

# Constrained 최적화 기법을 이용한 Non-rigid 영상 등록

정회원 김 정 태\*

## Non-rigid Image Registration using Constrained Optimization

Jeongtae Kim\* *Regular Member*

### 요 약

비강체 (non-rigid) 영상 등록에서 추정되는 좌표변환은 가역이어야 함으로 그 변환의 Jacobian 행렬식은 항상 양수 값을 가져야 한다. 본 논문에서는 이러한 가역 조건을 만족하는 좌표변환의 조건을 gradient 크기 제한의 조건으로 구한다. 또한 cubic B-spline을 이용한 변환 모델의 경우, 이 gradient 크기 제한 조건을 만족시키는 인수 집합을 이웃한 두 계수들의 차이가 제한된 인수들의 집합으로 구하였다. 이러한 인수들의 집합은 half space들의 교집합으로 이루어진 convex 집합이다. 본 논문에서는 이 convex 집합에 속하는 인수로 구성되는 좌표변환들 중에서 유사지수 (similarity measure)를 최대로 만드는 변환을 gradient projection 최적화 기법을 통해 발견하였다. 이론적 분석, 폐 CT (Computed Tomography) 영상을 이용한 시뮬레이션 및 실험을 통하여, 제안된 알고리즘의 성능이 벌칙 함수 (penalty function)를 이용하는 기존의 방법보다 우수함을 증명하였다.

**key Words** registration; non rigid, invertibility, Jacobian determinant

### ABSTRACT

In non-rigid image registration, the Jacobian determinant of the estimated deformation should be positive everywhere since physical deformations are always invertible. We propose a constrained optimization technique that ensures the positiveness of Jacobian determinant for cubic B-spline based deformation. We derived sufficient conditions for positive Jacobian determinant by bounding the differences of consecutive coefficients. The parameter set that satisfies the conditions is convex, it is the intersection of simple half spaces. We solve the optimization problem using a gradient projection method with Dykstra's cyclic projection algorithm. Analytical results, simulations and experimental results with inhale/exhale CT images with comparison to other methods are presented.

### I. 서론

영상 등록은 두 영상을 기하 좌표변환 (geometric coordinate transform)을 이용하여 정렬하는 것으로 영상 합성 (image fusion), 움직임 추정 (motion estimation), 영상 인식 (image recognition) 등에 유용하게 사용되는 기술이다 [1]. 특히 의료 영상 등

록 (medical image registration)은 질병의 진단, 방사선 치료 (radiotherapy), 의료 영상을 이용한 수술 (image-guided surgery) 시 환자의 위치 검출 등에 매우 유용하게 사용된다 [2][3][4]. 예를 들면, 의료 영상을 이용한 진단 시에 CT (Computed Tomography) 영상과 PET (Positron Emission Tomography) 영상과 같은 두 가지 다른 종류의 의

\* 이화여자대학교 정보통신학과 멀티미디어신호처리연구실 (jtkim@ewha.ac.kr)  
논문번호 KICS2004-07-082, 접수일자 2004년 7월 6일

로 영상을 정확히 겹쳐서 보게 되면 CT 가 제공하는 해부학적인 정보 (anatomical information) 와 PET 가 제공하는 기능적 정보 (functional information) 를 동시에 볼 수 있으므로 환부의 위치 확인 및 치료 계획 수립 등에 매우 유용하다 [1].

또한 방사선 치료 시, 치료 계획대로 환자가 정확히 치료 테이블에 위치하고 있는 지를 영상 등록을 통해서 파악할 수 있다 방사선 치료 계획은 환자의 CT 영상에서 종양의 위치를 파악하고 이를 바탕으로 방사선 조사 (X-ray irradiation) 가 계획된다. 하지만, 실제 치료실에서의 환자의 위치는 계획대비 오차가 있으므로 환자를 테이블에 고정된 후에 촬영한 X-ray 영상과 계획 시 사용하였던 CT 영상을 등록하여 보면 두 영상이 정렬되기에 필요한 좌표 변환의 양만큼 위치에 오차가 있음을 추정할 수 있다 [3]. 이와 같이 검출된 정보는 오차를 줄이는데 사용될 수 있을 뿐만 아니라 누적 방사선 양 (accumulated X-ray dose) 을 계산하는 데에도 매우 유용하다 [4].

일반적으로, 영상 등록은 한 영상을 좌표변환을 통해 변형 시킨 영상과 등록하고자 하는 다른 영상과의 유사성을 최대화 하는 좌표변환을 발견함으로써 수행된다 이를 위하여 유사성을 계량화할 수 있는 유사지수 (similarity measure) 를 설계하고 이를 최대화 하는 좌표변환을 반복적 최적화 기법 (iterative optimization method) 을 사용하여 구하게 된다 유사지수로는 두 영상의 MSE (Mean Square Error), 상관 계수, MI (Mutual Information) 등이 많이 사용되어 왔다 [5][6][7].

영상 등록 기법은 좌표변환의 종류에 따라 크게 강체 등록 과 비강체 등록으로 나눌 수 있다 강체 등록의 경우에는 물체가 강체라고 가정하여 회전과 이동만으로 영상을 등록한다 이 경우, 3차원 영상 등록의 경우, 좌표변환은 3개의 회전과 3개의 이동 인수로 표현된다. 많은 경우, 문제를 단순화하기 위하여 이와 같이 강체 영상 등록을 수행한다 그러나 인체는 강체가 아니므로 보다 나은 성능의 영상 등록을 얻기 위해서는 비강체 좌표변환을 사용하는 비강체 영상 등록을 수행할 필요가 있다. 특별히, 종양이나 soft tissues 와 같이 부드러운 부분의 영상 등록을 수행하는 경우에는 비강체 영상 등록이 필수적이다 비강체 의료 영상 등록은 atlas-based segmentation, 종양의 변화 추정, 방사선 치료에 필요한 동적인 장기 움직임 (organ motion) 추정, 동

적 (dynamic) CT 등의 매우 많은 분야에 응용될 수 있다. 특히 방사선 치료 시의 치료 계획 수립 (treatment planning) 과 누적 방사선 양의 계산에 매우 유용하게 사용될 수 있다 [1][4][6].

