

## 2관성 시스템의 혼합 $H_2/H_\infty$ 디지털 제어

정회원 박종우\*, 객원성\*\*

### A mixed $H_2/H_\infty$ digital control of Two-mass system

Jong-Woo Park\*, Chil-Seong Kwak\*\* *Regular Members*

#### 요 약

혼합  $H_2/H_\infty$  제어 방법은  $H_2$ -성능과  $H_\infty$ -강건성을 결합한 제어기 설계를 위한 적극적인 접근법의 하나이다. 이 논문에서는, 먼저 설계하고자 하는 제어시스템의 추종특성을, 불확실성이 포함된 제어대상에 대하여,  $H_2$ -노름으로 표현하고, 다음으로  $H_\infty$ -노름으로 제어 시스템의 강건 안정성을 얻도록 하였다. 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기는 2관성 스프링 시스템을 제어대상으로 하여 설계하였다. 2관성 제어시스템에 대하여 설계한 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기는, 제어대상의 공진 현상을 안정화하면서 동시에 추종 성능을 향상시키고자 하였다.

#### ABSTRACT

The mixed  $H_2/H_\infty$  control method is one of positive approaches to design a controller having both the  $H_2$ -performance and the  $H_\infty$ -robust stability. In this paper, Firstly, The tracking performance to be designed has been represented as  $H_2$ -norms for the plants with uncertainties. Secondly,  $H_\infty$ -norm have been set up in order to ensure the robust stabilities. The mixed  $H_2/H_\infty$  digital controllers have been designed for a two-mass spring system. The mixed  $H_2/H_\infty$  digital controller for the two-mass spring system was intended to stabilize the resonance of the plant together with the good tracking performance.

#### I. 서론

디지털 제어 방식이 다양한 장점을 제공한다는 것은 잘 알려져 있다. 디지털 제어의 전체 시스템은 연속시간 신호와 이산시간 신호가 혼합된 시스템이다. 이러한 시스템을 샘플치 시스템이라고 한다.

혼합  $H_2/H_\infty$  제어는 불확실성이 포함된 제어대상에 대하여  $H_\infty$ -강건성 및  $H_2$ -추종성능을 갖게 하는 제어이론이다. 연속시간 시스템에 대하여 해석적인 혼합  $H_2/H_\infty$  제어 설계(analytical mixed  $H_2/H_\infty$  control synthesis)의 일괄된 해법은 정립되지 않은 실정이다. 또한, 이 방법을 샘플치 제어시스템으로 확장하는 문제도 해석적인 결과는 정립되지 않았다.

이 논문에서는 샘플치 제어시스템의 설계법을 발전시킨, 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어 방법을 도입하였다. 이 방법은, 순수 이산시간 제어 방법으로 설계한 제어기가 표본화 주기에 따라 그 성능의 저하가 비교적 큰 결점을 개선한 방법으로 주목을 받고 있다. 모의실험과 실험실에서 2관성 시스템(two-mass system)에 대하여 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기를 설계한다.

#### II. 디지털 시스템에 대한 혼합 $H_2/H_\infty$ 문제

이 절에서는 비용량수<sup>[1]</sup>에 의해 유도된 샘플치 혼합  $H_2/H_\infty$  문제를 다룬다. 다음과 같은 상태 방정식에 의해 표현되는 디지털 시스템  $G_{eq,d}$ 를 고려한다.

\* 재능대학 전자통신과(parkjw@mail.jnc.ac.kr), \*\* 재능대학 전자과(star614@mail.jnc.ac.kr)  
논문번호: T00024-0725, 접수일자: 2000년 7월 25일

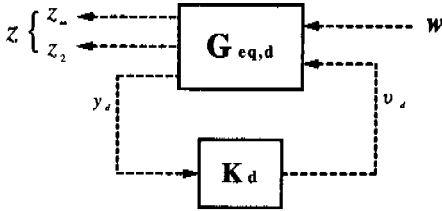


그림 1. 폐경로 시스템

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_v v(k) \\
 z_{\infty}(k) &= C_{z_{\infty}x} x(k) + D_{z_{\infty}w} w(k) + D_{z_{\infty}v} v(k) \\
 z_2(k) &= C_{z_2x} x(k) + D_{z_2w} w(k) + D_{z_2v} v(k) \\
 y(k) &= C_y x(k) + D_{yw} w(k) + D_{yv} v(k)
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서,  $y_d(k) \in \ell_2^p(0, \infty)$ 는 측정된 출력 (measured output)이고, 이산 샘플링 순간  $kh$ 에서 유용하다. 또한,  $v_d = k_d y_d$ 는 제어 신호이다. 시스템의 연속시간 부분은 시불변으로 가정한다.

