln N}{\ln N} + \alpha \left(\frac{\ln \ln N}{\ln N} \right)$ |
| 가우스 신호원 | $\sqrt{6 \ln N} \left(1 - \frac{\ln \ln N}{4 \ln N} - \frac{\ln 9 \pi}{4 \ln N} - \frac{\ln^2 \ln N}{32 \ln^2 N} + \frac{2 - \ln 9 \pi}{16} \frac{\ln \ln N}{\ln^2 N} + \alpha \left(\frac{\ln \ln N}{\ln^2 N} \right) \right)$ |
| 라플라스 신호원 | $\frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{N}{3} \right)$ |
| 양방향 레일리 신호원 | $\sqrt{3 \ln N} \left(1 - \frac{\ln \ln N}{6 \ln N} - \frac{\ln(3\Gamma(\frac{2}{3}))}{2 \ln N} - \frac{1}{72} \frac{\ln^2 \ln N}{\ln^2 N} + \frac{2 - 3 \ln(3\Gamma(\frac{2}{3}))}{36} \frac{\ln \ln N}{\ln^2 N} + \alpha \left(\frac{\ln \ln N}{\ln^2 N} \right) \right)$ |
| 통상의 감마 신호원 | $2\sqrt{3} \ln N \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\ln \ln N}{\ln N} - \frac{1}{3} \frac{\ln(3^3 \Gamma^3(\frac{5}{6}))}{\ln N} + \frac{1}{36} \frac{\ln \ln N}{\ln^2 N} + \alpha \left(\frac{\ln \ln N}{\ln^2 N} \right) \right)$ |

리 신호원의 경우에는 $N=8$ 이상이면, 공식값은 실제값의 1% 오차 내에 존재하고 있고, 라플라스와 통상의 감마 신호원의 경우는 $N=128$ 이상일 때 1% 이내에 존재한다. 따라서 중요변수를 유도하는 근사식은 N 이 커질 때는 물론 N 이 작을 때도 높은 정확도를 나타내고 있음을 관찰하였다. 또 근사식과 실제 중요변수값의 차이도 감소하는 일관된 경향을 관찰할 수 있었다. 이로써, 우리는 중요변수 근사식이 정확하다고 인정하고, 이를 양자기 불일치에 적용하기로 하였다.

III. 양자기의 분산 불일치

분산 불일치된 양자기의 왜곡값은 분산값의 증가 또는 감소에 따라 변화한다. 입력 신호원의 분산이 설계 신호원의 분산보다 작은 경우에는, 양자기의 지지영역 $[x_2, x_N]$ 안에 위치한 양자점의 분포가 입력 신호의 바깥쪽으로 치우쳐 있으므로 왜곡이 증가하게 된다. 이와는 반대로 분산이 더 큰 신호원인 경우는, 양자점들이 입력 신호원의 안쪽에 과도하게 몰려있는 셈이 되어, 분산이 증가하면 증가할수록, 바깥왜곡이 증가하여 전체 왜곡이 증가하게 된다. 이 논문의 수치 실험에 의하면 $\rho \geq 2$ 일 때, 즉 입력 신호원의 표준편차가 양자기의 표준편차보다 2배 이상만 되어도 바깥왜곡이 안왜곡보다 크게 된다. 즉 ρ 가 크면 클수록 전체적인 왜곡값은 크게 증가하게 된다.

이 논문에서는 위에서 언급한 것처럼 분산이 불일치된 경우에 실제 왜곡값을 양자기의 설계를 통해 실험으로 구하였다. 그리고 불일치 왜곡값을 베넷 적분식을 이용하여 왜곡 근사식으로 표현하였다. 제1차 왜곡 근사식은 최적 양자기의 설계를 통해 구한 실제 중요변수 x_N^* 를 왜곡 근사식에 대입하여 구한 근사식이고, 제2차 왜곡 근사식은 중요변수 x_N^* 대신 표2의 근사식을 사용하여, 제1차 왜곡 근사식에 대입하여 얻었다.

3.1 근사식의 유도

최우대칭인 확률밀도함수 $q(x)$ 에 최적 설계된 양자기 Q_N^* 에, 좌우대칭인 확률분포 $p(x)$ 의 신호원이 입력으로 들어올 때, 왜곡은 식(4)처럼 근사화할 수 있다. 편의상 여기에 다시 쓰기로 한다.

$$D(Q_N^*) \approx \frac{2}{3N^2} \int_0^{x_N^*} \frac{p(x)}{\Lambda_q^2(x)} dx + 2 \int_{x_N^*}^{\infty} (x - y_N^*)^2 p(x) dx \quad (9)$$

$$\Lambda_q(x) = \begin{cases} \frac{q^{1/3}(x)}{2 \int_0^{x_N^*} q^{1/3}(x) dx}, & x \in [x_2^*, x_N^*] \\ 0, & x \notin [x_2^*, x_N^*] \end{cases} \quad (10)$$

