

Weibull 신호원에 최적인 양자기의 지지역에 관한 연구

정회원 임 실 규*, 나 상신**

On the Support Region of a Minimum Mean-Square Error Scalar Quantizer for a Weibull Source

Sil-kyu Lim*, Sang-sin Na** *Regular Members*

요 약

이 논문은 최소평균제곱오차의 의미에서 Weibull 신호원에 최적인 홀양자기의 지지역에 관한 연구이다. 양자기의 지지역은 최외곽 양자경계값으로 정해지는 구간으로, 이는 양자기의 왜곡량의 결정에 중요한 영향을 미치므로 이에 대한 연구를 시작하였다. 이 논문에 제시된 연구결과는 다음과 같다. 첫째, Weibull 분포에 최적인 양자기의 최외곽 경계값의 근사식을 유도하였다. 둘째, Weibull 신호원의 중요한 형태인 레일리 분포와 지수 분포의 경우에 최적 양자기를 설계하여, 유도된 근사식을 실제값과 비교하여, 근사식의 정확도를 평가하였다. 양자기 지지역 왼쪽 끝경계값의 근사식은, 레일리와 지수 분포 각각의 경우에 양자점이 128과 256 이상일 때 실제값과 약 1% 이내의 오차를 갖으며, 오른쪽 끝경계값 근사식도 각각 양자점이 512와 32 이상일 때 약 1% 이내의 오차를 갖는 것으로 판명되었다. 또, 양자점의 개수가 증가하면 공식의 정확도가 높아졌다. 결론적으로, 경계값 근사식은 매우 높은 정확도를 갖는 것으로 사료된다. 따라서, 이 논문의 기여점은, Weibull 분포에 최적인 양자기의 지지역을 정확하게 표현할 수 있는 구체적인 공식을 유도·제시한 것이다. 이 공식은 Weibull 신호원에 최적인 양자기의 성능분석과 양자기 불일치 연구에 귀중하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

Key Words : Weibull, Quantizer, Rayleigh, Exponential, threshold.

ABSTRACT

This paper studies the support region of an optimum (minimum mean-square error) fixed-rate scalar quantizer for a Weibull source. The support region is defined to be the interval determined by the outermost thresholds of a quantizer and plays an important role in its performance, and hence it motivates this study. The paper reports the following specific results. First, approximation formulas are derived for the outermost thresholds of optimum scalar quantizers for a Weibull distributions. Second, in the case of Rayleigh and exponential distributions the derived approximation formulas are compared for the evaluation of their accuracy with the true values of optimum quantizers. Numerical results show that the formula for the leftmost threshold stays within 1% of the true value for 128 and 256 quantization points or more, for Rayleigh and exponential distribution, respectively, while that for the rightmost threshold does so for 512 and 32 quantization points or more. These formulas exhibit increased accuracy with the number of quantization points. In conclusion, the formulas have high accuracy. The contribution of the paper consists in the derivation of closed accurate formulas for the support of optimum

*아주대학교 전자공학과 부호인지 연구실(apricot0206@hanmail.net), ** 아주대학교 전자공학과 부호인지 연구실 (sangna@madang.ajou.ac.kr)

논문번호 : 030294-0715, 접수일자 : 2003년 10월 20일

※본 연구는 반도체설계교육센터(IDEC)의 지원에 의해 수행되었습니다.

I. 서론

1.1 양자기의 표현

N -점 홀양자기(scalar quantizer)를 표현하는 데에는 양자점, 양자영역, 양자함수의 3요소가 필요하다. 양자점들은 양자영역을 대표하는 값으로서 그림1에서처럼 y_1, y_2, \dots, y_N 로 표시하기로 하고, 경계값은 x_1, x_2, \dots, x_{N+1} 으로 표시하기로 하자. 양자함수 $Q(\cdot)$ 는 $x \in [x_i, x_{i+1})$ 일 때 $Q(x) = y_i$ 로서, 일종의 다대일 함수이다. 양자기의 지지역(support)이란 양쪽 끝경계값으로 규정되는 x_2 와 x_N 으로 정해지는 구간 $[x_2, x_N]$ 을 말한다.

그림1

값연속 신호원 $\{X_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 의 제1차 확률밀도함수 $p(x)$ 가 주어질 때, N -점 양자기 Q_N 의 평균 제공오차 왜곡 $D(Q_N)$ 은 다음 식으로 측정된다.

$$D(Q_N) = E_p\{(X - Q_N(X))^2\}$$

여기서 $E_p\{\cdot\}$ 는 확률밀도함수 $p(x)$ 에 대한 평균 값을 뜻한다. 경계값과 양자점으로 왜곡 $D(Q_N)$ 을 표현하면 다음과 같다.

$$D(Q_N) = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} (x - y_1)^2 p(x) dx +$$

$$\sum_{i=2}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx + \int_{x_N}^{\infty} (x - y_N)^2 p(x) dx \quad (1)$$

논문의 전개를 위해 그림1을 참조하면서 몇 용어를 정의하기로 한다. 식(1)의 \sum 가 있는 가운데항은 안쪽 양자점들에 의한 내부 양자 영역의 합구간 $[x_2, x_N]$ 양자기 지지역에서의 왜곡의 값으로 안

왜곡(inner distortion)이라 부르기로 하고, $D_i(Q_N)$ 이라 표시하기로 하자. 또 첫째항과 셋째항은 맨 바깥 양자점들에 의한 외곽 영역에서의 왜곡으로 바깥왜곡(outer distortion)이라 부르기로 하고, $D_o(Q_N)$ 으로 표시하기로 하자. 최적 N -점 양자기란 Q_N 중에서 왜곡 $D(Q_N)$ 이 제일 적은 양자기를 말하며, Q_N^* 로 표시하고 즉, 또 이것의 왜곡을 $D(Q_N^*)$ 로 나타내기로 하자. 최소 평균제공오차 N -점 홀양자기 Q_N^* 을 설계한다는 것은 평균 제공오차를 최소화하는 N 개의 양자점 $y_1^*, y_2^*, \dots, y_N^*$ 과 $N-1$ 개의 경계값 $x_2^*, x_3^*, \dots, x_N^*$ 을 설정한다는 것을 의미한다. (일반적으로 $x_1^* = -\infty$ 로, 또 $x_{N+1}^* = +\infty$ 으로 설정한다고 가정하자.) 이 논문에서는 최적(최소 평균제공오차) 양자기를 설계하는 방법으로 [1, 2]의 로이드-맥스(Lloyd-Max)법을 사용하여, 확률밀도함수의 지지역의 오른쪽 끝에서부터 양자점과 경계값을 번갈아 가며 구하였다. 이때 맨 처음에 오른쪽 끝 경계값 x_N 을 임의로 설정하고 시작하는데, 이 값이 실제 최적 양자기의 오른쪽 끝경계값 x_N^* 에 얼마나 가깝게 설정되었느냐에 따라, 최적 설계에 필요한 반복 회수가 영향 받게된다. 이렇듯 오른쪽 끝경계값이 설계에 중요한 역할을 하므로, 최적 양자기의 오른쪽 끝경계값 x_N^* 은 중요변수(key-parameter)라 불리며, 중요한 취급을 받아왔다^[3]. 이러한 중요변수는 양자기의 왜곡에도 중요한 영향을 미친다.