다음의 표준 가정들이 시스템에 부과된다.

(A1) 이산 시스템  $(e^{Ah}, \int_0^h \exp(At) B_2 dt)$ 는 안정 가능하고, 이산 시스템  $(C_2, \exp(Ah))$ 는 검출 가능하다.

(A2) 연속 시간 시스템  $(C_1, A)$ 는 검출 가능하다.

(A3)  $D_{12}^T D_{12} > 0$ .

제어 입력  $u_c$ 는 주기가  $h$ 인 zero-order hold 함수 연산에 의해 생기는 것으로 가정한다.

$$u_c(t) = u_d(k), \quad t \in [kh, kh+h) \tag{2}$$

허용 가능한 제어기들의 집합은 다음과 같이 선형 인과관계 제어기  $x: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ 로 구성되는 것으로 가정된다.

$$u_d = x y_d \tag{3}$$

식(3)은 페루프 시스템 식(1)을 지수적으로 안정화시킨다. 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어 문제는 페루프 시스템의  $(w_c, w_d)$ 로부터  $z_c$ 까지의  $\ell_2/\ell_2$  유도 노름이  $\gamma$ 보다 작은 식(3)의 허용 가능한 제어기를 설계하는 것이다.

### III. 혼합 $H_2/H_\infty$ 디지털 제어기 설계

혼합  $H_\infty$  디지털 제어기 설계 절차는 이미 잘

알려져 있고, 많은 연구가 활발히 진행중이다. 그러나, 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기 설계 과정은 아직 개발되어 있지 않다.

이 논문에서는 올림을 이용한 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기 설계방법을 새롭게 제시한다. 이를 위해, 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어 문제를 이미 잘 알고있는 샘플치  $H_\infty$  제어 문제로 전환하는 5단계 설계 절차를 다음과 같이 제안한다.

<단계1> 설계 목적에 부합하는 일반화 제어대상을 구성한다.

<단계2> 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합제어기 설계방법을 사용하여  $H_2$  노름 값과,  $H_\infty$  노름 값을 얻어낸다.

<단계3> 단계2의 결과에서,  $H_2$  노름에 관련된 하중함수만을 사용하여 연속시간  $H_2$  최적 제어기를 설계한다.

<단계4> 단계3의 연속시간  $H_2$  제어기에 의하여 제어되는 시스템의 감도함수(sensitivity function)의 역함수를, 다시 공칭 제어대상의 하중함수로 추가시킨다.

<단계5> 단계4의 일반화 제어대상에 대하여, 다시, 단계2의  $H_\infty$  노름에 관련된 하중함수를 추가시키고,  $H_\infty$  제어기를 설계한다.

위의 설계절차에 의한 혼합  $H_2/H_\infty$  제어기를, 이 논문에서는, 공진 모드를 갖는 2관성 시스템에 적용하여, 모의/실물 실험으로 제어 효과를 검증하였다.

### IV. 모의실험 및 실물실험

이 절에서는, 이 논문에서 제시한 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기를, 자체 제작한 2-관성 시스템에 적용하여 얻어낸 모의실험 및 실물실험 결과를 연속 시간  $H_2/H_\infty$  혼합제어기와 비교 검토한다.

#### 4.1 제어대상과 설계목적

2-관성 시스템에 대한 간단한 구조를 그림 2에 나타내었다.



그림 2. 2-관성 공진 시스템

이 시스템의 전달함수  $P_{TMS}(s)$ 는, 자체 제작한 실험장치에 대하여, Hewlett Packard 3563A 제어 시스템 분석기를 이용하여 얻은 주파수 응답을 극영점 수의 지정에 의한 곡선 맞춤법으로 얻는다. 실측된 전달함수는 식(4)와 같다.

$$P_{TMS}(s) = \frac{986(s^2 + 79.6s + 6.721 \times 10^6)}{(s + 54.39)(s^2 + 77.12s + 1.286 \times 10^7)} \quad (4)$$

식(4)로 표현되는 제어대상  $P_{TMS}(s)$ 는 그림 3 과 같은 주파수 특성을 갖는다.