식(9)의 첫째항은 안왜곡의 근사값을 나타내며 [4]의 베넷 적분식이고, 둘째항은 실제 비갈왜곡값을 나타낸다. 또 x_N^* 은 Q_N^* 의 중요변수이며 y_N^* 는 $[x_N^*, \infty)$ 의 확률분포 $q(x)$ 에 대한 무게중심이다. 또 $\Lambda_q(x)$ 은 양자점의 밀도함수로 Q_N^* 가 확률분포 $q(x)$ 에 최적이므로 식(10)과 같다.^[9]

일반화된 감마 신호원의 안왜곡 근사식은 식(9)의 첫째항이며, \bar{D}_i 로 정의하자. 여기서, 분산 불일치는, 식(2)로 표현되는 확률밀도함수 $q(x)$ 의 매개변수 $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \sigma$ 와 $p(x)$ 의 매개변수 $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ 사이에, $\alpha = \alpha_0$ 이고, $\beta = \beta_0$ 의 관계가 성립하는 경우이다. (즉, 동일한 확률밀도함수 종류이다. 단지 $q(x)$ 와 $p(x)$ 가 분산만 다를 뿐이다.)

이제, 안왜곡 \bar{D}_i 를 구하기 위해, 식(10)을 식(9)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$D(Q_N^*) \approx \bar{D}_i \equiv \frac{2}{3N^2} \int_0^{x_N^*} \frac{p(x)}{\Lambda_q^2(x)} dx$$

$$= \frac{2}{3N^2} \left(\int_0^{x_N^*} q(x)^{\frac{1}{3}} dx \right)^2 \cdot \left(\int_0^{x_N^*} p(x) q(x)^{-\frac{2}{3}} dx \right) \\ = \frac{2\mu}{3N^2} \left(\int_0^{x_N^*} x^{\frac{\mu}{3}} \exp\left(-\frac{\lambda}{3} x^\sigma\right) dx \right)^2 \\ \cdot \left(\int_0^{x_N^*} x^{\frac{\mu}{3}} \exp\left(-\left(\lambda - \frac{2}{3} \lambda_0\right) x^\sigma\right) dx \right) \quad (11)$$

식(11)의 맨 마지막 표현식의 첫 적분식은 불완전 감마 함수(incomplete gamma function)를 사용하여 표현할 수 있는데, 그 정의는 다음과 같다. 임의의 $a > 0$ 에 대해,

$$P(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt \quad (12)$$

또, 식(11)의 마지막의 둘째 적분식은 $\lambda - 2\lambda_0/3$ 가 양인지 음인지에 따라 더 간단히 표현될 수도 있다. 각 경우를 다음과 같이 나눌 수 있다.

(1) $\lambda - 2\lambda_0/3 < 0$ 인 경우

이 경우에는 불완전 감마 함수의 조건을 만족하지 못하게 된다. 따라서 적분식을 간략하게 표시할 수 없다. 그러나, 라플라스 신호나 다른 특별한 경우에는 닫힌 간단한 식으로 표시할 수 있다. 라플라스 신호원의 경우는 제 3.2절에서 자세히 다루었다.

(2) $\lambda - 2\lambda_0/3 = 0$ 인 경우

이 때는 식(11)의 첫째 적분식은 불완전 감마 함수를 이용하며, 식(11)의 둘째 적분식은 쉽게 적분할 수 있다. 따라서 안왜곡의 근사식 \bar{D}_i 는 다음과 같다.

$$\bar{D}_i = \frac{2}{3N^2} \frac{\mu}{\sigma^2} (x_N^*)^{\frac{\mu+3}{3}} \left(\frac{9}{\lambda^2}\right)^{\frac{\mu+3}{3\sigma}} \\ \cdot \Gamma^2\left(\frac{\beta}{3\sigma} + \frac{1}{3}\right) P^2\left(\frac{\beta}{3\sigma} + \frac{1}{3}, \frac{\lambda}{3} x_N^{*\sigma}\right)$$

(3) $\lambda - 2\lambda_0/3 > 0$ 인 경우

이 경우에는 식(11)의 적분식은 불완전 감마 함수를 이용하여 표현할 수 있게 된다. 따라서 위의 불완전 감마 함수를 이용할 수 있는 경우, 일반화된 감마 신호원에 대하여 불일치된 양자기 안왜곡의 근사식 \bar{D}_i 는 다음과 같다.

$$\bar{D}_i = \frac{2}{3N^2} \frac{\mu}{\sigma^3} \left(\frac{9}{\lambda_0^2(\lambda - \frac{2}{3} \lambda_0)}\right)^{\frac{\mu+3}{3\sigma}} \Gamma^3\left(\frac{\beta}{3\sigma} + \frac{1}{3}\right) \\ \cdot P^2\left(\frac{\beta}{3\sigma} + \frac{1}{3}, \frac{\lambda}{3} x_N^{*\sigma}\right) P\left(\frac{\beta}{3\sigma} + \frac{1}{3}, \left(\lambda - \frac{2}{3} \lambda_0\right) x_N^{*\sigma}\right) \quad (13)$$

