신호 의존성 잡음에서 확률 신호 검파를 위한 비모수 방법: 두 표본을 쓰는 경우

준회원 김 창 배*, 종신회원 송 익 호**, 배 진 수*

A Nonparametric Method for Random Signal Detection in Signal-Dependent Noise: Two-Sample Case

Chang-Bae Kim* *Associate Member*,
Iickho Song, Jinsoo Bae** *Regular Members*

요 약

이 논문에서는 신호의존성 잡음과 가산성 잡음이 함께 있을 때 확률 신호를 찾아내는 두 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기의 점근 성능을 다룬다. 비모수 검파기인 국소 최적 순위 검파기는 국소 최적 검파기와 비교하여 볼 때, 시간상으로 상관이 있는 확률 신호에 대해서 거의 같은 점근 성능을 가진다. 두 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기는 한 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기와 같게 수행한다는 점은 주목할 만하다.

키워드: 신호의존성잡음, 비모수 신호검파, 두표본 검파

ABSTRACT

The asymptotic performance of the two-sample locally optimum rank detector for random signals buried in signal-dependent noise and additive noise is considered in this paper. It is shown that the locally optimum rank detector, a nonparametric detector, has reasonable asymptotic performance for a class of correlated random signals, compared with the locally optimum detector. It is noteworthy that the two-sample locally optimum rank detector performs almost the same with the one-sample locally optimum rank detector.

I. 머리말

대부분의 비모수 검파기는 관측량의 순위와 부호 통계량에 바탕을 두고 있다. 이러한 비모수 검파기들은 모수 검파기의 성능과 견주어 볼 때, 큰 성능의 떨어짐 없이 비모수 특성을 보여 준다. 비모수 검파기는 잡음 분포의 종류에 상관없이 미리 정의해 놓은 오경보 확률을 유지한다. 그러므로 비모수 검파기는 잡음에 대한 정보를 미리 알 필요는 없다. 비모수 검파기 가운데 순위 통계량이나 (두 개의 표본을 쓸 경우), 또는 절대값의 순위와 부호 통계량에 (한 개의 표본만을 쓸 경우) 바탕을 둔 국소 최적 순위 검파기는 국소 최적 비선형성으로부터 얻어진 점수 함수를 가지고 있다 [1].

두 검파기의 성능 특성을 견주어 볼 때, 두 가지 성능 지표를 생각할 수 있다. 그것은 점근 상대 효용과 유한 표본 성능이다 [2]. 점근 상대 효용은 어떤 검파기의 상대 효능을 이미 잘 알려진 검파기와 견주어 볼 수 있는 지표이다. 점근 상대 효용은 두 개의 검파기의 효능의 비로 나타난다.

어떤 경우에는 적산성, 신호의존성 잡음과 같은 비가산성 잡음의 영향을 무시할 수 없다 [3]. 특히 의학 영상 처리 문제에서, 신호의존성 잡음은 매우 중요하다. 이 논문에서는, 신호의존성 잡음에서 확률 신호의 국소 최적 순위 검파기의 점근 성능에 관점을 두었다.

* 세종대학교 정보통신공학과 (baej@sejong.ac.kr) ** 한국과학기술원 전자전산학과
논문번호 : 020207-0502, 접수일자 : 2002년 5월 3일
※ 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었습니다. (KRF-2002-003-D00196)

Ⅱ. 기초이론

2.1 점근 상대 효용

검파기의 점근 성능 비교를 위해, 점근 상대 효용의 완전한 꼴을 구하기 위해 표본 크기 (한 표본에 포함된 관측량 수) n은 무한대로 가정한다. 두 개의 검파기의 점근 성능을 비교하는 데에는 점근 상대 효용이 매우 쓸모 있는 것으로 알려져 있다. 검파기 D_1과 검파기 D_2의 점근 상대 효용은 아래와 같이 정의된다 [2].