1.2 Weibull 신호원

Weibull 신호원은 제1차 확률밀도함수 $p(x)$ 가 다음과 같이 표현되는 신호원을 말한다.

그림2.

$$p(x) = \begin{cases} \alpha \beta x^{\beta-1} \exp(-\alpha x^\beta), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

밀도함수 $p(x)$ 의 개형은 α 와 β 의 값에 따라

달라지는 양상을 그림2에 보였다. Weibull 분포의 특별한 형태로 레일리 분포와 지수 분포를 들 수 있다. 영상 신호의 1차원 분포는 레일리 분포로 근사화할 수 있는데, 레일리 분포는 Weibull 분포의 특별한 형태로서 $\alpha=1, \beta=2$ 일 때 얻는다. 지수 분포의 경우도, 예를들면 $\alpha=\sqrt{2}, \beta=1$ 인 Weibull 분포의 한 형태이다. 따라서 일반적인 Weibull 분포에 대해 연구 결과는 레일리나 지수 분포를 포함한 여러 신호원에 대한 양자기의 성능을 예측하는데 유용하게 쓰일 수 있다. 이 논문에서는 양자기의 지지역에 대한 수식 연구는 일반적인 것에 대하여 수행하였으며, 수치결과는 레일리 분포($\alpha=1, \beta=2$)와 지수 분포($\alpha=\sqrt{2}, \beta=1$)의 경우로 한정하였다.

1.3 방법론 및 결과

이 논문의 연구에 사용된 방법은 다음과 같다. 식(2)의 $p(x)$ 를 사용하여 $D(Q_N^*)$ 의 근사식을 최외곽 경계값을 의미하는 u 와 v 의 함수로 표시한 뒤, 이들에 대해 각각 편미분하여 0으로 놓아 얻는 방정식을 연립하여 풀면, 지지역을 정하는 최외곽 경계값의 근사식을 얻을 수 있다. 이렇게 얻은 근사식을 실제 최적양자기의 최외곽 경계값과 비교하여, 근사식이 얼마나 정확한지 평가한다. 정확도가 평가된 뒤에, 왜곡 근사식의 중요한 요소를 발견하고, 이 요소들이 어떤 과정을 통하여 왜곡에 영향을 끼치는지 고찰한다.

이 과정에 필요한 양자기 왜곡 근사식은 다음과 같이 얻는다. 먼저, 왜곡을 안왜곡 $D_i(Q_N^*)$ 와 바깥왜곡 $D_o(Q_N^*)$ 으로 분리한 다음에, $D_i(Q_N^*)$ 의 근사식으로 팬터-다잇 공식을 사용하고, $D_o(Q_N^*)$ 의 근사식으로는 실제 왜곡식을 사용한다.^[6] 그리고, 이 두 식을 합한 양을 양자기 총왜곡 $D(Q_N^*)$ 의 근사식으로 사용한다. 이 왜곡 근사식은 끝경계값 x_2 의 역할을 하는 u 와 x_N 의 역할을 하는 v 의 대한 식으로 표현될 수 있는데, 이들이 얼마나 실제값에 가까우냐에 따라, 근사식의 정확도가 영향을 받게 된다.

이 연구를 통하여 얻은 결과는 다음과 같다. 최적 양자기의 최외곽 경계값 x_2^* 과 x_N^* 의 근사값

u 와 v 의 공식을 유도하였으며, 최적 양자기를 설계한 뒤 이들의 실제값과 이 근사식들을 비교하였다. 양자점의 개수 N 이 증가할수록, 근사식의 정확도가 증가함을 관찰하였다. 레일리와 지수 분포의 경우 x_2^* 의 근사식은 각각 $N \geq 128$ 과 $N \geq 256$ 의 경우에 약 1% 이내의 범위에 있으며, 또 x_N^* 의 근사식도 각각 $N \geq 512$ 와 $N \geq 64$ 의 경우에 약 1% 이내의 범위에 있었다.

1.4 관련연구 및 기여도

이 논문의 기여점은 최적 양자기 지지역을 정확하게 표현할 수 있는 근사 공식을 유도·제시한 것이다. 이 연구와 관련된 논문으로는 [3, 4, 7]을 들 수 있다. 논문 [3]은 Weibull 신호원에 대한 최적 양자기의 x_N^* 의 근사값을 구하는 수치 알고리즘을 제시하였다. 그러나 본 논문은 [3]과 달리, 수치 알고리즘이 아닌 구체적인 근사공식을 제시하여, 지지역에 영향을 미치는 요소인 α, β, N 이 어떻게 영향을 미치는지 명확히 보인 장점이 있다. 또 부수적인 장점은 계산에 필요한 시간이 적다는 점이다. 근사식의 정확도 또한 아주 높아, [3]의 방법에 의한 결과와 비교하여 더 좋다. 그리고, [4, 7]의 경우는 일반화된 감마신호원에 대한 근사공식이 제시되었으나, Weibull 분포에 대한 결과는 제시되어 있지 않다. 다만, 레일리와 지수 분포의 경우는 [7]의 결과를 간단히 인용할 수 있다. 그러나 이 논문이 [7]과 다른점은, 첫째 α, β 값에 따라 다른 Weibull 분포에 대한 고유의 결과가 제시되어 있다는 점과, 둘째 Weibull 분포의 특성상 원점 부근에 할당되는 x_2^* 의 근사식을 유도·제시한 점으로, 이는 [7]에서 찾아볼 수 없는 내용이다.