비갈왜곡 $D_o(Q_N^*)$ 은 일반화된 감마 신호원의 경우 정확히 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 D_o(Q_N^*) &= 2 \int_{x_N^*}^{\infty} (x - y_N^*)^2 p(x) dx \\
 &= 2\mu \int_{x_N^*}^{\infty} x^{\beta+2} \exp(-\lambda x^a) dx - 4\mu y_N^* \int_{x_N^*}^{\infty} x^{\beta+1} \exp(-\lambda x^a) dx \\
 &\quad + 2\mu y_N^{*2} \int_{x_N^*}^{\infty} x^{\beta} \exp(-\lambda x^a) dx \\
 &= \frac{2\mu}{a} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{\beta+3}{a}} [1 - P(\frac{\beta+3}{a}, \lambda x_N^{*a})] \Gamma(\frac{\beta+3}{a}) \\
 &\quad - 4y_N^* \frac{\mu}{a} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{\beta+2}{a}} [1 - P(\frac{\beta+2}{a}, \lambda x_N^{*a})] \Gamma(\frac{\beta+2}{a}) \\
 &\quad + 2y_N^{*2} \frac{\mu}{a} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{\beta+1}{a}} [1 - P(\frac{\beta+1}{a}, \lambda x_N^{*a})] \Gamma(\frac{\beta+1}{a}) \quad (14)
 \end{aligned}$$

이제, 일반화된 감마 신호원의 경우 왜곡의 최종 근사식은 안왜곡과 비갈왜곡의 합에 의해 표현된다.

$$D(Q_N^*) \approx \bar{D} \equiv \bar{D}_i + D_o \quad (15)$$

이 논문에서는 식(15)의 \bar{D} 를 제1차 왜곡 근사식이라고 부르기로 한다. 이 식은 중요변수 x_N^* 의 함수이며, 양자기의 설계로부터 구해 알려져 있는 실제 중요변수값 x_N^* 을 대입하여 사용한다. 제2차 왜곡 근사식은 식(15)에 표2의 중요변수 근사식을 대입하여 얻는다.

라플라스 신호원에 대한 실험 결과에 의하면, 실제 중요변수값을 이용한 제1차 왜곡 근사식이, 제2차 왜곡 근사식보다 높은 정확도를 갖고 있는 것으로 판명되었다. 이는 양자기 왜곡은 중요변수의 정확도에 따라 변하기 때문에, 실제 중요변수를 대입한 값이 높은 정확도를 갖는 것으로 판단된다.

3.2 라플라스 신호원의 경우

이 논문에서는 라플라스 신호원을 수치 결과를 위한 신호로 선택하였다. 여기에는 다음 두 가지 이유가 작용하였다. 첫째, 중요변수 x_N^* 이 표2에 나타난 것 처럼, 매우 간단한 식으로 표현된다. 둘째, 매개변수 $\beta=0$ 이므로, $\lambda - 2\lambda/3$ 의 음, 양, 또는 0의 여부에 상관없이 닫힌 적분식이 존재하여, 왜곡의 정성적인 측면을 연구하기가 좋은 것으로 판명되었다. 따라서 라플라스 신호원일 때 각 매개변수를 대입하면 왜곡 근사식을 쉽게 나타낼 수 있다. 라플라스 신호원의 경우에 제1차 왜곡 근사식은 최저 양자기의 설계를 통해 구한 실제 중요변수 x_N^* 를 왜곡

근사식에 대입하여 구한 근사식이고, 제2차 왜곡 근사식은 제1차 왜곡 근사식 \bar{D} 에 중요변수 x_N^* 대신에 표2의 근사식을 대입하여 얻었다. 표3에, $\rho = \sigma_p/\sigma_q$ 에 따른 왜곡 근사식을 제시하였다.

3.3 라플라스 신호원에 대한 왜곡 근사식의 정확도 및 평가

여기서는 라플라스 신호원의 경우에, 왜곡 근사식의 정확도를 ρ 와 N 값에 대한 함수로 고찰하였으며, 정확도를 확인한 뒤, 이 두 식을 관찰함에 의해 왜곡에 영향을 미치는 요소가 무엇이며, 어떻게 영향을 미치는지 고찰하였다.