$$ARE_{1,2} = \lim_{\theta \to 0,\, n \to \infty} \frac{n_2}{n_1} \tag{1}$$

n_1과 n_2는 신호 세기를 나타내는 함수 θ가 굉장히 작을 때, 각각 검파기 D_1, D_2가 정해진 오경보 확률 P_{fa}아래서 같은 성능을 얻기 위해 필요한 표본 크기이다 [2]. 대개의 경우 다음 두 식과 같이 $ARE_{1,2} = \xi_1/\xi_2$으로 표현할 수 있다.

$$\xi_i = \lim_{n \to \infty} \frac{[E^{(\nu)} T_{i,n}(\vec{X})|0]^2}{n V_H\{T_{i,n}(\vec{X})\}} \tag{2}$$

$$E^{(\nu)} T_{i,n}(\vec{X})|\theta_0 = \frac{d^{\nu} E_K T_{i,n}(\vec{X})}{d\theta^{\nu}} \Big|_{\theta = \theta_0} \tag{3}$$

여기서, $T_{i,n}(\vec{X})$는 표본크기가 n인 검파기 D_i의 검정 통계량이고, $E_K\{T_{i,n}(\vec{X})\}$와 $V_H\{T_{i,n}(\vec{X})\}$는 $i=1,2$일 때 각각 $\theta>0$라는 대립 가설 아래에서 $T_{i,n}(\vec{X})$의 평균과, $\theta=0$의 귀무 가설 아래에서 $T_{i,n}(\vec{X})$의 분산을 나타낸다. LOR는 $\theta=0$일 때 첫 번째로 0이 아닌 미분값이 나오게 되는 자연수이다.

2.2 관측 모형

이 논문에서 다음의 관측 모형을 생각해보자.

$$X_i = \beta(\tau) S_i + \gamma(\tau) N_i + W_i \tag{4}$$

n은 표본 크기이고, $\beta(\tau)$와 $\gamma(\tau)$는 τ에 관한 증가 함수인데, $\tau=0$일 때 모두 0의 값을 갖고, 절대적으로 증가하는 신호 세기를 나타내는 함수이다. 그리고 i번째 표본화 순간에서 S_i는 확률 신호 성분이다. $N_i=0$일 때 모형은 전형적인 가산성 잡음 모형으로 나타내어진다.

S_i의 분산 $\sigma_i^2 = K_{s(i,i)}$, 또 자기 상관 함수 $K_{S(i,j)} = E\{S_i S_j\}$로 나타내자. 잡음 성분 N_i와 W_i'는 모든 i에 대해 독립적이고 같은 분포를 갖고 있고, N_i와 W_i는 일반적으로 서로 상관이 있다. f_W는 평균이 0이고 분산이 σ_W^2인 W_i의 확률 밀도 함수이다. f_{NW}는 N_i, W_i의 결합 확률 밀도 함수라 하자 [3].

2.3 재모수화

이 논문에서는 불필요한 수학적 조작을 피하기 위해서 다음의 방법으로 관측 모형 (4)를 첫 번째 재모수화 한다. 이것은 $\beta(\tau)$와 $\gamma(\tau)$가 $\tau=0$일 때, 0의 값을 갖고, $\tau>0$일 때 증가 함수라는 가정 때문에, q, r, ε, η가 모두 양수일 때,

$\lim_{\tau \to 0+} \frac{\beta(\tau)}{\varepsilon \tau^q} = 1$과 $\lim_{\tau \to 0+} \frac{\gamma(\tau)}{\eta \tau^r} = 1$이 성립한다.

그리고 모수 $\triangle$는 $\triangle = r/q$로 정의한다.

$\triangle \geq 2$이거나 $1<\triangle<2$이고, $E\{NW\}=0$일 때 $\beta(\tau)=b(\theta)=\theta$, $\gamma(\tau)=c(\theta)$라 하고, $\triangle \leq 1$이거나 $1<\triangle<2$ 이고, $E\{NW\}\neq 0$일 때 $\gamma(\tau)=c(\theta)=\theta$, $\beta(\tau)=b(\theta)$라 하자.