이 논문이 제시하는 근사공식들은 Weibull 분포에 최적인 양자기의 지지역에 대한 최초의 공식이란 점에서 의미가 크다고 볼 수 있다. 따라서 이 논문의 기여도는 다음과 같다. 첫째, 유도·제시한 근사식을 통하여 양자기를 직접 설계하지 않고도 최적 양자기의 양쪽 끝경계값을 추정할 수 있게 되었다. 둘째, 지지역에 영향을 미치는 요소들이 무엇이며, 이들이 어떠한 과정을 통하여 지지역에 영향을 미치는지 쉽게 알 수 있게 되었다. 셋째, 양자

기 지지역의 근사공식은 매우 정확하여, 레일리 분포의 경우 $N \geq 128$ 일 경우에 98%, 지수 분포일 때 일 경우에 각각 정확도가 99% 이상으로 아주 정확함을 관찰하였다. 최적 양자기의 왜곡성능 평가나 양자기 불일치 등의 양자기 관련 문제에 중요한 도구로 쓰일 수 있다.

II. Weibull 신호원에 대한 최적 양자기 지지역의 근사식 유도

이 절에서는 Weibull 분포에 최적인 양자기의 지지역 $[x_2^*, x_N^*]$ 을 결정하는 x_2^* 와 x_N^* 의 근사값을 유도한다.

먼저 서론을 참조하여, 최적양자기의 왜곡 $D(Q_N^*)$ 을 안왜곡 $D_i(Q_N^*)$ 와 바깥왜곡 $D_o(Q_N^*)$ 의 합으로 표현하면

$$D_o(Q_N^*) = D_i(Q_N^*) + D_o(Q_N^*)$$

이제 안왜곡 $D_i(Q_N^*)$ 를 팬터-다잇 식으로 근사한다.

$$D_i(Q_N^*) \approx \frac{1}{12N^2} \left(\int_{x_2^*}^{x_N^*} p^{\frac{1}{3}}(x) dx \right)^3 \quad (3)$$

바깥왜곡 $D_o(Q_N^*)$ 은 다음과 같다.

$$D_o(Q_N^*) = \int_{x_1^*=0}^{x_2^*} (x - y_1^*)^2 p(x) dx + \int_{x_N^*}^{x_{N+1}^*=\infty} (x - y_N^*)^2 p(x) dx \quad (4)$$

여기서, $x_1^*=0$ 을 사용한 것은 Weibull 분포는 $[0, \infty)$ 에서만 0이 아닌 사실을 감안한 것이다. 또 $y_1^* = c(x_1^*, x_2^*) = c(0, x_2^*)$ 과 $y_N^* = c(x_N^*, x_{N+1}^*) = c(x_N^*, \infty)$ 로 이는 $p(x)$ 에 대한 각각의 구간 $(0, x_2^*)$ 과 (x_N^*, ∞) 의 무게중심(centroid)이다.

2.1 왜곡의 근사화

이제 식(3)에서 x_2^* 대신 u 를 x_N^* 대신 v 를 사용하면, 다음식을 얻는다. (편의상 u 와 v 를 사용하고자한다.)

$$D_i(Q_N^*) \Big|_{\substack{x_2^* \rightarrow u \\ x_N^* \rightarrow v}} \approx \frac{1}{12N^2} \left(\int_u^v p^{\frac{1}{3}}(x) dx \right)^3 \quad (5)$$

여기서 위식의 오른쪽은 u 의 v 함수이므로라고 $D_i(u, v)$ 정의하자. 즉,

$$D_i(u, v) \equiv \frac{1}{12N^2} \left(\int_u^v p^{\frac{1}{3}}(x) dx \right)^3 \quad (6)$$

따라서, 식(5)와 (6)을 비교하면 $u = x_2^*$, $v = x_N^*$ 일 때 $D_i(Q_N^*) \approx D_i(u, v)$ 이다. 또, $D_o(Q_N^*)$ 에 대해 마찬가지로 방법을 적용하면

$$D_o(Q_N^*) \Big|_{\substack{x_2^* \rightarrow u \\ x_N^* \rightarrow v}} \equiv \int_0^u [x - c(0, u)]^2 p(x) dx + \int_v^\infty [x - c(v, \infty)]^2 p(x) dx \quad (7)$$

결론적으로 식(6), (7)을 사용하여 $D(Q_N^*)$ 를 $D_i(u, v)$ 와 $D_o(u, v)$ 의 합 $D(u, v)$ 로 근사화시킨다. 즉,

$$D(Q_N^*) \approx D(u, v) \equiv D_i(u, v) + D_o(u, v) \quad (8)$$

식(8)이 갖는 중요한 의미는 다음과 같다. 첫째, 최적양자기가 주어지면, 즉 $u = x_2^*$, $v = x_N^*$ 이 알려져 있으면, $D(u, v) = D(x_2^*, x_N^*)$ 는 $D(Q_N^*)$ 의 값과 비슷하다. 둘째, 최적양자기의 왜곡 $D(Q_N^*)$ 은 $x_2 = x_2^*$ 와 $x_N = x_N^*$ 에서 최소값을 갖으므로, x_2 와 x_N 에 대한 왜곡의 편미분값은 $x_2 = x_2^*$ 와

$x_N = x_N^*$ 에서 각각 0이 되어야 할 것이다. 따라서, $D(Q_N^*)$ 의 근사식으로 정의한 식(5)의 $D(u, v)$ 도, $u \cong x_2^*, v \cong x_N^*$ 에서 최소값을 가질 것이다. 결론적으로, $\frac{\partial D(u, v)}{\partial u} = 0, \frac{\partial D(u, v)}{\partial v} = 0$ 을 만족하는 u, v 의 값은 x_2^* 와 x_N^* 의 근사값으로 쓰일 수 있다.

이제 식(8)를 u 와 v 에 대해 편미분하여 0으로 놓고 연립하여 풀면 u, v 를 얻을 수 있다. 즉, 다음 두 식을 만족하는 값을 구하고자한다. 즉,

$$\frac{\partial D(u, v)}{\partial u} = 0, \frac{\partial D(u, v)}{\partial v} = 0 \quad (9)$$

구체적으로, 미분한 식(9)을 정리하면 어렵지 않게 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{2N} \left(\int_u^v p^{\frac{1}{3}}(x) dx \right) = (u - c(0, u)) p^{\frac{1}{3}}(u) \quad (10-a)$$

$$\frac{1}{2N} \left(\int_u^v p^{\frac{1}{3}}(x) dx \right) = (c(v, \infty) - v) p^{\frac{1}{3}}(v) \quad (10-b)$$

위 연립방정식은 비선형 방정식이어서, 해가 존재하는지, 또 존재하더라도 어떻게 해를 구하여야 하는지는 일반적으로 알 수 없다. 다음 절에서 이 연립방정식의 근사해를 구하는 방법을 제시하고, 이를 사용하여 근사해를 구한다.