비강체 영상 등록을 사용하여 추정되는 좌표변환은 유사지수를 크게 만들 뿐 만 아니라 물리적으로 올바른 좌표변환의 특성을 가지고 있어야 한다 예를 들면, 대부분의 인체의 변형은 부드럽게 일어나므로, 유사지수는 크게 만들더라도 지나치게 공간상에서의 변화가 심한 좌표변환은 실제의 변형을 올바르게 추정하지 못한 것일 가능성이 크다. 따라서 최적화시에 공간상에서의 변형의 부드러움 [8] 이나 bending 에너지 [9] 등의 벌칙 함수를 목적함수에 포함시켜서 물리적인 성질에 좀 더 부합하는 좌표 변환을 찾게 된다

추정되는 좌표변환이 가져야할 가장 중요한 물리적인 특성중의 하나가 좌표변환의 가역성이다 대부분의 인체의 변형은 가역적이므로 추정되는 좌표 변환 역시 가역이어야 한다. 이러한 가역성을 만족시키기 위하여 기존의 방법들은 벌칙 함수를 사용하여 왔는데 이는 부드러운 변환들은 대부분 가역이라는 사실을 이용한 것이다. 벌칙 함수들로는 앞서 언급한 부드러움, bending 에너지 등이 사용되어 왔다. 또한, 양수의 Jacobian 행렬식을 가지는 변환은 가역이므로, 0 보다 작은 Jacobian 행렬식때 큰 값을 가지는 벌칙 함수도 사용되어왔다 [10]

이러한 기존 방법들은 다음과 같은 문제점들을 가지고 있다 첫 번째로는, 벌칙 함수의 사용이 변환이 가역이 되도록 할 가능성을 높여주는 하지만 가역성을 항상 보장해 주지는 않는다. 두 번째로는 목적함수에서 유사지수 값과 벌칙 값 사이의 균형을 결정하는 정규화 (regularization) 인수의 조절이 필요하고 대부분 수동으로 이 인수를 조절하여야 할 필요가 있다 세 번째로는 추정된 변환들이 비록 벌칙 함수 값을 계산하는 점들에서는 가역이라 하더라도 공간상에서의 다른 점들에서는 가역성이 보장이 되지 않는다

이러한 문제점들을 해결하기 위하여 최근 constrained 최적화 기법을 사용하는 연구가 진행되었다 [11]. 이 연구에서는 Neuman 급수 [12] 를 이용하여 좌표변환의 gradient의 절대 값들이 1/3 로 제한되어 있으면 추정되는 좌표변환의 Jacobian 행

1) 수술 등을 통하여 인위적인 변형이 생긴 경우에는 가역이 아닐 수 있다

렬식이 항상 0 보다 크다는 것을 증명하였고 이 조건을 만족시키기 위하여 좌표변환의 크기를 제한하였다. 이 방법은 항상 가역인 좌표변환을 얻을 수 있고, 공간상에서의 모든 점에서 변환이 가역이라는 장점이 있으나 다음과 같은 두 가지의 단점이 있다 첫째로, 추정되는 변환의 크기가 제한이 되어 버렸기 때문에 작은 gradient 값을 가지더라도 큰 값을 가지는 좌표변환은 찾지 못한다는 단점이 있다 작은 gradient 값을 가지는 큰 변환은 물리적으로 자주 발생하는 변형이다 두 번째로는, 모든 gradient 값들이 1/3 보다 작으면 Jacobian 행렬식이 0보다 크다는 사실만 증명하였을 뿐 각 gradient 값의 제한치와 Jacobian 행렬식 크기 사이의 관계식은 구하지 못하였다는 단점이 있다 이 관계식을 얻을 수 있으면 보다 사실에 가까운 변환을 추정하는데 매우 유용하게 사용될 수 있다 예를 들어 최대의 부피변화를 제한하면서 가역인 변환을 얻을 수 있는 gradient 의 크기 제한을 설정할 수 있다 또한, 선행 연구와는 다르게, x, y, z 방향의 gradient 크기 제한을 다르게 결정할 수 있으므로 인체에서 변화가 심한 방향과 그렇지 않은 방향의 gradient 크기 제한을 다르게 설계하여 보다 사실에 가까운 변환을 얻을 수 있다

본 연구에서는 이러한 두 가지 문제점들을 해결하기 위하여 두 가지 명제를 증명한다 첫째는 Jacobian 행렬식의 가능한 최대 최소 값들을 gradient 크기의 제한 값으로 표현하는 것으로서 이를 통해 가역인 조건을 만족하는 gradient 의 크기 제한을 gradient 벡터의 각 원소 별로 다르게 설정할 수 있도록 한다 Jacobian 행렬식은 체적 변화의 의미하므로 최대 체적 변화가 gradient 크기 제한으로 나타나게 된다. 두 번째는 좌표변환 모델에 사용되는 각 계수들의 크기를 제한하는 것이 아니라 이웃한 두 계수사이의 차이를 제한하여 gradient 값을 제한 할 수 있다는 것으로 이를 통하여 작은 gradient 값을 가지는 큰 좌표변환들을 찾을 수 있도록 한다 또한, 이러한 명제들을 이용하여 설계한 조건을 만족하면서 유사지수를 최대화하는 좌표변환을 발견하기 위하여 gradient projection 최적화 기법을 제안한다

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 II 장에서 비강체 영상 등록의 이론적인 배경과 제안하는 알고리즘을 설명한다 III 장에서는, 제안된 알고리즘과 기존 방법을 폐 CT 영상에 적용하여 성능을 비교 분석한다 IV 장에서는 실험 결과를 토의하

고 앞으로의 연구 방향을 제시하며 부록에는 II 장에서 사용된 두 가지 명제들의 증명이 수록되어 있다.