표 3. 라플라스 신호원에 대한 제1차 및 2차 왜곡 근사식의 ρ 값에 대한 표현

| | | |
|----|----------------------|--|
| D | $\rho < \frac{3}{2}$ | $\frac{9}{2} \frac{1}{N^2} \frac{\sigma_p^2}{\rho^2(3-2\rho)} [1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_p} - \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sigma_q} x_N^*}] \cdot [1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{3\sigma_p} x_N^*}]^2 + \sigma_p^2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_p} x_N^*} (1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2})$ |
| | $\rho = \frac{3}{2}$ | $\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\sigma_p x_N^*}{N^2} [1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{3\sigma_p} x_N^*}]^2 + \sigma_p^2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_p} x_N^*} (1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2})$ |
| | $\rho > \frac{3}{2}$ | $\frac{9}{2} \frac{1}{N^2} \frac{\sigma_p^2}{\rho^2(3-2\rho)} [1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_p} - \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sigma_q} x_N^*}] \cdot [1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{3\sigma_p} x_N^*}]^2 + \sigma_p^2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_p} x_N^*} (1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2})$ |
| D̄ | $\rho < \frac{3}{2}$ | $\frac{9}{2} \sigma_q^2 \frac{1}{N^2} \frac{[1 - (\frac{N/3}{3-2\rho})^\rho] (1 - \frac{3}{N})^2}{3-2\rho} + \sigma_p^2 (\frac{3}{N})^{\frac{3}{\rho}} (1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2})$ |
| | $\rho = \frac{3}{2}$ | $\frac{2\sigma_p}{N^2} \ln(\frac{N}{3}) [1 - (\frac{3}{N})^{\frac{3}{2\rho}}]^2 + \sigma_p^2 (\frac{3}{N})^{\frac{3}{\rho}} (1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2})$ |
| | $\rho > \frac{3}{2}$ | $\frac{9}{2} \sigma_q^2 \frac{1}{N^2} \frac{[1 - (\frac{N/3}{2\rho-3})^\rho - 1] (1 - \frac{3}{N})^2}{2\rho-3} + \sigma_p^2 (\frac{3}{N})^{\frac{3}{\rho}} (1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2})$ |

근사식의 정확도 표4에 일반화된 감마신호원 중 라플라스 신호의 경우, 제1차 왜곡 근사식과 제2차 왜곡 근사식으로부터 구한 왜곡을 실제 왜곡과 함께 제시하였다. 실제 왜곡 D 는 양자점 N 이 증가할수록 감소하는 것은 당연하다. 한편, ρ 값이 증가하면 왜곡값은 증가한다. 그것은, 양자기 불일치 정도가 증가하여, 양자기의 성능이 떨어지기 때문이다. 또한 표5에는 실제 왜곡값에 대한 근사식값의 비율

을 제시하였으며, 이것을 그림3과 4에 표현하였다. 이 들로부터 양자점의 개수가 증가할수록 실제값과 근사값의 비율도 1로 근접하며, 차이도 감소하는 것을 알 수 있다. 예를 들어 $\rho=1$ 인 경우에는, 양자기가 일치된 상태에서, $N=2^9$ 이상부터는 제1차 왜곡 근사값과 제2차 왜곡 근사값이 99% 이상의 정확도를 보였다. 그리고 $\rho \geq 2$ 일 때, 제1차 왜곡 근사식 \tilde{D} 은 $N=2^6$ 이상부터 2% 이내의 오차를, 제2차 왜곡 근사식 \tilde{D} 은 4% 이내의 오차를 보이므로 두 근사식 모두 높은 정확도를 나타낸다. 즉 양자기가 불일치된 경우, 왜곡 근사식은 N 이 고정되어 있을 때 ρ 가 증가할수록 1로 수렴하며, 반대로 ρ 가 고정된 경우, N 이 증가할수록 역시 1로 수렴한다. 그리고, 그림3과 4로부터 제1차 및 2차 근사식과 실제값의 비율이, ρ 와 N 이 증가할수록, 1에 근접함을 쉽게 파악할 수 있다.