2.2 근사공식

식(10-a)과 (10-b)에 관련된 항들은 본문에 넣기에 무척 복잡하여 부록에 정리하였다. 부록 식(a-6)을 사용하여 식(10-a)를 좌변 = 우변 형태로 표현하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2N} K_0(\alpha, \beta) \left[1 - K_1(\alpha, \beta) \left(1 - \frac{\alpha(\beta+2)}{6(2\beta+1)} u^\beta \right) \right. \\ & \left. - K_2(\alpha, \beta) \frac{\exp\left(-\frac{\alpha v^\beta}{3}\right)}{v^{\frac{2(\beta-1)}{3}}} \left(1 + \frac{2(1-\beta)}{\alpha \beta v^\beta} \right) \right] \\ & \cong \frac{(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}}{\beta+1} u^{\frac{\beta+2}{3}} \left(1 - \frac{\alpha(4\beta-1)}{6(2\beta+1)} u^\beta \right) \quad (10-a') \end{aligned}$$

마찬가지로, 식(10-b)을 좌변 = 우변 형태로 표현하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2N} K_0(\alpha, \beta) \left[1 - K_1(\alpha, \beta) \left(1 - \frac{\alpha(\beta+2)}{6(2\beta+1)} u^\beta \right) \right. \\ & \left. - K_2(\alpha, \beta) \frac{\exp\left(-\frac{\alpha v^\beta}{3}\right)}{v^{\frac{2(\beta-1)}{3}}} \left(1 + \frac{2(1-\beta)}{\alpha \beta v^\beta} \right) \right] \cong \\ & (\alpha\beta)^{\frac{1}{3}} v^{\frac{\beta-1}{3}} \exp\left(-\frac{\alpha v^\beta}{3}\right) \frac{1}{\alpha \beta v^{\beta-1}} \left[1 - \frac{\beta-1}{\alpha \beta v^\beta} \right] \quad (10-b') \end{aligned}$$

식(10-a')과 (10-b')을 부록에 제시한 근사표를 사용하여 구하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} u \cong & \left(\frac{3}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left[\frac{\beta+1}{2\beta N} \Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right) \right]^{\frac{3}{\beta+2}} \\ & \left[1 - \frac{3(2\beta+3)}{2(\beta+2)N} + \frac{4\beta-1}{2(2\beta+1)} \right. \\ & \left. \left(\frac{\beta+1}{2\beta N} \Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right) \right)^{\frac{3\beta}{\beta+2}} \right]^{\frac{3}{\beta+2}} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \cong & \left(\frac{3}{\alpha} \ln \frac{2N}{3\Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right)} - \frac{2(\beta-1)}{\alpha\beta} \ln \ln N \right. \\ & \left. + \frac{4(\beta-1)^2}{3\alpha\beta^2} \frac{\ln \ln N}{\ln N} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (12) \end{aligned}$$

식(11)와 (12)은 각각 최적양자기의 지지역 경계 값 x_2^* 와 x_N^* 의 근사공식으로 사용되었다.

2.3 근사공식의 정확도

식(11)과 식(12)에서 구한 u 와 v 의 근사공식에 의해 구한 값들을 표1~4에 나타냈다.

- 표1
- 표2
- 표3
- 표4

레일리 분포와 지수 분포의 경우에 유도된 근사식을 실제 설계된 양자기와 비교하여, 근사식의 정확도를 평가하였다. 레일리 분포의 경우, 즉 $\alpha=1, \beta=2$ 인 경우에 표1은 실제값 x_2^* 와 근사 공식 u 를, 표2는 실제값 x_N^* 과 근사 공식 v 를 비교한 것이며, 이를 그림3~4에 도시하였다. 마찬가지로 지수 분포의 경우는, $\alpha=\sqrt{2}, \beta=1$, 표3~4와 그림5~6에 나타났다. 이들 표에는 u 와 v 대신 u_N 과 v_N 으로 표기하였는데, 이들이 N 에 대한 함수이기 때문이다.

전반적으로 양자점 개수인 N 값이 증가할수록 정확도 또한 증가하는 추세이고, 또한 오차 $|u_N - x_2^*|$ 또는 $|v_N - x_M^*|$ 도 감소하는 추세이다. 구체적으로 양자기 지지역 왼쪽 끝경계값의 근사식 u 는, 레일리 분포와 지수 분포 각각의 경우에 양자점이 $\log_2 N \geq 7$ ($N \geq 128$)과 $\log_2 N \geq 8$ ($N \geq 256$) 이상일 때 실제값과 약 1% 이내의 오차를 갖는 것으로 관찰되었다. 오른쪽 끝경계값 근사식도 각각 양자점이 $\log_2 N \geq 9$ ($N \geq 512$)와 $\log_2 N \geq 5$ ($N \geq 32$) 이상일 때 약 1% 이내의 오차를 갖는 것으로 판명되었다. 이로써, 지금까지는 양자기 지지역을 구하는데 수치적인 알고리즘만으로 제시되어 왔던 데에서 벗어나, 이 논문을 통해 구체적인 정확한 수식을 유도하여 제시했다는 데에서 기여점을 찾을 수 있다.