## II. 이론

비강체 영상 등록의 목표는 두 영상을 정렬하는 좌표변환을 추정하는 것으로 생각할 수 있다 만약, 추정하고자 하는 좌표변환을  $\theta$  라는 인수로 인수화한다면, 비강체 영상 등록의 문제는 두 영상을 가장 잘 정렬하는 인수를 추정하는 인수 추정의 문제로 생각할 수 있다 두 영상을 잘 정렬하면서도 물리적으로 의미 있는 변환을 얻을 수 있도록 하기 위하여 변환의 물리적 특성을 고려한 목적함수를 최적화하여 인수를 추정하게 되는데, 이론적으로는 다음과 같이 MAP(Maximum A posteriori) 추정 문제로 정의할 수 있다

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \Phi(A(T_{\theta}()), B()) + \beta R(\theta) \quad (1)$$

$\Phi(A(), B())$  는 두 영상의 유사성을 나타내는 유사지수,  $\beta$  는 정규화 인수,  $R(\theta)$  는 벌칙 함수이다.

식 (1)에서 볼 수 있는 바와 같이, 영상 등록은 단지 유사지수를 최대화 하는 좌표변환을 찾는 것이 아니라 유사지수와 벌칙 함수가 결합된 목적함수를 최대화하는 것으로 얻어지고 정규화 인수는 어떤 쪽에 좀 더 많은 비중을 둘 것인가를 결정하는 역할을 하게 된다. 대표적인 벌칙 함수들로는 지나치게 공간상에서 변화가 심한 좌표변환을 회피하기 위한 roughness 벌칙, 큰 에너지가 필요한 변환을 회피하는 bending 에너지 등이 있다.

### 1 영상 모델

이론적으로 연속적인 모델로 나타난 식 (1) 과는 달리, 실제의 영상은 유한한 개수의 uniform grid 상의 샘플들만으로 이루어진 경우가 대부분이다 따라서 최적화를 수행하는 도중에, 좌표 변환된 영상을 구하기 위해서는 내삽(interpolation) 이 필수적이다. 이를 구현하기 위하여 본 논문에서는 B-spline 함수를 이용하여 영상의 연속적인 모델을 건설하는 방법을 채택하였다 이러한 방법으로 연속적인 영상 모델을 건설하면 내삽을 효과적으로 구현할 수 있을 뿐 만 아니라, 목적 함수의 gradient 와 Hessian 의 계산식을 얻을 수 있어서, 이 값들을 최적화시

에 유용하게 사용할 수 있다 [10][13]

## 2 Cubic B-spline 함수를 이용한 좌표변환 모델

비강체 영상 등록을 위한 좌표변환 모델은 널리 연구 되어 왔다 대부분의 경우, 좌표 변환 모델들은 기저 함수들을 이용하여 나타내어지게 되고, 최적화시에 이 기저 함수들에 곱해지는 계수들의 값을 변경하여 목적 함수가 최대가 되는 계수들을 찾는 것이다. 기저 함수들은 TPS (Thin Plate Spline) 함수 [14], 정현파 함수[15] 등의 무한·반침(infinite support) 기저 함수와 B-spline 함수 [10], Radial 함수 [11] 등의 유한 반침 (finite support) 기저 함수로 나눌 수 있다. 본 논문에서는 국소적인 변형을 잘 나타낼 수 있도록 하고 빠른 최적화를 위하여 유한 반침 기저 함수인 B-spline 함수를 이용한 식 (2), (3) 과 같은 변형 모델을 사용한다.

$$T_{\theta}(x, y, z) = (x + f_{\theta_x}(x, y, z), y + g_{\theta_y}(x, y, z), x + h_{\theta_z}(x, y, z)) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_{\theta_x}(x, y, z) &= \sum_{ijk \in K_x} \theta_{ijk}^x \beta^3\left(\frac{x}{T_x} - i\right) \beta^3\left(\frac{y}{T_y} - j\right) \beta^3\left(\frac{z}{T_z} - k\right), \\ g_{\theta_y}(x, y, z) &= \sum_{ijk \in K_y} \theta_{ijk}^y \beta^3\left(\frac{x}{T_x} - i\right) \beta^3\left(\frac{y}{T_y} - j\right) \beta^3\left(\frac{z}{T_z} - k\right), \\ h_{\theta_z}(x, y, z) &= \sum_{ijk \in K_z} \theta_{ijk}^z \beta^3\left(\frac{x}{T_x} - i\right) \beta^3\left(\frac{y}{T_y} - j\right) \beta^3\left(\frac{z}{T_z} - k\right) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,  $K_x, K_y, K_z$  는 기저 함수들의 위치들의 집합,  $\theta^x, \theta^y, \theta^z$  는 기저 함수들의 계수,  $T_x, T_y, T_z$  는 기저 함수의 팽창 계수.

식 (3)에서 B-spline 함수들은 균일하게 배치되어 있고 한 점에서의 한 축 방향으로의 좌표변환 값은  $x, y, z$ , 각 방향의 4 개의 B-spline 함수들의 합으로 이루어진다 따라서 64개의 계수들에 의해서 한 점에서의 한 축 방향의 좌표변환 값이 결정된다 이 모델에서 팽창 계수가 증가하면 함수의 배치 간격이 넓어지게 되어 전체 계수의 숫자가 줄어들게 되고 반대의 경우에는 전체 계수의 숫자가 늘어나게 된다. 일반적으로 팽창 계수가 증가하면 반침 영역이 증가하여 보다 전체적인 변형을 나타내기 위해 적합하고, 반대로 감소하면 보다 국소적인 변형을 나타내기 위해 적합하게 된다 식 (2), (3) 과 같은 좌표

변환 모델을 사용하는 비강체 영상 등록 은 목적 함수를 최대화 하는 계수  $\theta = \{\theta^x, \theta^y, \theta^z\}$  를 최적화 과정을 통하여 발견함으로써 수행된다

## 3. 기하 변환의 가역성과 벌칙 함수

물리적으로 의미가 있는 좌표변환을 얻기 위한 가장 중요한 조건중의 하나가 변환의 가역성이다 Inverse function theorem [16] 에 의해서 변환의 가역성은 변환 함수의 Jacobian 행렬식이 0이 아니면 항상 보장이 되게 된다. 또한, 만약 공간상에서의 어떤 한 점에서의 변환의 Jacobian 행렬식이 0 보다 크다면, 행렬식의 연속성에 의하여 모든 점에서의 Jacobian 행렬식이 0 보다 커야지만 모든 점에서 Jacobian 행렬식이 0이 아니라는 조건을 만족할 수 있게 된다 따라서 일반적으로 가역적인 변환을 얻기 위해서는 그 변환의 Jacobian 행렬식이 모든 점에서 0보다 크다는 조건을 만족하여야 한다