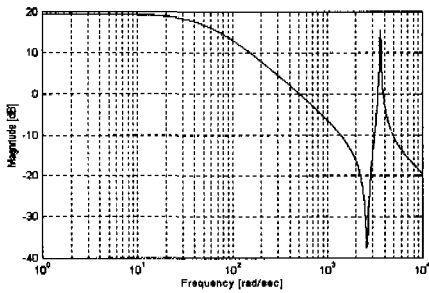


그림 3. 제어대상  $P_{TMS}(s)$ 의 주파수 특성

이 시스템은, 극점이  $-38.6 \pm j358.61$ 과  $-54.4$ 에 있는 안정한 3차 시스템이지만, 진동이 있다. 그림 3의 주파수 특성은 2000[rad/sec] 부근에서 반공진 주파수와 4000[rad/sec] 부근의 공진 주파수가 시스템의 공진을 유발시키는 것을 알 수 있다. 우리의 제어 목적은 위와 같은 제어 대상에 대하여, 다음 조건을 만족하는 안정화 제어기를 구하는 것이다.

- (s1) 외란이 부하의 각속도에 미치는 영향을 최소화한다.
- (s2) 제어시스템이 부하의 변동과 스프링 상수의 변동 등에 대하여 강건 안정하다.
- (s3) 축의 비틀림 각도, 제어입력이 크지 않도록 한다.
- (s4) 기준입력에 대하여 부하 전동기가 진동없이 빠르게 추종한다.
- (s5) 각속도 기준입력과 부하 전동기의 각속도와의 편차는 영이다.

#### 4.2 2-관성 시스템의 제어구조

앞 절에서 소개한 새로운 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털제어를 위해, 먼저,  $H_2$ 제어기를 구한다. 이를 위한 제어구조는 그림 4와 같다.

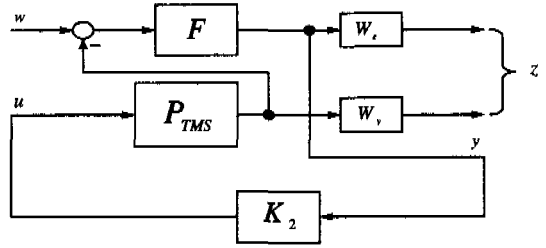


그림 4. 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털제어를 위한  $H_2$  제어기를 구하기 위한 구성

그림 4에서  $F$ 는 표본화시 발생하는 엘리자임을 방지하기 위한 저역통과 여파기로서, 전달함수는 식(5)와 같다.

$$F(s) = \frac{1047}{s + 1047} \quad (5)$$

$P_{TMS}$ 는 제어대상이며, 하중  $W_1$ 는 시스템의 불확실성을 승범 불확실성으로 표현한 것으로 고역통과 여파기의 특성을 가지며, 전달함수는 다음 식(6)과 같다.

$$W_1(s) = \frac{2.5(s + 100)}{(s + 1000)} \quad (6)$$

$W_2$ 는 오차에 대한 하중으로 시스템의 성능에 많은 영향을 주며, 본 실험에서는 식(7)와 같이 설정하였다.

$$W_2 = \frac{0.2(s^2 + 65.25s + 7543)}{(s + 54.4)(s + 0.32)} \quad (7)$$

위의 설정을 가지고 MATLAB의  $\mu$  Toolbox의 "h2syn 명령을 이용하여  $H_2$ 제어기를 구하였다. 여기서,  $H_2$ 제어기는 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합제어때와 거의 같은  $H_2$ -노름값을 같도록 설계하였다. 설계절차의 다음 단계로써, 앞에서 구해진  $H_2$ 제어기의 감도함수를 구하고, 그 역함수를 이 논문에서 제시한 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털제어기를 구하기 위한 하중으로써 사용한다.

그림 5는 최종적으로 이 논문에서 제시한 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기를 구하기 위한 일반화 제어대상을 나타낸다.

그림5에서  $W_{d1}$ 은 그림4의 설정에서 구한  $H_2$  제어기의 감도함수의 역함수이다.