표 4. 분산 불일치 양자기의 라플라스 신호원에 대한 왜곡

| ρ | $N=2^2$ | $N=2^4$ | $N=2^6$ | $N=2^8$ | $N=2^{10}$ | $N=2^{12}$ | $N=2^{14}$ |
|-------------|---------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|
| 1 | 1.8E-1 | 1.5E-2 | 1.1E-3 | 6.8E-5 | 4.3E-6 | 2.7E-7 | 1.7E-8 |
| 1.5 | 5.0E-1 | 5.6E-2 | 4.8E-3 | 3.7E-4 | 2.7E-5 | 2.0E-6 | 1.4E-7 |
| 2 | 1.2E+0 | 2.0E-1 | 2.8E-2 | 3.7E-3 | 4.6E-4 | 5.8E-5 | 7.3E-6 |
| \tilde{D} | 4 | 8.4E+0 | 3.4E+0 | 1.2E+0 | 4.4E-1 | 1.6E-1 | 5.6E-2 |
| 6 | 2.3E+1 | 1.3E+1 | 6.5E+0 | 3.3E+0 | 1.6E+0 | 8.2E-1 | 4.1E-1 |
| 8 | 4.6E+1 | 2.9E+1 | 1.8E+1 | 1.1E+1 | 6.3E+0 | 3.8E+0 | 2.2E+0 |
| 10 | 7.7E+1 | 5.3E+1 | 3.6E+1 | 2.4E+1 | 1.6E+1 | 1.0E+1 | 6.8E+0 |
| 1 | 1.2E-1 | 1.3E-2 | 1.0E-3 | 6.7E-5 | 4.3E-6 | 2.7E-7 | 1.7E-8 |
| 1.5 | 4.5E-1 | 5.1E-2 | 4.6E-3 | 3.6E-4 | 2.7E-5 | 1.9E-6 | 1.4E-7 |
| 2 | 1.1E+0 | 2.0E-1 | 2.8E-2 | 3.6E-3 | 4.6E-4 | 5.8E-5 | 7.3E-6 |
| \tilde{D} | 4 | 8.4E+0 | 3.4E+0 | 1.2E+0 | 4.4E-1 | 1.6E-1 | 5.6E-2 |
| 6 | 2.3E+1 | 1.3E+1 | 6.5E+0 | 3.3E+0 | 1.6E+0 | 8.2E-1 | 4.1E-1 |
| 8 | 4.6E+1 | 2.9E+1 | 1.8E+1 | 1.1E+1 | 6.3E+0 | 3.8E+0 | 2.2E+0 |
| 10 | 7.7E+1 | 5.3E+1 | 3.6E+1 | 2.4E+1 | 1.6E+1 | 1.0E+1 | 6.8E+0 |
| 1 | 2.2E-1 | 1.3E-2 | 1.0E-3 | 6.7E-5 | 4.3E-6 | 2.7E-7 | 1.7E-8 |
| 1.5 | 7.1E-1 | 5.7E-2 | 4.8E-3 | 3.7E-4 | 2.7E-5 | 2.0E-6 | 1.4E-7 |
| 2 | 1.6E+0 | 2.2E-1 | 2.9E-2 | 3.7E-3 | 4.7E-4 | 5.9E-5 | 7.4E-6 |
| \tilde{D} | 4 | 1.0E+1 | 3.6E+0 | 1.3E+0 | 4.5E-1 | 1.6E-1 | 5.6E-2 |
| 6 | 2.6E+1 | 1.3E+1 | 6.6E+0 | 3.3E+0 | 1.6E+0 | 8.3E-1 | 4.1E-1 |
| 8 | 5.1E+1 | 3.0E+1 | 1.8E+1 | 1.1E+1 | 6.7E+0 | 3.8E+0 | 2.2E+0 |
| 10 | 8.3E+1 | 5.5E+1 | 3.6E+1 | 2.4E+1 | 1.6E+1 | 1.0E+1 | 6.8E+0 |

정확도의 이유 표준편차의 비율 ρ 값이 클수록 왜곡 근사식이 정확해지는 이유는, ρ 값이 크면 클수록 바깥왜곡이 증가하기 때문이다. 즉 $\rho=1$ 일 때는 당연히 바깥왜곡이 안왜곡보다 매우 작지만, $\rho > 3/2$ 이면 양자기의 불일치로 바깥왜곡값이 증가하

게 된다. 예를 들어 $\rho \geq 4$ 이면 실제 바깥왜곡이 실제 안왜곡보다 100 배 이상 커지는 것이 관찰되었다. 식(9)의 왜곡 근사식에서 보면, 바깥왜곡은 실제 왜곡값을 나타내는 것으로, 양자기가 불일치되었을 때 전체 왜곡에 영향을 미치는 중요한 항으로 작용하게 된다. 따라서 ρ 가 증가할수록 왜곡의 근사식은 실제 왜곡값과 같아지게 된다. 그리고 양자점의 개수가 증가할수록 전체 왜곡에 주요한 영향을 미치는 바깥왜곡값이 줄어들어, 실제값과 근사식은 역시 같아지게 된다.

왜곡에 영향을 미치는 요소 표3에서 제2차 왜곡 근사식 \tilde{D} 은 라플라스 신호원의 양자기 왜곡을 가장 간단히 표현한 근사식으로서, 안왜곡과 바깥왜곡이 어떤 항으로 표현되고, 어떤 요소를 가지고 있는지 잘 보이고 있다. 편의상 $\rho > 3/2$ 일 때 제2차 왜곡 근사식을 다시 표시하기로 하자.