식 (2), (3) 의 좌표변환 모델의 Jacobian 행렬은 다음 식 (4) 와 같이 정의 된다<sup>2)</sup>

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial x} & 1 + \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial y} & 1 + \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4)$$

선행 연구에서는 식 (4)의 Jacobian 행렬에서의 모든 gradient component 들의 절대 값이 1/3 보다 작으면 Jacobian 행렬식 의 크기는 항상 0 보다 크거나 같다는 충분조건을 증명하고, 이를 이용하여 모든 gradient 값들을 1/3 로 제한하여 항상 가역인 좌표변환을 얻는 방법을 제안하였다 [11] 또한, gradient를 1/3 로 제한하기 위하여 기저 함수에 곱해지는 계수의 절대 값들을 제한하였다.

이 방법은 서론에서 설명한 바와 같이 두 가지 문제점들을 가지고 있다 그 중 하나인 gradient 크기 제한과 Jacobian 행렬식 크기 제한사이의 관계 식이 없다는 문제점을 해결하기 위하여, 다음 명제 1을 증명한다

2) 수식을 단순화하기 위해 나타내지 않았으나 식 (3) 으로부터 자명하듯이 Jacobian 은  $\theta$  의 함수이다

명제 1. Jacobian 행렬을 구성하는 gradient 의 크기가 다음과 같이 제한되어 있으면,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \right| \leq k_f, \quad \left| \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \right| \leq k_f, \quad \left| \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right| \leq k_f, \\ \left| \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} \right| \leq k_g, \quad \left| \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} \right| \leq k_g, \quad \left| \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} \right| \leq k_g, \\ \left| \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} \right| \leq k_h, \quad \left| \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} \right| \leq k_h, \quad \left| \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z} \right| \leq k_h, \end{aligned}$$

Jacobian 행렬식의 크기는 다음과 같이 제한된다

$$\begin{aligned} 1 - (k_f + k_g + k_h) \leq \det J(x,y,z) \leq (1+k_f)(1+k_g)(1+k_h) \\ + (1+k_f)k_g k_h + (1+k_g)k_f k_h + (1+k_h)k_f k_g \end{aligned} \quad (5)$$

증명 부록 1 참조.

상기의 명제 1에서 모든 gradient 항들의 크기가 1/3 이면 Jacobian 행렬식은 0 보다 크게 된다. 선행 연구에서 증명한 조건은 명제 1의 최소 Jacobian 행렬식에 관한 식의 특별한 경우임을 알 수 있다.

#### 4 인수 공간에서의 가역성 조건

본 연구에서는 명제 1을 이용하여 설계된 gradient 크기 제한을 만족하는 좌표변환을 발견하기 위하여 constrained 최적화 방법을 사용한다 이 방법은 gradient 크기 제한을 만족하는 인수들의 집합에 속하는 인수 중에서 유사지수를 최대화하는 좌표변환을 최적화를 통해 발견하는 것으로 이를 위하여서 gradient 크기 제한 조건을 인수 공간에서의 제한 조건으로 나타내어 주어야 할 필요가 있다 선행 연구에서 사용한 방법은 이러한 인수 집합을 크기가 제한된 인수들의 집합으로 정의하였으므로 주어진 gradient 크기 제한을 만족하더라도 크기가 큰 변환들은 추정되지 못한다는 단점을 가지고 있다 [11]

상기한 문제점을 해결하기 위하여 본 연구에서는 다음의 명제 2에서 규정한 것처럼 두 인접한 계수의 차이가 많이 제한된 인수들은 gradient 크기도 제한된다는 것을 보이고 이러한 인수들 중에서 유사지수를 최대화하는 인수를 발견한다.

명제 2 식 (3) 의 변환 모델에서 인접한 계수들 사이에 다음 조건 (6) 이 성립하면,

$$\left| \theta_{i+1,j,k}^x - \theta_{i,j,k}^x \right| \leq b, \forall yk \in K_x \quad (6)$$

x 방향의 gradient 는 다음 과 같은 조건을 만족한다.

$$\left| \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \right| \leq \frac{b}{T_x}$$

다른 방향, 즉 y,z 방향의 gradient 도 j,k 방향으로 이웃한 계수들의 차이가 제한되면 같은 방식으로 제한된다

증명. 부록 2 참조.

명제 2 에서의 식 (6)을 만족하는 인수 집합은 half space 들의 교집합으로 이루어지는 convex 집합이고 따라서 직교 projection 이 존재 한다 [16].

#### 5. Constrained 최적화 방법

앞 절에서 도출한 인수 공간에서의 가역성 조건을 만족시키면서 최적화를 수행하는 방법에는 여러 가지가 있을 수 있다 [16] 본 논문에서는, 수렴성이 보장된 gradient projection 방법을 사용하여 최적화를 수행한다 Gradient projection 방법은 목적함수의 gradient 값을 이용하여 constraint 집합을 고려하지 않은 다음 단계를 계산하고 이 값을 convex constraint 집합에 직교 projection 한 값을 다음 단계의 계수로 사용하는 것으로서 다음 식 (7) 과 같이 정의 된다

$$\theta^{n+1} = P_K(\theta^n - \alpha \nabla_{\theta} \Phi(A,B;\theta^n)) \quad (7)$$

여기서  $P_K$  는 constraint 집합 K 상으로의 직교 projection,  $\alpha$  는 pre-conditioning 상수이다

식 (7) 과 같은 알고리즘을 사용하기 위하여서는 식 (6) 으로 정의되는 집합 위로 직교 projection을 구하여야 한다. 이러한 projection 은 잘 정의되지만 구하는 방법은 쉽지 않은 경우가 많다. 본 논문에서는 이 집합이 직교 projection을 계산하기 용이한 half space 들의 교집합이라는 점을 이용하여 cyclic projection 알고리즘 [17]을 사용하여 식 (6)으로 정의되는 집합으로의 projection을 계산한다.