최종적인 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기는 최적  $\gamma$ 값이 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합제어와 유사한  $\gamma$ 값을 갖

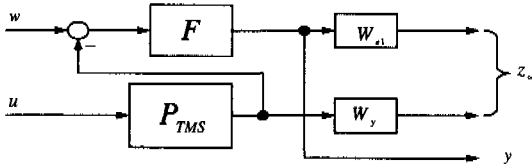


그림 5. 샘플치 혼합  $H_2/H_\infty$  제어기의 구성

도록 설계하였다. 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합제어기는  $H_2 : H_\infty$  노름의 상대적 비율을 1:1로 설정하였으며, 이 논문에서 제안한 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기 또한 1:1의 비중으로 설계되도록 하였다. 이때,  $H_2$ -노름과  $H_\infty$ -노름값은 각각 표 1에 나타내었다. 위의 과정을 통하여 얻어진 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기와 이 논문에서 제시한 과정을 통한 새로운 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기의 전달함수는 각각 다음 식(8)과 같다.

표 1. 연속시간 혼합  $H_2/H_\infty$  제어와 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어의  $H_2$  및  $H_\infty$ -노름 비교

제어기	$H_2$ -노름	$H_\infty$ -노름
연속시간 $H_2/H_\infty$ 혼합제어	5.0801	0.9395
혼합 $H_2/H_\infty$ 디지털제어	5.0106	0.9395

### 4.3 모의실험

모의 실험은 크게 연속시간과 이산시간에 대하여, 기준입력에 대한 추종응답과 제어입력을 비교하였다.

#### (1) 연속시간 모의실험

연속시간 모의실험은 기준입력을 각속도 100[rad/sec]로 설정하였으며, 2-관성 시스템의 각속도 응답 및 제어입력을 그림 6과 그림 7에 각각 나타내었다. 두 제어기는 거의 비슷한  $H_2$ -노름과  $H_\infty$ -노름 조건

으로 구해졌기 때문에 연속시간 응답은 유사하지만, 제어입력은 이 논문에서 제시한 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기의 경우, 조금 크게 나타남을 알 수 있다.

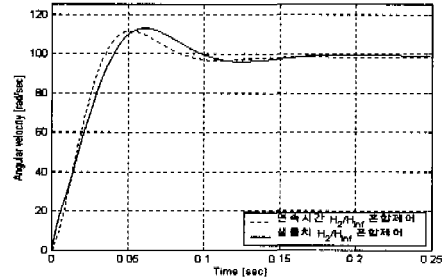


그림 6. 2-관성 시스템의 각속도 응답

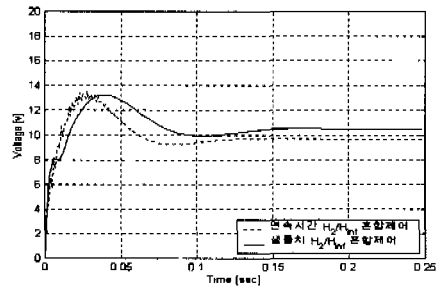


그림 7. 2-관성 시스템의 제어 입력

#### (2) 이산시간 모의실험

이산시간 모의실험은 연속시간 모의실험과 동일한 기준입력 100[rad/sec]에 대하여, 표본화 주기  $h=0.001[s]$ 으로 실험하였다.

표본화 주기  $h=0.001[s]$ 에 대하여 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기를 쌍선형 변환으로 이산화한 제어기와 샘플치  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기의 전달함수는 각각 다음 식 (9)와 같다.

그림 8은 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합제어기를 쌍선형 변환한 제어기와 이 논문에서 제시한 혼합  $H_2/H_\infty$

$$K_{(연속)} = \frac{1.383783 \times 10^{17} (s^2 + 64.67s + 4200)(s^2 + 386.8s + 1.285 \times 10^7)(s^2 + 1300s + 7.631 \times 10^5)}{(s + 1.025 \times 10^{16})(s + 1.148 \times 10^6)(s + 162.3)(s^2 + 79.6s + 6.721 \times 10^6)(s + 54.39)(s + 0.32)}$$

$$K_{(샘플치)} = \frac{638557.638(s + 1000)(s + 54.39)(s + 8.986)(s + 1.205)(s + 0.4848)}{(s + 1 \times 10^6)(s + 1.217 \times 10^4)(s + 264.4)(s + 42.37)(s + 10.84)(s + 1.851)} \times \frac{(s + 0.1933)(s + 0.1884)(s^2 + 1.203s + 0.3855)(s^2 + 1.855s + 0.9263)}{(s^2 + 0.4164s + 0.04382)(s^2 + 0.4094s + 0.0597)(s^2 + 0.9341s + 0.4165)} \times \frac{(s^2 + 156.5s + 1.863 \times 10^4)(s^2 + 77.12s + 1.286 \times 10^7)}{(s^2 + 1.978s + 1.32)(s^2 + 516.5s + 7.063 \times 10^6)} \quad (8)$$