그 다음에 $b(\theta)$와 $c(\theta)$ 둘 중 적어도 하나가 θ와 같을 때 관측 모형 (4)는

$X_i = b(\theta) S_i + c(\theta) N_i + W_i$로 다시 쓸 수 있다.

2.4 점수함수

국소 최적 순위 점수 함수를 정의하기에 전에 크기가 n인 관측 벡터 $\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$를 고려하자. $\vec{R} = (R_1, R_2, \cdots, R_n)$은 순위 벡터 R_i로 이루어진다. 여기서 R_i는 $\vec{X}$의 집합에서 $\vec{X}_i$의 순위이다. 또한 $X_{[i]}$는 $\vec{X}$의 i번째 가장 작은 원소를 (즉, i번째 순서 통계량) 나타내고, $X_i = X_{[R_i]}$이다.

우리는 일반화된 관측 모형(4)에서 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량에 유용하게 쓰여진 점수

함수를 고려할 것이다.

$$p_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{NW}(y, x) dy = f_W(x) E\{ N^2 | W = x \}$$

이고,

$g_1(x) = -\frac{f'_W(x)}{f_W(x)}$, $g_2(x) = -\frac{p'_2(x)}{f_W(x)}$, $h_1(x) = \frac{f''_W(x)}{f_W(x)}$, $h_3(x) = \frac{p''_3(x)}{f_W(x)}$ 일 때,

$a_2(i) = E_H\{ g_2(X_{[i]})\}$,

$a_3(k, i) = E_H\{ g_1(X_{[K]}) g_1(X_{[i]})\}$,

$b_1(i) = E_H\{ h_1(X_{[i]})\}$,

$b_3(i) = E_H\{ h_3(X_{[i]})\}$는 국소 최적 비선형성이다. $E_H\{\cdot\}$는 잡음 확률 밀도 함수 $f_W(x)$ 아래에서의 평균을 나타낸다.

이 논문에서는 $I_1(f_W) = E_H\{ g_1^2(X)\}$, $I_3(f_{NW}) = E_H\{ g_2^2(X)\}$ $I_4(f_{NW}) = E_H\{ g_2(X) h_1(X)\}$, $I_5(f_W) = E_H\{ h_1^2(X)\}$, $I_9(f_{NW}) = E_H\{ h_3^2(X)\}$, $I_{10}(f_{NW}) = E_H\{ h_1(X) h_3(X)\}$이 모두 존재하고, 유한하다고 가정한다 [2].

III. 검정 통계량

m개의 참고 관측량과 n개의 정규 관측량이 사용되는 두 표본을 쓰는 검파기를 고려해보자. 참고 관측량은 정규 관측량과는 독립적으로 얻어지고 잡음만으로 이루어져 있다고 가정한다. 즉 관측량 X_i의 관측 모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_i = \begin{cases} b(\theta) S_i + c(\theta) N_i + W_i, \\ i = 1, 2, \cdots, n \\ W_i \\ i = n+1, \cdots, n+m \end{cases} \tag{5}$$

모형 (5)의 아래에서 확률 신호의 두 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기의 문제는 결합 확률 밀도 함수에 관한 $\vec{k}: \theta > 0$의 대립 가설과 $\vec{h}: \theta = 0$의 귀무 가설의 검증의 문제로 나타내어진다. 관측 벡터의 결합 확률 밀도 함수는 다음과 같다.

$$\phi_\theta(\vec{x}) = \prod_{i=n+1}^{n+m} f_w(x_j - b(\theta) s_j - c(\theta) n_j) f_{\vec{s}}(\vec{S}) \vec{ds} \tag{6}$$

$f_{\vec{S}}$는 $\vec{S} = (S_1, \cdots, S_n)$의 결합 확률 밀도 함수이다.