### III. 실험 결과

본 논문에서 제안한 알고리즘의 성능을 기존의 방법들과 비교 평가하기 위하여 제안된 constrained

최적화 방법을 이용한 알고리즘과 기존의 별칙 함수를 사용한 방법들을 들숨 (inhale) 과 날숨 (exhale) 시의 폐 CT 영상을 등록 하는 문제에 적용하였다.

그림 1 은 폐암 환자의 방사선 치료 계획을 위해 촬영된 들숨 (inhale) 과 날숨 (exhale) 시의 폐 CT 영상의 한 단면이다. 들숨 시는 공기의 흡입으로 폐가 팽창하여 있고 날숨 시에는 반대의 현상을 가지고 있으며 그 변형은 비강체 형태로 이루어지고 있음을 알 수 있다. 비강체 영상 등록을 통하여 두 영상의 변형을 일으킨 좌표변환을 추정할 수 있으면, 이를 통하여 호흡 사이클에서의 중간 단계에서의 변형들을 선형 내삽을 통하여 추정할 수 있고 이를 이용하여 호흡 사이클에서의 폐의 동적인 움직임 모델을 만들 수 있다. 이렇게 하여 얻어진 동적인 모델을 이용하여 호흡 중 종양의 위치를 고려하여 방사선 조사를 계획하면 정상 세포 (normal tissue) 의 피폭을 줄이고 종양에만 방사선 조사를 집중함으로써 보다 나은 방사선 치료를 할 수 있는 장점을 가지게 된다.

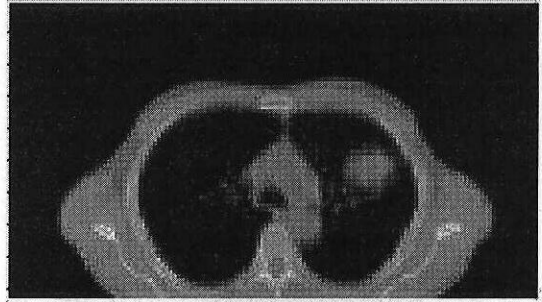
1. 영상 데이터

8 명의 환자들의 들숨과 날숨시의 영상을 GE/CT I 스캐너를 사용하여 얻어 내었다. 영상의 크기는 512x512x512 이고 voxel 간격은 0.94x0.94x5 mm 이다. 시뮬레이션과 실험 시 보다 빠른 연산을 위하여 영상 데이터를 1/4 로 down 샘플링 하였다.

같은 환자의 들숨과 날숨시의 영상 데이터는 동일한 스캐너를 사용하여 아주 짧은 시간 차이만 있는 상태에서 얻어졌으므로 호흡에 의한 변형 이외에는 다른 차이가 없는 것으로 생각할 수 있다. 이러한 조건을 만족하는 두 영상의 유사지수는 MSE 가 효과적이므로, 본 논문에서는 MSE를 유사지수로 사용하였다.



(a) 들숨



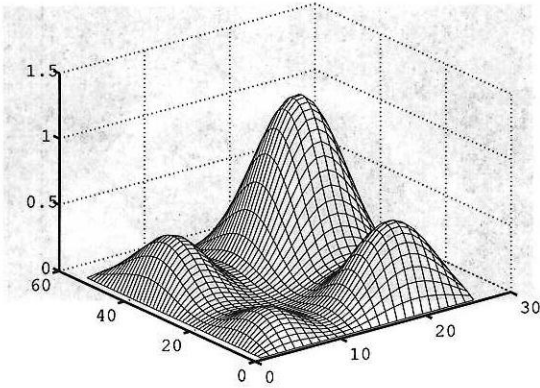
(b) 날숨

그림 1. 들숨과 날숨시의 CT 영상의 한 슬라이스 (a) 들숨 (Inhale) (b) 날숨(exhale)

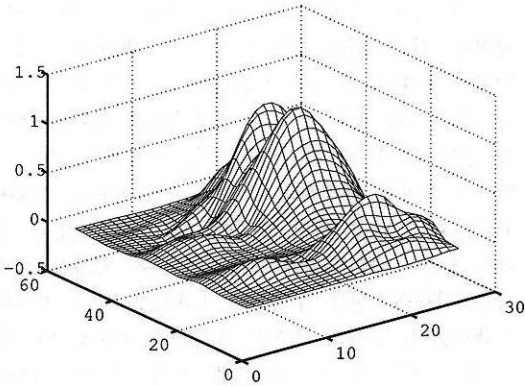
2. 합성된 변형을 이용한 시뮬레이션

영상 등록 기법의 성능을 평가하기 위하여서는 정확한 좌표변환을 알아야 추정된 변환과 원래의 정확한 변환의 오차를 계산하여 그 성능을 평가할 수 있다. 일반적으로는, 두 영상사이의 변환의 정확한 값을 알 수가 없으므로 성능 평가에 난점이 있다. 이 문제를 해결하기 위하여, 인위적으로 합성된 좌표변환을 날숨 시의 영상에 인가하여 변형된 영상을 만들고 이 영상과 변형되지 않은 영상을 등록 하는 시뮬레이션을 수행하여 1차적인 성능 평가를 수행하였다. 실제의 변환은 B-spline 함수로 나타낼 수 없는 것일 수도 있으므로, 보다 사실에 가까운 시뮬레이션을 위하여 인위적인 좌표변환은 네 가지의 서로 다른 주파수를 가지는 3 차원 정현파를 더 하여서 합성하였다.

그림 2 (a) 는 합성된 x-축 좌표변환의 한 단면을 나타낸 것이고 그림 2 (b) 는 식 (3) 의 좌표변환 모델과 제안한 constrained 최적화 영상 등록 을 이용하여 이를 추정한 결과이다. 이 시뮬레이션을 위하여서는 모든 gradient component 들의 절대 값을 1/3 로 제한하였다. 좌표변환 모델은 x, y, z 방향으로 30 x 16 x 8 개의 3 차의 B-spline 함수를 균일한 간격으로 배치하여 건설하였다. 이러한 변환이 변환 되는 세 축에 대해서 독립적으로 존재하므로 추정하여야 하는 전체 변수는 모두 11,520 개이다.