디지털 제어기를 포함한 2-관성시스템의 응답을 나타낸 것으로, 표본화 주기가 0.001[s]로 빠른 경우에는 연속시간에서의 성능을 유지하지만, 그림 9에 나타난 제어응답은 쌍선형 변환으로 얻은 제어기의 경우 매우 진동이 심함을 보여준다. 그러나, 본 논문에서 제시한 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기의 제어입력은 연속시간의 경우와 유사함을 관찰할 수 있다.

모의실험 결과에서 2-관성 시스템의 응답은 점차 최대 초과량이 커지며 진동이 발생하지만, 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기의 경우에는 연속시간의 성능을 거의 유지한다.

4.4 실물실험

이 절에서는 모의 실험에서 나타난 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기의 성능을 실물실험을 통하여 검증한다.

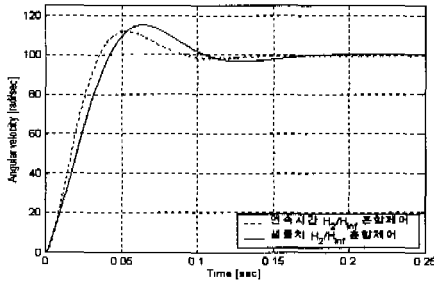


그림 8. 2-관성 시스템의 각속도 응답

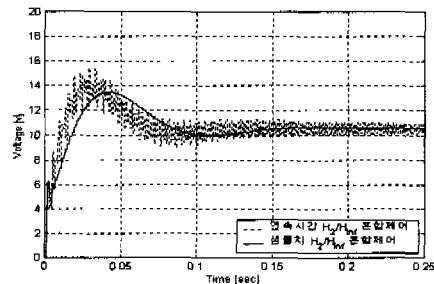


그림 9. 2-관성 시스템의 제어 입력

실물실험용 제어대상은 전동기와 부하전동기로 Tamagawa사의 TRE-30W DC 서보 모터를 사용하였고, 전동기 구동을 위한 회로는 PWM (Pulse Width Modulator) 방식에 의한 전동기 구동회로를 구성하였으며, 2-관성 시스템의 제어입력은 IBM-PC에 C 프로그램을 이용하여 계산하였다. 계산된 제어입력은 12bit A/D-D/A 변환 장치를 통하여 PWM 전동기 구동장치에 전달된다. 실험 구성도는 그림 10과 같다.

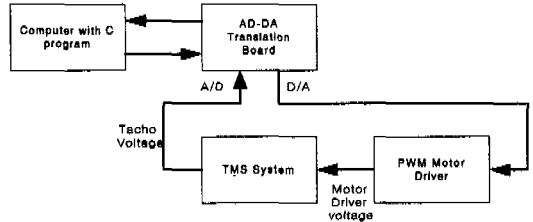


그림 10. 실험 구성도

위의 장치를 이용하여 실물실험을 수행한 결과는 다음과 같다. 그림 11은 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합제어기를 쌍선형 변환한 제어기와 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기를 포함한 시스템에 대한, 표본화 주기  $h=0.001[s]$ 일 때의 실물실험 결과를 나타낸 것이다. 이에 상응하는 제어입력을 그림 12에 나타내었다.

그림 11를 관찰해 보면, 각각의 제어기를 포함한 시스템의 출력의 최대 초과량은 연속시간의 경우와 거의 비슷하지만, 0.01[s]이상 시간이 경과하여야 응답이 나오며, 또한 최대 초과량에 이르는 시간은 이산시간에서의 모의실험 결과보다 더 빠른 것을 알 수 있다. 이는 PWM 전동기 구동 드라이버의 구동 능력과, 자체 제작한 2-관성 시스템이 정밀하게 구성되지 못해서 기인한 것으로 판단된다. 따라서, 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합제어기를 이산화한 경우와 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어의 경우 모두 모의실험과 유사한 응답을 갖는 것을 볼 수 있다.