검정 통계량은 일반화된 네이먼-피어슨 정리로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$T_{LOR}(\vec{x}) = \frac{1}{p_0(\vec{r})} \lim_{\theta \to 0} \frac{d^\nu p_\theta(\vec{r})}{d\theta^\nu} \tag{7}$$

여기서 NOR는 첫 번째로 0이 아닌 미분 값이 나오게 되는 자연수이다 [1].

$E\{N|W\} = 0$일 때, (N_i와 W_i가 서로 상관이 없을 때), 검정통계량은 다음과 같이 나타내어진다.

$$T_{LOR}(\vec{X}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} b_3(R_i) & (\triangle < 1) \\ \sum_{i=1}^{n} A(R_i) + b_3(R_i)/(b'(0))^2 + \sigma_i^2 b_1(R_i) & (\triangle = 1) \\ \sum_{i=1}^{n} A(R_i) + \sigma_i^2 b_1(R_i) & (\triangle > 1) \end{cases} \tag{8}$$

여기서 $A(R_i) = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} K_{s(i,k) a_3(R_i, R_k)}$이다.

$E\{N|W\} \neq 0$ 일 때, 검정 통계량은 다음과 같다.

$$T_{LOR}(\vec{X}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_2(R_i) & \triangle < 2 \\ \sum_{i=1}^{n} A(R_i) + c''(0) a_2(R_i) + \sigma_i^2 b_1(R_i) & \triangle = 2 \\ \sum_{i=1}^{n} A(R_i) + \sigma_i^2 b_1(R_i) & \triangle > 2 \end{cases} \tag{9}$$

Ⅳ. 점근 성능

$k=2,4$일 때,

$$\langle \sigma^k \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^k,$$

$$\langle K_S^2 \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} K_S^2(i,k),$$

$\alpha = \langle K_S^2 \rangle - \langle \sigma^4 \rangle$, $\beta = \langle \sigma^4 \rangle - \langle \sigma^2 \rangle^2$라고 놓음으로서 국소 최적 순위 검파기의 효능을 식(2)로부터 얻을 수 있다. $E\{NW\}=0$일 때, 아래와 같다.

$$\xi_{LOR} = \begin{cases} I_9 & (\triangle < 1) \\ 2\alpha I_1^2 + \beta I_5 + I_9/(b'(0))^4 + 2\langle \sigma_i^2 \rangle I_{10}/(b'(0))^2 & (\triangle = 1) \\ 2\alpha I_1^2 + \beta I_5 & (\triangle > 1) \end{cases} \quad (10)$$

$E\{NW\} \neq 0$일 때, 아래와 같다.

$$\xi_{LOR} = \begin{cases} I_3 & (\triangle < 2) \\ 2\alpha I_1^2 + \beta I_5 + I_3/(c''(0))^2 + 2\langle \sigma_i^2 \rangle I_4/c''(0) & (\triangle = 2) \\ 2\alpha I_1^2 + \beta I_5 & (\triangle > 2) \end{cases} \quad (11)$$

△가 크다는 것은 $\theta \to 0$일 때, 확률 신호의 세기가 신호 의존성 잡음보다 비교적 강하다는 것을 의미한다. $E\{NW\}=0$ 일 때, 검파기는 잡음보다는 신호와 비슷한 성분인 신호 의존성 잡음을 취한다.
비교적 △가 작을 때에는 신호 성분이 $E\{NW\} \neq 0$ 일 때보다 더 뚜렷하다.