(a) 정현파로 합성한 좌표변환



(b) B-spline 모델로 추정된 좌표변환

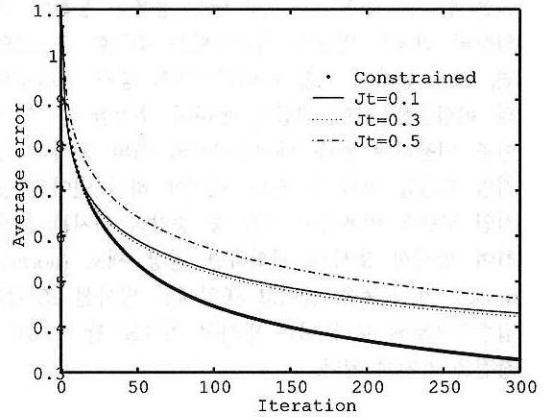
그림 2. 합성한 좌표변환을 인가하여 변형된 CT 영상과 원 CT 영상을 등록하여 추정한 좌표변환

그림 2의 시뮬레이션 결과에서 볼 수 있듯이 동일한 밝기 값을 가지는 영상 영역에 인가된 변환은 추정해 낼 수가 없으므로 배경 영역에 인가된 변환부분에는 추정 오차가 크게 된다.

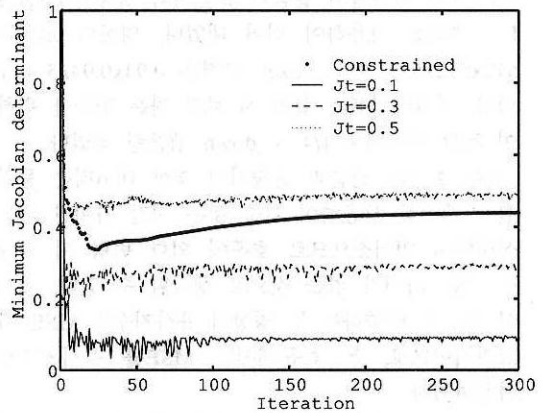
상기의 시뮬레이션 결과는 3차의 B-spline 함수들을 2 배로 팽창시킨 함수들을 이용한 좌표변환 모델을 사용하여 얻어 낸 것이다. 그림에서 볼 수 있듯이 합성된 좌표변환이 매우 부드러운 형태를 가지고 있어서 이 경우에는 넓은 받침을 가지는 B-spline 함수가 효과적이었다. 그러나 실제 환자의 경우 그 좌표변환이 얼마나 부드러운 형태를 가지고 있는지 알려져 있지 않으므로 많은 실험을 통하여 B-spline 함수의 차수와 팽창 계수를 결정해야 할 필요가 있다.

그림 3 은 최적화 진행에 따른 추정오차의 변화와 추정된 변환의 Jacobian 행렬식의 최소 값을 보

여준다.  $Jt$  로 표시된 결과는 행렬식의 값이  $Jt$  보다 작은 변환을 penalize 하는 기존 방법을 사용하였을 때의 결과이다. 합성된 변환의 gradient 는 일부는 1/3 보다 작고 일부는 1/3 보다 크게 만들었다. 실제 상황에서는 변환의 gradient 값을 알지 못하기 때문에 보다 실제 상황에 가까운 시뮬레이션을 위하여 제안된 알고리즘을 사용할 때의 gradient 크기 제한을 1/3 로 고정하였다.



(a) 추정오차



(b) Jacobian 행렬식의 최소화

그림 3. 최적화 진행에 따른 추정 오차 및 최소 Jacobian 행렬식의 변화

그림 3 (a)에서 볼 수 있는 바와 같이, 제안된 알고리즘이 기존의 벌칙 함수를 이용한 방법보다 좋은 성능을 보였다. 비록 정확한 gradient 값의 bound 들을 알지 못했더라도 전체적으로 부드러운 좌표변환을 얻었고 그 오차도 기존 방법보다 훨씬 작았다. 작은 Jacobian 행렬식을 penalize 하는 벌칙 함수를 사용한 경우에는 비록 Jacobian 행렬식은 규정한 제

한 값에 근접되게 얻을 수 있었으나 전체적으로 큰 gradient 값들을 가지는 거친 좌표변환을 얻게 되었다. 이는 큰 gradient 값을 가지더라도 작은 Jacobian 행렬식을 가질 수 있기 때문인 것으로 생각된다. 표 1은 시뮬레이션에 사용된 합성된 좌표변환과 추정된 좌표변환들의 특성을 보여 준다

그림 3 (b) 는 최적화 진행에 따른 최소 Jacobian 행렬식의 값들을 보여준다. 제안된 방법과 기존의 벌칙 함수를 이용한 방법 모두 Jacobian 행렬식의 최소 값을 일정이상 유지하도록 하고 있음을 알 수 있다. 그러나 제안된 방법과 는 달리 벌칙 함수를 사용한 경우에는 최적화 수행 시에 수동으로 정규화 인수를 여러 번 변경하여야 하는 번거로운 문제가 벌어졌다.

### 3 실험 결과

제안된 constrained 최적화 기법을 사용하여 8명의 환자들로부터 얻은 들숨(inhale) 과 날숨(exhale) 시의 3차원 폐 CT 영상을 gradient 크기를 1/3 로 제한하면서 등록을 수행하였다. 표 2 는 이 실험의 결과를 정리한 것이다. 이 표에서 볼 수 있듯이 영상 등록을 통하여 PT01부터 PT08 까지 8명의 환자들의 들숨과 날숨 시의 두 영상의 상관계수를 매우 크게 만들 수 있었다. 다시 말하자면, 등록된 두 영상은 매우 유사함을 알 수 있다 물론, 실제 변환을 알지 못하므로, 이 결과만으로는 정확도를 평가할 수는 없으나, 유사지수가 크면서도 부드러운 변환이므로 사실에 가까우리라 추측할 수 있다 [1][14]

제안된 알고리즘은 constrained 최적화 기법을 사용하므로 벌칙 함수를 사용하지 않기 때문에 정규화 인수의 튜닝이 필요하지 않은 장점을 가지고 있다. 실제로 기존 방법을 적용시킨 실험 시, 다른 환자의 영상을 등록하기 위하여서는 다른 인수를 사용하여야 했고 그 조절은 수동으로 이루어져야 하는 번거로움이 있었다

흥미로운 고찰은 이론적인 Jacobian 행렬식의 한계 값보다 실제 추정된 Jacobian 행렬식은 훨씬 작은 체적 변화를 나타내고 있다는 것이다 최소 Jacobian 행렬식은 0.18에서 0.44 정도였고 최대 Jacobian 행렬식은 2.1에서 2.5 정도였으므로 모든 환자들의 결과 중 최대의 부피수축이 생긴 부분은 약 0.18 배로 부피가 줄었고 최대 팽창은 약 2.5배였다 .