- 그림3
- 그림4
- 그림5
- 그림6

2.4 Weibull 신호원 대한 최적 양자기의 왜곡평가

앞에서 Weibull 신호원에 대한 근사식을 유도하였다. 여기서는 Weibull 신호원에 대해 실제로 최적 양자기를 설계해서 왜곡이 팬터-다잇 상수로 수렴하는 과정을 고찰한다. 이 논문에서의 최적 양자기의 설계는 [1,2]의 로이드-맥스의 방법을 사용하였다. 표5~6에 $D(Q_N^*)$ 는 최적 양자기의 왜곡이며, $SNR(Q_N^*)$ 은 신호대 양자 왜곡비로서, 다음

식으로 계산된 것이다.

$$SNR(Q_N^*) = 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{D(Q_N^*)}$$

여기서 σ_x^2 은 신호원의 분산이다. 팬터-다잇 상수 C_{PD} 는 다음과 같다.

$$C_{PD} \equiv \frac{1}{12} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p^{\frac{1}{3}}(x) dx \right)^3 \quad (13)$$

Weibull 신호원의 경우 팬터-다잇 상수는

$$C_{PD} = \frac{1}{12} \left[\frac{3 \frac{\beta+2}{\beta}}{a \frac{2}{\beta} \beta^2} \Gamma \left(\frac{\beta+2}{3\beta} \right)^3 \right] \quad (14)$$

최적 양자기의 경우, $N^2 D(Q_N^*)$ 은 팬터-다잇 상수 C_{PD} 로 수렴한다는 사실이 알려져 있다.^[6] 레일리 ($\alpha=1, \beta=2$), 지수 분포 ($\alpha=\sqrt{2}, \beta=1$)일 때 각각의 팬터-다잇 상수 C_{PD} 는 0.4655와 1.125이다. 표5와 6에서 보면 레일리 분포와 지수 분포의 경우에 $\log_2 N \geq 7$ ($N \geq 128$) 이상일 때 1% 정도의 오차를 갖으며, $N^2 D(Q_N^*)$ 의 C_{PD} 로 수렴하는 양상을 관찰할 수 있다.

- 표5
- 표6
- 그림7
- 그림8

III. 결론

이 논문은 최소평균제곱오차의 의미에서 Weibull 신호원에 최적인 홀양자기의 지지영역과 이에 대한 관련 연구이다. 주요한 결과로, Weibull 신호원에 대한 최적 양자기의 최외곽 경계값의 근사식을 유도·제시하였다. 이 논문에 제시된 연구결과는 다음과 같다. Weibull 분포에 최적인 양자기의 최외곽 경계값의 근사식은 안왜곡에

팬터-다잇 공식을 사용하고, 바깥왜곡에 실제 왜곡을 사용하였으며, 유도된 근사식을 실제값과 비교하여, 근사식의 정확도를 평가하였다. 레일리 분포와 지수 분포 각각의 경우에 양자점이 $\log_2 N \geq 7$ ($N \geq 128$)과 $\log_2 N \geq 8$ ($N \geq 256$) 이상일 때 실제값과 약 1% 이내의 오차를 갖는다. 오른쪽 끝경계값 근사식도 각각 양자점이 $\log_2 N \geq 9$ ($N \geq 512$)와 $\log_2 N \geq 5$ ($N \geq 32$) 이상일 때 약 1% 이내의 오차를 갖는 것으로 판명되었다. 또, 양자점의 개수가 증가하면 공식의 정확도가 높아졌다. 결론적으로, 경계값 근사식은 매우 높은 정확도를 갖는 것으로 사료된다. 따라서, 이 논문의 기여점은, 지금까지는 양자기 지지역을 구하는데 수치적인 알고리즘만으로 제시되어 왔던 데에서 벗어나, Weibull 분포에 대한 구체적인 수식을 최초로 유도·제시한 점에서 가치가 있다. 이 공식들은 Weibull 신호원에 최적인 양자기의 성능분석과 양자기 불일치 연구에 귀중하게 사용될 수 있을 것이다.

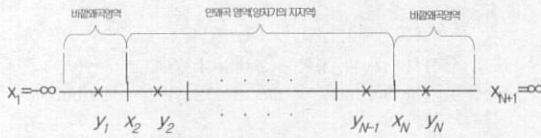


그림 1. 홀양자기의 표현
Fig. 1. A scalar quantizer

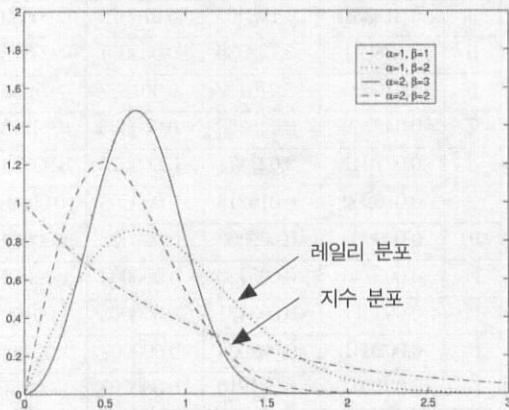


그림 2. Weibull 밀도함수의 다양한 분포도
Fig 2. Various distribution of the Weibull density function

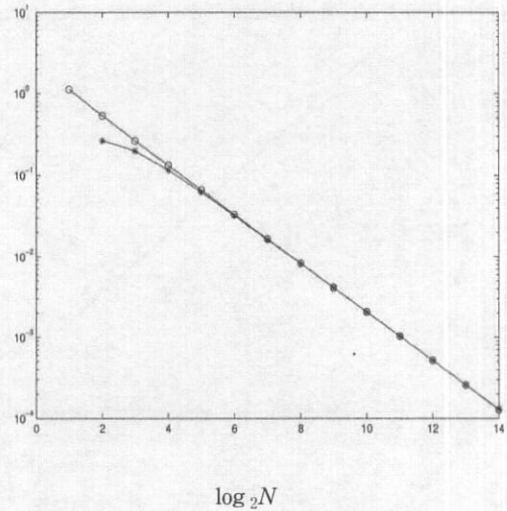


그림 3. 최적양자기의 왼쪽 끝경계값 x_2^* 과 u_N 근사값의 비교 : 레일리 분포

Fig3. The comparison of x_2^* and its approximation u_N for Rayleigh distribution

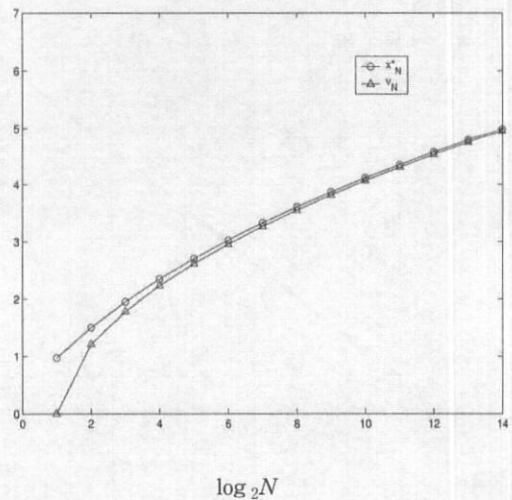


그림 4. 최적양자기의 오른쪽 끝경계값 x_N^* 과 v_N 근사값의 비교 : 레일리 분포

Fig4. The comparison of x_N^* and its approximation v_N for Rayleigh distribution