$$K_{TMS(연속)} = \frac{0.067469(z+1)(z-0.947)(z-0.8952)(z-0.5921)(z-0.3348)(z^2+1.042z+0.9819)}{(z+0.9965)(z+1)(s-0.9997)(z-0.947)(z-0.8498)(z^2+0.5001z+0.9707)}$$

$$K_{TMS(SD)} = \frac{0.025842z(z+1)(z-0.9981)(z-0.9471)(z-0.947)(z-0.8022)(z-0.7113)}{z(z+0.7737)(z-0.9981)(z-0.9997)(z-0.7755)(z-0.351)(z+0.2437)} \times \frac{(z-0.3679)(z-0.3128)(z^2-0.864z+0.1891)(z^2+1.454z+0.6244)}{(z^2-1.894z+0.8969)(z^2-0.8195z+0.1711)(z^2+1.508z+0.6694)} \times \frac{(z^2+1.737z+0.9258)(z^2+1.042z+0.9819)}{(z^2+0.45z+0.298)(z^2+0.9814z+0.8927)} \tag{9}$$

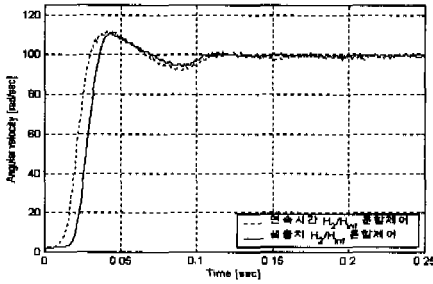


그림 11. 2-관성 시스템의 가속도 응답

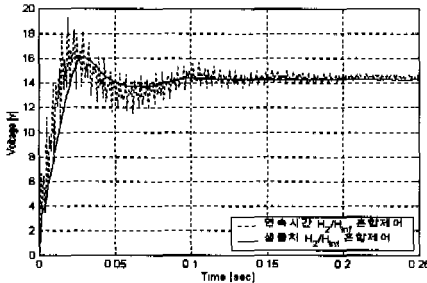


그림 12. 2-관성 시스템의 제어 입력

V. 결론

이 논문에서 제시한 새로운 연속시간  $H_2/H_\infty$  혼합 제어기 설계 절차 6단계의 과정과 Chen, Francis 가 제시한 7단계 과정<sup>[2]</sup>을 통하여 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어기를 설계했다. 또한, 같은 제어대상에 대하여 계단불변 변환을 수행하여 디지털로 구현하는 간접설계 문제도 고려했다. 본 논문에서 제시한 혼합  $H_2/H_\infty$  디지털 제어 방법의 타당성을 입증하고, 간접설계와의 비교를 통하여 샘플치 직접설계의 우수성을 확인했다.

참고 문헌

[1] H.T. Toivonen, "Optimal sampled-data control problem for sampled- data system" Int. J. Control, Vol. 70, No. 4, pp.579-602.  
 [2] T. Chen and B. A. Francis, " $H_\infty$ -optimal sampled-data control: computation and design", *Automatica*, vol. 32, no. 2, pp. 223-228, 1996.  
 [3] 박종우, 이상철, 이상효, "도립전자 시스템 의 LFR에 의한 LMI 혼합  $H_2/H_\infty$  제어", 2000.7 한

국통신학회 논문지 제25권 제7A.

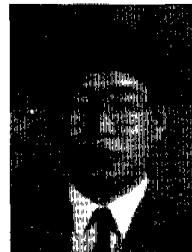
[4] T. Chen and B. A. Francis, " $H_2$ -optimal sampled-data control", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 4, pp. 387-397, 1991.  
 [5] 박종우, 이상철 "탄성-질량시스템의 위치제어를 위한 강건 제어기 설계", *대한전자공학회*, 제36 권 T편 제3호, pp. 219-227, 1999.

박 종 우(Jong-Woo, Park)



1984년 : 건국 대학교 공학사  
 1990년 : 광운대학교 공학석사  
 2000년 : 동대학원 공학박사  
 1992년~현재 : 재능대학  
 전자통신과 부교수  
 <주관심 분야> 멀티미디어  
 통신, DSP

곽 칠 성(Chil-Seong, Kwak)



1981년 : 광운대학 공학사  
 1986년 : 동대학원 공학석사  
 1991년~현재 : 재능대학  
 전자과 부교수  
 <주관심 분야> 응용전자, 회로  
 설계, 마이크로 프로세서  
 설계