표 2에서 PT01 데이터의 상관계수가 가장 큰 이

유는, 최적화시 스텝 크기가 PT01 의 경우에 맞추어서 튜닝 되어 있었다는 사실에서 기인한다. 따라서 수동 튜닝 스텝이 없는 최적화 기법의 개발이 요구 된다 할 수 있다 이를 위하여 optimization transfer 최적화 기법 [18] 이나 line search를 사용하는 convex 프로그래밍 등의 기법을 적용하는 연구가 필요하리라 생각된다.

표 2 폐 CT 영상 등록 결과

	Correlation (등록이전)	Correlation (등록이후)	min det J	max det J
PT01	0.701	0.981	0.332	2.323
PT02	0.678	0.964	0.277	2.477
PT03	0.852	0.978	0.444	2.089
PT04	0.722	0.970	0.295	2.176
PT05	0.888	0.979	0.337	2.269
PT06	0.755	0.935	0.180	2.395
PT07	0.956	0.970	0.428	2.103
PT08	0.930	0.963	0.413	2.023

## IV. 토 론

본 연구에서는 좌표변환의 gradient 들의 절대 값을 제한하여 Jacobian 행렬식을 제한하는 알고리즘을 구현하여 변환의 가역성을 보장하였다. 뿐만 아니라, gradient 크기 제한 값과 Jacobian 행렬식 사이의 관계를 Kuhn-Tucker 조건 [16]을 통하여 발견하였다 또한, 기존의 방법과는 달리 gradient 크기를 제한하기 위한 인수 공간에서의 constraint 집합을 인접한 계수들 사이의 차이를 제한하는 것으로 규정하였으므로 변환의 절대 값은 크더라도 그 gradient 값은 작은 변환들을 추정해 낼 수 있다. 제안된 알고리즘은 grid 점 뿐 만 아니라 모든 공간 상에서 보장된 가역성을 가진다는 장점과 수동의 정규화 튜닝을 없앨 수 있다는 장점도 가지고 있다 작은 Jacobian 행렬식을 penalize 하는 벌칙 함수



를 사용하는 기존 방법은 gradient 값이 큰 변환을 발생시키는 문제점을 가지고 있었다. 이는 gradient 값들이 크더라도 Jacobian 행렬식 값은 작을 수 있다는 점에서 문제를 발생시키는 것으로 생각된다. 이를 막기 위하여 roughness 벌칙 함수를 추가하는 방법을 사용할 수도 있으나, 이 경우 벌칙 함수가 두 개가 되고 튜닝 하여야 하는 정규화 인수도 두 개로 증가하는 등 더욱 복잡하게 되는 단점이 있다.

실험 및 시뮬레이션 결과에서 Jacobian 행렬식의 가능한 최소 값보다 실제의 최소 Jacobian 행렬식은 더 큰 값을 가지고 있었음을 볼 수 있었다 이는 모든 gradient 값들이 제한 값을 가질 때만 Jacobian 행렬식이 가능한 최소 혹은 최대 값을 가지기 때문이다. 따라서 현실적으로는 gradient 크기 제한을 좀 더 느슨하게 만들 수도 있을 것으로 생각된다

본 논문에서는 최적화를 수행하기 위하여 gradient projection 방법을 사용하였다. 이 방법은 보장된 수렴 특성을 가지고 있으나 직교 projection을 계산하기 위한 추가 계산이 필요하여 전체적으로 많은 연산을 필요하게 만드는 단점이 있다. 이를 해결하기 위한 최적화 방법의 연구가 필요한 것으로 생각된다. 예를 들어, constraint 집합을 벗어나는 인수들을 아주 큰 값으로 penalize 하는 interior point 방법 [16] 등을 고려해 볼 수 있을 것이다 또한 pre-conditioner의 튜닝 과정을 없애기 위해서 optimization transfer 방법 [18] 등을 사용하여 최적화 기법을 설계하는 연구도 필요할 것으로 생각된다

추정하는 좌표변환의 gradient 값을 제한하는 본 논문의 연구는 매우 유용하게 다른 정보들과 결합되어 사용될 수 있으리라 생각된다. 예를 들어, 물리적인 변환의 특성이 알려진다면, 그러한 정보들이 쉽게 본 알고리즘과 결합될 수 있다. 특히 물리적으로 일반적인 환자들의 부피 팽창과 수축의 크기 한계가 알려지면, 그러한 조건들을 만족하는 gradient 크기의 제한을 명제 1을 이용하여 구하고 이를 만족하는 인수를 constrained 최적화 기법을 통하여 구하면 보다 더 정확하게 변환을 추정하여 낼 수 있을 것으로 생각된다. 또한, 좌표변환의 x, y, z 방향의 최대 gradient가 방향별로 다르다면, 이를 고려한 제한 값을 설계하여 적용할 수 있다. 들숨과 날숨시의 영상 등록에서는 횡경막의 상승으로 인하여 z 축 방향의 변형이 보다 크게 되는 정보를 이용할 수도 있으리라 사료된다

제안된 알고리즘이 시뮬레이션과 실험을 통하여 기존 방법보다 나은 성능을 보였으나, 영상 등록의 특성은 어떤 영상을 사용하느냐에 따라 매우 달라질 수 있으므로 더욱 많은 추가 검증이 필요하리라 생각된다. 특히 비강체 영상 등록의 경우에는 실제의 정확한 좌표변환이 알려져 있지 않으므로 그 평가에 더욱 많은 연구가 필요하다 이러한 연구들은 생체 역학적인 사실을 고려하여 실제 변환을 추정하는 방법들을 포함하여야 할 것으로 생각된다