잡음의 크기가 상대적으로 강할 때 (비교적 작은 △일 때), $ARE_{LOR,LO}$는 항상 1이다. 그러나 신호 성분이 강해지면, $ARE_{LOR,LO}$는 1보다 작아지고, 신호 상관 특성에 의존한다. 신호 상관 특성은 신호 상관 관계 α와 신호 전력 비균질도 β이다. 큰 α와 β를 갖는 확률 신호에는 국소 최적 순위 검파기의 점근 성능이 더 좋아진 국소 최적 순위 검파기가 비모수이기 때문에 국소 최적 검파기와 비교해 볼 때 성능 하락은 피할 수 없다. 국소 최적 순위 검파기와 다른 잘 알려진 검파기의 성능 비교는 이미 다른 연구에서 다루었다 [3]. 그래서 이 논문에서는 국소 최적 순위 검파기와 국소 최적 검파기의 성능을 비교해 놓았다. 또한 두 표본을 쓰는 국소 최적 검파기가 한 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기가 갖는 점근 성능과 같음도 쉽게 알 수 있다.

Ⅴ. 맺음말

이 논문에서는 두 가지 중요한 결론을 얻을 수 있다. 첫째는 비교적 적은 성능 저하로 두 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기는 비모수 특성을 가질 수 있다. 어떤 확률 신호에 대해서는 국소 최적 순위 검파기와 국소 최적 검파기의 점근 성능이 거의 같다. 둘째, 참고 관측량을 쓰면, 관측량의 부호와 절대값 순위를 쓸 필요가 없다. 사실 한 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기는 관측량의 부호와 절대값 순위가 필요하고, 두 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기보다 더 많은 갯수의 점수 함수를 요구한다. 다시 말해서, 두 표본을 쓰는 순위 검파기는 구조가 간단한 비모수 검파기이나, n개의 관측량 대신에 $n+m$개의 관측량을 다뤄야만 한다.

참고문헌

[1] I. Song and S.A. Kassam, "Locally optimum rank detection of correlated random signals in additive noise," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol.38, pp. 1311-1322, July 1992.
[2] S.A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*, NY: Springer-Verlag, 1987.
[3] I. Song and S.A. Kassam, "Locally optimum detection of signals in a generalized observation model : The random signal case," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36, pp. 516-530, May 1990.

김 창 배(Changbae Kim) 준회원

2003년 2월: 세종대학교 정보통신공학과 공학사

2003년 3월~ 현재 : 세종대학교 정보통신공학과 석사과정

<주관심분야> 신호처리, 통신이론, 정보이론

송 익 호(Iickho Song) 종신회원

1982년 2월: 서울대학교 전자 공학과 공학사(준최우등)

1984년 2월: 서울대학교 전자공학과 공학석사

1985년 8월: 펜실베니아대학교 전기공학과 공학석사

1987년 3월~1998년 2월: 벨통신연구소 연구원

1988년 3월~현재: 한국과학기술원 전자전산학과 조교수, 부교수, 교수

1995년 1월~현재: 한국통신학회 논문지편집위원

1991년 11월, 1996년 11월: 한국통신학회 학술상 받음

1993년 11월: 한국음향학회 우수연구상 받음

1998년 11월: 한국통신학회 LG학술상 받음

1999년 11월: 대한전자공학회 해동논문상 받음

2000년 3월: 젊은 과학자상 받음

2000년 11월: 한국통신학회 모토롤라학술상 받음. 대한전자공학회, 한국음향학회, 한국통신학회 평생회원; IEE 석학회원; IEEE 선임회원

<주관심분야> 통계학적 신호처리와 통신이론, 신호검파와 추정, 이동통신

배 진 수(Jinsoo Bae) 종신회원

1990년 2월: 경기과학고등학교 조기졸업 (우등)

1993년 2월: 한국과학 기술원 전기전산학과 공학사 (전체차석, 조기졸업, 최우등)

1995년 2월: 한국과학 기술원 전기전산학과 공학석사

1998년 2월: 한국과학기술원 전기전산학과 공학박사

1997년 1월~1997년 12월: 동경대학 객원연구원

1998년 1월~1998년 10월: 앤더슨컨설팅 컨설턴트

1998년 11월~1999년 12월: 일본모토로라 연구원

1999년 9월~2000년 2월 : LG텔레콤 과장

2000년 3월~현재 : 세종대학교 정보통신공학과 전임강사, 조교수

<주관심분야> 신호검파이론