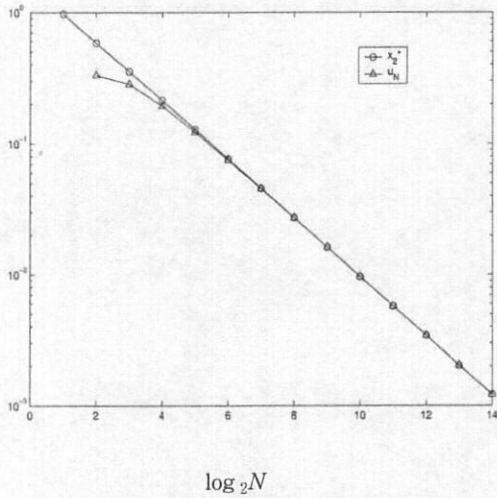


그림 3. 최적양자기의 왼쪽 끝경계값 x_2^* 과 u_N 근사값의 비교 : 지수 분포
 Fig3. The comparison of x_2^* and its approximation u_N for exponential distribution

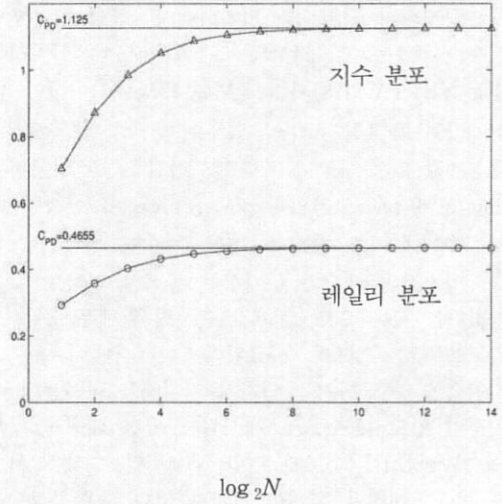


그림 7. $N^2 D(Q_N^*)$ 의 팬터-다이트 C_{PD} 로의 수렴
 Fig 7. The convergence of $N^2 D(Q_N^*)$ to the Panter-Dite constant

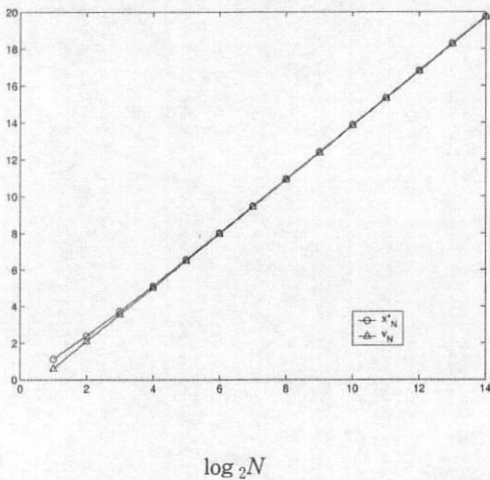


그림 6. 최적양자기의 오른쪽 끝경계값 x_N^* 과 v_N 근사값의 비교 : 지수 분포
 Fig 6. The comparison of x_N^* and its approximation v_N for exponential distribution

표 1. 근사식 u_N 의 정확도 : 레이리 분포
 Table 1. The accuracy of the for Rayleigh distribution

| $\log_2 N$ | x_2^* | 근사식 u_N | $u_N - x_2^*$ | u_N / x_2^* |
|------------|----------|-----------|---------------|---------------|
| 1 | 0.972132 | -0.088424 | -1.060556 | -0.09096 |
| 2 | 0.581128 | 0.330863 | -0.250265 | 0.56935 |
| 3 | 0.352954 | 0.282974 | -0.069980 | 0.80173 |
| 4 | 0.213381 | 0.193407 | -0.019974 | 0.90639 |
| 5 | 0.128211 | 0.122535 | -0.005677 | 0.95572 |
| 6 | 0.076695 | 0.075127 | -0.001567 | 0.97956 |
| 7 | 0.045759 | 0.045353 | -0.000406 | 0.99113 |
| 8 | 0.027241 | 0.027171 | -0.000070 | 0.99743 |
| 9 | 0.016250 | 0.016218 | 0.000003 | 0.99801 |
| 10 | 0.009660 | 0.009662 | 0.000002 | 1.00017 |
| 11 | 0.005746 | 0.005750 | 0.000004 | 1.00070 |
| 12 | 0.003417 | 0.003421 | -0.000003 | 1.00100 |
| 13 | 0.002031 | 0.002034 | 0.000003 | 1.00164 |
| 14 | 0.001207 | 0.001210 | -0.000003 | 1.00251 |

표 2. 근사식 v_N 의 정확도 : 레일리 분포

Table 2. The accuracy of v_N for Rayleigh distribution

| $\log_2 N$ | x_N^* | 근사식 v_N | $v_N - x_N^*$ | v_N / x_N^* |
|------------|----------|-----------|---------------|---------------|
| 1 | 0.972132 | 0.000000 | -0.972132 | 0.000000 |
| 2 | 1.503921 | 1.211965 | -0.291956 | 0.80587 |
| 3 | 1.951370 | 1.783719 | -0.167651 | 0.91409 |
| 4 | 2.346242 | 2.231291 | -0.011495 | 0.95101 |
| 5 | 2.701799 | 2.613790 | -0.088009 | 0.96743 |
| 6 | 3.026205 | 2.953592 | -0.072613 | 0.97601 |
| 7 | 3.325350 | 3.262403 | -0.062947 | 0.98107 |
| 8 | 3.603699 | 3.547343 | -0.056356 | 0.98436 |
| 9 | 3.864691 | 3.813156 | -0.051535 | 0.98667 |
| 10 | 4.111001 | 4.063190 | -0.047810 | 0.98837 |
| 11 | 4.344736 | 4.299925 | -0.044811 | 0.98969 |
| 12 | 4.567567 | 4.525248 | -0.042319 | 0.99073 |
| 13 | 4.780842 | 4.740644 | -0.040198 | 0.99159 |
| 14 | 4.985665 | 4.947299 | -0.038366 | 0.99230 |