표 5. 분산 불일치 양자기의 라플라스 신호원에 대한 왜곡의 근사식과의 비교

| ρ | $N=2^2$ | $N=2^4$ | $N=2^6$ | $N=2^8$ | $N=2^{10}$ | $N=2^{12}$ | $N=2^{14}$ |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|
| 1 | 0.688 | 0.815 | 0.943 | 0.986 | 0.996 | 0.999 | 1.000 |
| 1.5 | 0.900 | 0.921 | 0.967 | 0.986 | 0.993 | 0.995 | 0.996 |
| 2 | 0.963 | 0.971 | 0.987 | 0.992 | 0.994 | 0.995 | 0.995 |
| \tilde{D}/\tilde{D} | 4 | 0.997 | 0.998 | 0.999 | 0.999 | 0.999 | 0.612 |
| 6 | 0.999 | 0.999 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 8 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 10 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 1 | 1.222 | 0.828 | 0.943 | 0.986 | 0.996 | 0.999 | 1.000 |
| 1.5 | 1.416 | 1.019 | 0.996 | 1.001 | 1.003 | 1.004 | 1.004 |
| 2 | 1.372 | 1.079 | 1.027 | 1.014 | 1.013 | 1.013 | 1.013 |
| \tilde{D}/\tilde{D} | 4 | 1.195 | 1.059 | 1.023 | 1.013 | 1.011 | 1.011 |
| 6 | 1.128 | 1.041 | 1.016 | 1.009 | 1.008 | 1.007 | 1.008 |
| 8 | 1.085 | 1.031 | 1.012 | 1.007 | 1.006 | 1.006 | 1.006 |
| 10 | 1.076 | 1.025 | 1.010 | 1.006 | 1.005 | 1.005 | 1.005 |

$$\tilde{D} = \frac{\rho}{2} \sigma_a^2 \frac{1}{N^2} \left[\frac{(N/3)^{\rho} - 1}{2\rho - 3} (1 - \frac{3}{N})^2 + \sigma_a^2 \left(\frac{3}{N}\right)^{\rho} \left(1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2}\right) \right] \quad (16)$$

안왜곡의 경우는 식(16)의 첫째항으로, 분모는 N^2 항이고, 분자는 $N^{(2\rho-3)/\rho}$ 항이므로, $N^{-3/\rho}$ 에 비례한다. 따라서 N 이 고정되어있는 경우, ρ 값의 증가에 따라 안왜곡은 증가한다. 이는 ρ 가 증가할수록 양자기의 양자점들과 경계값들이 입력 신호원에 적합하지 않아, 안왜곡이 증가함을 설명하고 있다. 그리고 ρ 값이 고정되어 있는 경우, N 의 증가에 따라

안왜곡은 감소한다. 이는 N 이 증가할수록 각각의 양자점들과 경계값들의 양자영역이 조밀해지므로 안왜곡이 감소함을 설명하고 있다. 바깥왜곡의 경우는 식(16)의 둘째항으로, σ_p^2 와 $N^{-3/\rho}$ 에 비례한다. 이는 바깥왜곡이 입력 신호원의 분산이 크면 클수록, 안왜곡보다 크게 증가함을 수식으로 표현하고 있다.

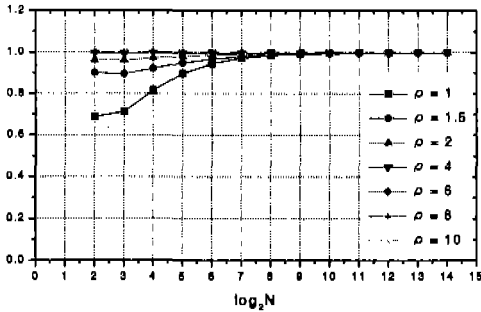


그림 3. 실제 왜곡 D 에 대한 제1차 왜곡 근사식 \tilde{D} 의 비율 \tilde{D}/D

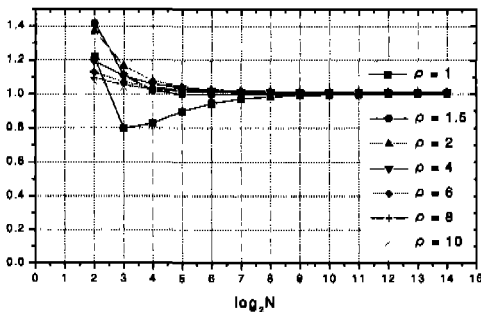


그림 4. 실제 왜곡 D 에 대한 제2차 왜곡 근사식 \tilde{D} 의 비율 \tilde{D}/D

안왜곡에 대한 바깥왜곡의 비율 바깥왜곡이 안왜곡보다 얼마나 많이 양자기에 영향을 미치는지 보기 위해, 두 왜곡의 비율을 고려해보자. 실제왜곡과 근사왜곡에 대한 안왜곡과 바깥왜곡의 비율은 표6에 나타내었다. 먼저 $\rho < 3/2$ 일 때, 안왜곡에 대한 바깥왜곡의 비율은 양자기의 특성상 당연히 매우 작다. 둘째, $\rho = 3/2$ 일 때 표3으로부터 다음과 같다.