표 4. 근사식 v_N 의 정확도 : 지수 분포

Table 4. The accuracy of v_N for exponential distribution

| $\log_2 N$ | x_N^* | 근사식 v_N | $v_N - x_N^*$ | v_N / x_N^* |
|------------|-----------|-----------|---------------|---------------|
| 1 | 1.126863 | 0.610266 | -0.516597 | 0.54156 |
| 2 | 2.379580 | 2.080653 | -0.298927 | 0.87438 |
| 3 | 3.723965 | 3.551040 | -0.172925 | 0.95356 |
| 4 | 5.125873 | 5.021427 | -0.104446 | 0.97962 |
| 5 | 6.560450 | 6.491815 | -0.068635 | 0.98954 |
| 6 | 8.012510 | 7.962202 | -0.050307 | 0.99372 |
| 7 | 9.473623 | 9.432589 | -0.041034 | 0.99567 |
| 8 | 10.939345 | 10.902976 | -0.036369 | 0.99668 |
| 9 | 12.407393 | 12.373364 | -0.034030 | 0.99726 |
| 10 | 13.876609 | 13.843750 | -0.032858 | 0.99763 |
| 11 | 15.346410 | 15.314138 | -0.032272 | 0.99790 |
| 12 | 16.816504 | 16.784525 | -0.031978 | 0.99810 |
| 13 | 18.286744 | 18.254912 | -0.031832 | 0.99826 |
| 14 | 19.757056 | 19.725300 | -0.031757 | 0.99839 |

표 3. 근사식 u_N 의 정확도 : 지수 분포

Table 3. The accuracy of u_N for exponential distribution

| $\log_2 N$ | x_2^* | 근사식 u_N | $u_N - x_2^*$ | u_N / x_2^* |
|------------|----------|-----------|---------------|---------------|
| 1 | 1.126863 | 0 | -1.126863 | 0 |
| 2 | 0.533181 | 0.265165 | -0.268016 | 0.49733 |
| 3 | 0.264413 | 0.198874 | -0.065539 | 0.75213 |
| 4 | 0.132214 | 0.116010 | -0.016205 | 0.87744 |
| 5 | 0.066177 | 0.062148 | -0.004029 | 0.93912 |
| 6 | 0.033114 | 0.032110 | -0.001004 | 0.96967 |
| 7 | 0.016565 | 0.016314 | -0.000251 | 0.98486 |
| 8 | 0.008284 | 0.008222 | -0.000063 | 0.99244 |
| 9 | 0.004143 | 0.004127 | -0.000016 | 0.99622 |
| 10 | 0.002071 | 0.002068 | -0.000004 | 0.99812 |
| 11 | 0.001036 | 0.001035 | -0.000000 | 0.99912 |
| 12 | 0.000518 | 0.000518 | 0.000000 | 1.00004 |
| 13 | 0.000259 | 0.000259 | 0.000000 | 1.00018 |
| 14 | 0.000129 | 0.000129 | 0.000001 | 1.00036 |

표 5. 최적 양자기매극의 팬터-다윗 상수로의 수렴

($\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 D(Q_N^*) = 0.4655$) : 레일리 분포

Table 5. The convergence of $N^2 D(Q_N^*)$ to C_{PD} for Rayleigh distribution

| $\log_2 N$ | $D(Q_N^*)$ | $N^2 D(Q_N^*)$ | $SNR(Q_N^*)$ |
|------------|------------------|------------------|--------------|
| 1 | 0.07314649143877 | 0.29258596575508 | 4.674 |
| 2 | 0.02236342920651 | 0.35781486730416 | 9.821 |
| 3 | 0.00630580625219 | 0.40357160014016 | 15.319 |
| 4 | 0.00168664198268 | 0.43178034756608 | 21.046 |
| 5 | 0.00043726873864 | 0.44776318836736 | 26.909 |
| 6 | 0.00011141803694 | 0.45636827930624 | 32.847 |
| 7 | 0.00002812904183 | 0.46086622134272 | 38.825 |
| 8 | 0.00000706753560 | 0.46317801308160 | 44.824 |
| 9 | 0.00000177137289 | 0.46435477487616 | 50.833 |
| 10 | 0.00000044341126 | 0.46495040536576 | 56.848 |
| 11 | 0.00000011092444 | 0.46525082238976 | 62.866 |
| 12 | 0.00000002774012 | 0.46540198510592 | 68.885 |
| 13 | 0.00000000693616 | 0.46547781812224 | 74.905 |
| 14 | 0.00000000173418 | 0.46551539908608 | 80.925 |

표 6. 최적 양자기왜곡의 팬터-다йт 상수로의 수렴
 $(\lim_{N \rightarrow \infty} N^2 D(Q_N^*) = 1.125)$: 지수 분포

Table 6. The convergence $N^2 D(Q_N^*)$ of C_{PD} to for exponential distribution

| $\log_2 N$ | $D(Q_N^*)$ | $N^2 D(Q_N^*)$ | $SNR(Q_N^*)$ |
|------------|------------------|------------------|--------------|
| 1 | 0.17619488105404 | 0.70477952421616 | 4.530 |
| 2 | 0.05447598791395 | 0.87161580662320 | 9.628 |
| 3 | 0.01537252706004 | 0.98384173184256 | 15.122 |
| 4 | 0.00410217998763 | 1.05015807683328 | 20.860 |
| 5 | 0.00106095228824 | 1.08641514315776 | 26.733 |
| 6 | 0.00026987377364 | 1.10540297682944 | 32.678 |
| 7 | 0.00006806173968 | 1.11512354291712 | 38.661 |
| 8 | 0.00001709048544 | 1.12004205379584 | 44.662 |
| 9 | 0.00000428205897 | 1.12251606663168 | 50.673 |
| 10 | 0.00000107169798 | 1.12375678107648 | 56.689 |
| 11 | 0.00000026807262 | 1.12437806235648 | 62.707 |
| 12 | 0.00000006703668 | 1.12468886028288 | 68.727 |
| 13 | 0.00000001676148 | 1.12484388175872 | 74.747 |
| 14 | 0.00000000419066 | 1.12492172804096 | 80.767 |

부 록

식(10-a)와 (10-b)의 좌변 전개 과정은 다음과 같다.

$$\int_u^v p^{\frac{1}{3}}(x) dx = \int_0^\infty p^{\frac{1}{3}}(x) dx - \int_0^u p^{\frac{1}{3}}(x) dx - \int_v^\infty p^{\frac{1}{3}}(x) dx \quad (a-1)$$

우변의 첫항은 불완전 감마 함수(incomplete gamma function) [5]를 사용하여 표현할 수 있다. 그 정의는 다음과 같다. 임의의 α 에 대해,

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\beta t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (a-2)$$