$$\left. \frac{D_o}{\tilde{D}_i} \right|_{\rho=3/2} = \frac{\frac{5}{9} \sigma_p^2 \left(\frac{3}{N}\right)^2}{\frac{2\sigma_p}{N^2} \ln\left(\frac{N}{3}\right) \left[1 - \left(\frac{3}{N}\right)^{\frac{1}{2\sigma_p}}\right]^2} = \frac{5\sigma_p}{2 \ln\left(\frac{N}{3}\right) \left[1 - \left(\frac{3}{N}\right)^{\frac{1}{2\sigma_p}}\right]^2}$$

$$= \frac{15}{4 \ln\left(\frac{N}{3}\right) \left[1 - \left(\frac{3}{N}\right)\right]^2} \quad (17)$$

표 5. 분산 불일치 양자기의 라플라스 신호원에 대한 왜곡의 근사식과의 비교

| | ρ | $N=2^2$ | $N=2^4$ | $N=2^6$ | $N=2^8$ | $N=2^{10}$ | $N=2^{12}$ | $N=2^{14}$ | 식(18) |
|----------|--------|----------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|--------|
| | 1 | 1.4 | 0.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | - |
| | 2 | 6.5 | 2.0 | 1.2 | 0.8 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.0 |
| 실제왜곡의 경우 | 2 | 19.1 | 7.9 | 5.9 | 5.3 | 5.0 | 4.8 | 4.8 | 5.0 |
| | 4 | 219.6 | 124.9 | 114.2 | 112.4 | 112.1 | 112.0 | 112.0 | 125.0 |
| | 6 | 838.6 | 516.5 | 487.0 | 483.3 | 482.8 | 482.7 | 482.7 | 549.0 |
| | 8 | 2114.3 | 1349.5 | 1286.9 | 1280.2 | 1279.4 | 1279.4 | 1279.4 | 1469.0 |
| | 10 | 4264.9 | 2790.7 | 2676.7 | 2665.4 | 2664.4 | 2664.3 | 2664.2 | 3077.0 |
| | 1 | 5.2 | 0.3 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | - |
| | 2 | 25.5 | 2.7 | 1.2 | 0.8 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.0 |
| 제1차 | 2 | 77.6 | 10.6 | 6.5 | 5.5 | 5.1 | 5.0 | 4.9 | 5.0 |
| 근사식 경우 | 4 | 932.0 | 174.7 | 131.3 | 123.5 | 121.8 | 121.4 | 121.3 | 125.0 |
| | 6 | 3616.4 | 734.4 | 570.2 | 541.2 | 534.8 | 533.3 | 532.5 | 549.0 |
| | 8 | 9191.9 | 1935.6 | 1521.0 | 1447.3 | 1431.0 | 1427.0 | 1424.9 | 1469.0 |
| | 10 | 18720.2 | 4024.0 | 3181.5 | 3031.0 | 2997.2 | 2989.1 | 2984.6 | 3077.0 |
| | 1 | 48.0 | 0.3 | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | - |
| | 2 | 208.6 | 3.4 | 1.3 | 0.9 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.0 |
| 제2차 | 2 | 697.1 | 13.4 | 7.0 | 5.7 | 5.3 | 5.1 | 5.1 | 5.0 |
| 근사식 경우 | 4 | 6621.5 | 216.0 | 140.7 | 128.5 | 125.8 | 125.2 | 125.0 | 125.0 |
| | 6 | 25062.7 | 905.1 | 610.5 | 562.8 | 552.3 | 549.8 | 549.2 | 549.0 |
| | 8 | 62942.1 | 2382.1 | 1628.3 | 1505.1 | 1477.8 | 1471.2 | 1469.5 | 1469.0 |
| | 10 | 127281.2 | 4948.5 | 3405.6 | 3152.0 | 3095.3 | 3061.5 | 3078.1 | 3077.0 |

위 식(17)에서는 N 이 256 이상일 때, 안왜곡이 바깥왜곡보다 크다. 그리고 마지막으로 $\rho > 3/2$ 일 때 두 왜곡의 비율은 다음과 같다.

$$\left. \frac{D_o}{\tilde{D}_i} \right|_{\rho > 3/2} = \frac{\sigma_p^2 \left(\frac{3}{N}\right)^{\frac{3}{\rho}} \left(1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2}\right)}{\frac{9}{2} \frac{\sigma_p^2}{N^2} \frac{[(N/3)^{\frac{1}{\rho}} - 1]}{2\rho - 3} \left(1 - \frac{3}{N}\right)^2} = \frac{2}{9} \rho^2 (2\rho - 3) \frac{3^{\frac{3}{\rho}}}{3^{\frac{2\rho-3}{\rho}} - N^{\frac{2\rho-3}{\rho}}} \frac{\left(1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2}\right)}{\left(1 - \frac{3}{N}\right)^2} \approx 2\rho^2 (2\rho - 3) \left(1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2}\right) \quad (N \text{이 큰 경우}) \quad (18)$$

위 식(18)은 N 이 256 이상일 때, 근사화된 식으로, ρ 값에 따라 안왜곡에 대한 바깥왜곡의 비율을 수식으로 나타내고 있다. 가령, $\rho = 4$ 인 경우, 이 비율은 125이며, 실제값 112와는 약 10% 정도의 차이가 있다. 이로써, 식(18)은 ρ 가 클수록, 바깥왜곡이 전체 왜곡에 큰 영향을 미치고 있다는 사실을 잘 나타내고 있다.