여기서 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 인 감마함수이다. 식 (a-1) 첫항에 식(2)를 대입하고 식(a-2)을 이용해서 풀면 감마함수로 표현된다.

$$\int_0^\infty p^{\frac{1}{3}}(x) dx = \frac{3^{\frac{\beta+2}{3\beta}}}{\alpha^{\frac{2}{3\beta}} \beta^{\frac{2}{3}}} \Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right) \quad (a-3)$$

식(a-1)의 우변의 둘째항은 $p(x)^{\frac{1}{3}}$ 의 테일러 급수를 사용한 뒤, 적분하여 다음식을 얻는다.

$$\int_0^u p^{\frac{1}{3}}(x) dx \approx (\alpha\beta)^{\frac{1}{3}} \frac{3}{\beta+2} u^{\frac{\beta+2}{3}} \left(1 - \frac{\alpha(\beta+2)}{6(2\beta+1)} u^\beta\right) \quad (a-4)$$

식(a-1)의 셋째항은 부분적분을 통하여 점근전개(asymptotic expansion) 하면 다음 근사식을 얻을 수 있다.

$$\int_v^\infty p^{\frac{1}{3}}(x) dx \approx \frac{3}{(\alpha\beta)^{\frac{2}{3}}} \frac{e^{-\frac{\alpha}{3} v^\beta}}{v^{\frac{2\beta-2}{3}}} \left(1 - \frac{2\beta-2}{\alpha\beta} \frac{1}{v^\beta}\right) \quad (a-5)$$

이를 종합하면

$$\int_u^v p^{\frac{1}{3}} dx \cong K_0(\alpha, \beta) \left[1 - K_1(\alpha, \beta) \left(1 - \frac{\alpha(\beta+2)}{6(2\beta+1)} u^\beta\right) - K_2(\alpha, \beta) \frac{\exp\left(-\frac{\alpha v^\beta}{3}\right)}{v^{\frac{2(\beta-1)}{3}}} \left(1 + \frac{2(1-\beta)}{\alpha\beta v^\beta}\right)\right] \quad (a-6)$$

여기서,

$$K_0(\alpha, \beta) = \frac{3^{\frac{\beta+2}{3\beta}}}{\left(\alpha^{\frac{1}{\beta}} \beta\right)^{\frac{2}{3}}} \Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right)$$

$$K_1(\alpha, \beta) = 3^{\frac{2\beta-2}{3\beta}} \alpha^{\frac{\beta+2}{3\beta}} \frac{\beta}{\beta+2} \frac{u^{\frac{\beta+2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right)}$$

$$K_2(\alpha, \beta) = 3^{\frac{2\beta-2}{3\beta}} \alpha^{\frac{2-2\beta}{3\beta}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\beta+2}{3\beta}\right)}$$

식(10-a)의 우변항에 무게중심 $c(0, u)$ 와 $p^{\frac{1}{3}}(u)$ 를 테일러 급수로 표현하여 중요한 몇 항을 취하여 다음 근사식을 얻는다.

$$(u - c(0, u))p^{\frac{1}{3}}(v) \cong \frac{(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}}{\beta+1} u^{\frac{\beta+2}{3}}$$

$$\left(1 - \frac{\alpha(4\beta-1)}{6(2\beta+1)} u^\beta\right) \quad (a-7)$$

식(10-b)의 우변항은 무계중심 $c(v, \infty)$ 와 $p^{\frac{1}{3}}(v)$ 의 점근전개를 사용하여 근사하였다.

$$(c(v, \infty) - v)p^{\frac{1}{3}}(v) \cong (\alpha\beta)^{\frac{1}{3}} v^{\frac{\beta-1}{3}}$$

$$\exp\left(-\frac{\alpha v^\beta}{3}\right) \frac{1}{\alpha\beta v^{\beta-1}} \left[1 - \frac{\beta-1}{\alpha\beta v^\beta}\right] \quad (a-8)$$

참 고 문 헌

[1] S.P. Lloyd, "Least Squares Quantization in PCM," *IEEE Trans. Inform., Theory*, IT-28, pp. 127-135, Mar. 1982.

[2] J. Max, "Quantization for Minimum Distortion," *IRE Trans. on Inform. Theory*, IT-6, pp. 7-12, Jan. 1960.

[3] X. Wu, "On Initialization of Max's Algorithm for Optimum Quantization," *IEEE Trans Comm*, Vol. 38, No. 10, Oct. 1990.

[4] 구기일, 임실규, 나상신, "일반화된 감마 신호원에 대한 최적 끝경계값식의 정확도에 관한 연구," KSPC 99 학술 대회 논문집, pp. 971-974, 포항공대, 1999년 10월.

[5] W.H. Press and B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1989.

[6] P.F. Panter and W. Dite, "Quantization Distortion in Pulse Count Modulation with Nonuniform Spacing of Levels," *Proc IRE*, pp. 44-48, Jan. 1991.

[7] S. Na and D.L. Neuhoff, "On the Support of MSE-Optimal,

Fixed-Rate, Scalar Quantizers," *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 47, No. 7, Nov. 2001.

[8] 구기일, 나상신, "일반화된 감마 신호원의 분산 불일치된 양자화", 한국통신학회 문집, Vol-25, 10A, pp. 1566-1576, 2000년 10월.

[9] 송현정, 나상신, "램버트 W 함수를 사용한 라플라스 신호의 최소평균제곱 오차 양자화", 한국통신학회문집, Vol-27, 6A, pp. 524-532, 2002년 6월.

[10] 임실규, "Weibull 신호원에 최적인 양자기의 지지역에 관한 연구", 석사학위논문, 아주대학교, 2002년 8월

임 실규(Sil-Kyu Lim)

정회원



1999년 2월: 영동대학교 정보통신공학과 졸업
2002년 8월 : 아주대학교 대학원 전자공학과 석사
2003년~ : 현대LCD 연구소

<주관심분야> : 디지털통신, 신호처리, TFT-LCD 이동통신

나 상신(Sang-Sin Na)

정회원



1982년 2월: 서울대학교 전자공학 학사
1985년: 미국 미시간대학교 전기공학 및 컴퓨터과학 석사
1989년: 미국 미시간대학교 전기공학 및 컴퓨터과학 박사

1989~91년: 미국 네브라스카대학교 전기공학과 조교수
1991~현재: 아주대학교 전자공학부 재임
1998, 2002년: 미국 미시간대학교 객원 교수

<주관심분야> : 디지털통신, 정보이론, 자료압축, 신호원부호화