IV. 결론

이 논문은 일반화된 감마 신호원에 대한 양자화의 분산 불일치에 대해 고찰하였다. 주요한 결과로, 분산 불일치된 양자화의 왜곡을 유도·제시한 두 근사식이며, 이 근사식들은 라플라스 신호원의 경우 대단히 정확함을 수치 실험으로 확인하였다. 이 근사식은 안왜곡에 베넷 적분식을 사용하고, 바깥왜곡에 실제 왜곡을 사용하였다. 이 왜곡 근사식은 불일치가 클수록 높은 정확도를 보였는데, 그 이유는 양자기 왜곡값은 양자기 입력 신호원의 분산이 설계된 신호원의 분산보다 크면 클수록, 바깥왜곡이 안왜곡보다 더 심하게 증가하여 전체 왜곡이 크게 증가하기 때문이다. 또 근사식의 정확도는 양자점의 개수가 많을수록, 실제 왜곡을 사용하는 바깥왜곡이 더 지배적으로 되어, 정확도가 증가하였다. 일반화된 감마 신호원 가운데 하나인 라플라스 신호원의 경우, 제1차 왜곡 근사식과 제2차 왜곡 근사식은 양자점의 개수가 64 이상인 모든 경우에 대해 실제 왜곡의 4% 이내의 오차를 갖는, 높은 정확도를 보였다. 이를 종합하면, 통상의 베넷 적분값이 무한대가 되4 었던 $\rho \geq 3/2$ 인 분산 불일치의 경우에도 적용되는, 정확도 높은 직접적인 공식을 최초로 제시했다는 점에서, 이 논문의 기여도가 높을 것으로 기대된다.

참고 문헌

[1] S.P. Lloyd, "Least squares quantization in PCM," *IEEE Trans. Inform.*, IT-28, pp. 127-135, Mar. 1982.

[2] J. Max, "Quantization for minimum distortion," *IRE Trans. on Inform. Theory*, IT-6, pp. 7-12, Jan. 1960.

[3] S. Na and D.L. Neuhoff, "On the support region of asymptotically optimum mean-square error quantizers for a generalized gamma source," *IEEE Trans. Inform. Theory*에 투고중.

[4] N.S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding of Waveforms*, Prentice-Hall, 1984.

[5] W. Mauersberger, "Experimental results on the performance of mismatched quantizers," *IEEE Trans. Inform., Theory*, vol. IT-25, pp. 381-386, July 1979.

[6] Y. Yamada, S. Tazaki, M. Kasahara, and T. Namekawa, "Variance mismatch of vector quantizers," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-30, pp. 104-107, Jan. 1984.

[7] 구기일, 임실규, 나상신, "일반화된 감마 신호원에 대한 최적 끝경계값 식의 정확도에 관한 연구" *KSPC 99 학술대회 논문집*, pp. 971-974 포항공대, 1999년 10월

[8] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge Univ. Press, 1989.

[9] P.F. Panter and W. Dite, "Quantization distortion in pulse count modulation with nonuniform spacing of levels," *Proc. IRE*, pp. 44-48, Jan. 1951

구 기 일(Ki-il Koo)

학생회원

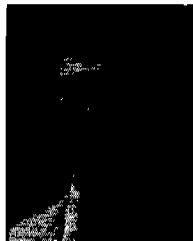


1999년 2월 : 아주대학교
전자공학과 졸업
1999년 3월 : 아주대학교
전자공학과 대학원 입학
1999년 3월~현재 : 아주대학교
전자공학과 부호화
연구실 석사과정

<주관심 분야> 차세대 인터넷통신, 디지털 통신, 이동통신 Source Coding.

나 상 신(Sang-sin Na)

정회원



1982년 2월 : 서울대학교
전자공학과 학사
1985년 2월 : University of
Michigan, Ann
Arbor,
전기 및 컴퓨터
공학과 석사

1989년 2월 : University of Michigan, Ann Arbor,
전기 및 컴퓨터 공학과 박사

1989년~1991년 : Assistant Professor at the
University of Nebraska Lincoln

1991년~현재 : 아주대학교 전자공학과 교수

<주관심 분야> 정보이론, 자료압축, 디지털 신호처리, 디지털 통신