## V 결론

본 본문에서는 비강체 좌표변환의 gradient의 절대 값을 제한하여 Jacobian 행렬식이 0보다 큰, 즉 가역인 변환을 얻을 수 있는 새로운 비강체 영상 등록 방법을 제안하였다. 각 gradient의 크기 한계와 Jacobian 행렬식의 크기 한계 사이의 관계식을 유도하여 gradient 크기 한계와 최대 부피 수축, 팽창과의 관계를 밝혔다 또한 gradient 크기 한계를 만족하는 인수 집합을 이웃한 계수들의 차의 절대 값이 일정 값보다 작은 집합으로 정의하여 기존의 방법보다 탐색 공간 (search space)을 확장하였다. 설계된 convex 인수 집합에 속하는 인수들 중에서 유사지수를 최대로 만드는 인수는 gradient projection의 최적화로 발견하였다. 들숨과 날숨시의 CT 영상을 이용한 실험과 시뮬레이션을 통하여 기존 방법에 비하여 제안된 알고리즘이 보다 정확하게 변환을 추정하는 것을 보였다 제안된 알고리즘은 항상 물리적으로 가능한 변환을 추정해 내므로 효과적인 비강체 영상 등록 기법으로 사용될 수 있으리라 생각된다.

## 부록 1 명제 1의 증명

Jacobian 행렬과 그 행렬식이 다음과 같이 주어졌다고 가정하자.

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & 1+x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & 1+x_9 \end{bmatrix},$$

$$\det(J(x)) = (1+x_5)(1+x_9) + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - (1+x_1)x_6x_8 - (1+x_1)x_6x_8 - (1+x_1)x_6x_8. \tag{8}$$

만약  $|x_i| \leq k, i=1 \dots 9$  의 조건이 만족되면, Jacobian 행렬식을 최소로 하는  $x_i^*$  는 Kuhn-Tucker 조건에 의하여 다음과 같은 조건식들을 만족시켜야 한다

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det(J(x^*))}{\partial x_i} + \lambda_{2i-1} - \lambda_{2i} &= 0 \\ \lambda_{2i-1}(x_i^* - k_i) &= 0, \lambda_{2i}(x_i^* + k_i) = 0, i=1 \dots 9 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (8)을 이용하여  $i=1$ 일 때의 조건식들을 계산해보면  $(1+x_5^*)(1+x_9^*) - x_6^*x_8^* \geq 0$  이면  $\lambda_2 \geq \lambda_4 \geq 0$  이고 따라서  $x_1^* = -k_1$  이 되어야 함을 알 수 있다 비슷한 방법을 적용하면  $x_5^* = -k_5, x_9^* = -k_9$  이 된다 만약, gradient 들이 각 방향별로 같은 크기 제한을 가지고 있으면, 즉  $|k_i| \leq k_f, i=1,2,3$  이고  $|k_i| \leq k_g, i=4,5,6$ ,  $|k_i| \leq k_h, i=7,8,9$  이면, 식 (8)의 행렬식으로부터 최소 Jacobian 행렬식이 식 (10)과 같은 값을 가지고 있음은 자명하다. 또한 행렬식이 최소 값을 가질 때의 gradient 값들은 적절한 부호를 가지는 한계 값들임을 알 수 있다

$$\min \det(J(x)) = 1 - (k_f + k_g + k_h) \quad (10)$$

비슷한 방법을 사용하여 보면 최대 Jacobian 행렬식도 gradient 값들이 적절한 부호의 한계 값을 가지고 있을 때 발생하고 그 값은 다음 식으로 표현됨을 알 수 있다

$$\begin{aligned} \max \det(J(x)) &= (1+k_f)(1+k_g)(1+k_h) + (1+k_h)k_fk_g \\ &+ (1+k_f)k_gk_h + (1+k_g)k_fk_h \end{aligned} \quad (11)$$

식 (10) 과 식 (11)이 명제 1을 증명한다.

### 부록 2 명제 2의 증명

먼저 다음 식 (12) 와 같이 B-spline 함수로 표현되는 1차원 신호의 미분 값을 고려하자.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \sum_i \theta_i \frac{\partial \beta^3(\frac{x}{T} - i)}{\partial x} \quad (12)$$

식 (12)에서, 모든  $x$  는  $x$  보다 작은 가장 가까운 B-spline 함수의 위치  $x^*$  와 그로부터  $x$  까지 거리  $w$  를 이용해서  $x = x^* + w$  로 나타낼 수 있다 따라서  $x$  에 영향을 미치는 4 개의 3차 B-spline 함수의 계수를 실수축 상에서 왼쪽부터  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  라 하면, 3차 B-spline 함수의 정의로부터 식 (12) 는 다음 식 (13) 과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x} + w)}{\partial x} &= \frac{1}{T} \left[ -\frac{\theta_0}{2} \left(1 - \frac{w}{T}\right)^2 + \theta_1 \left(-\frac{2w}{T} + \frac{3w^2}{2T^2}\right) \right. \\ &\left. + \theta_2 \left(2\left(1 - \frac{w}{T}\right) - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{w}{T}\right)^2\right) + \theta_3 \frac{w^2}{2T^2} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

만약  $|\theta_i - \theta_{i-1}| \leq b, i=1,2,3$  이면 부록 1에서의 증명방법과 유사하게 Kuhn-Tucker 조건을 사용하여 식 (13) 의 절대 값이  $b/T$  보다 작거나 같음을 보일 수 있다 이 결과의 3차원으로의 확장은 다음과 같이 가능하다

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right| &= \left| \sum_{ijk \in K_x} \theta_{ijk}^x \frac{\partial \beta^3(\frac{x}{T_x} - i)}{\partial x} \beta^3(\frac{y}{T_y} - j) \beta^3(\frac{z}{T_z} - k) \right| \\ &\leq \sum_{ijk \in K_x} \left| \theta_{ijk}^x \beta^3(x-i) \beta^3(y-j) \beta^3(z-k) \right| \\ &\leq \frac{b}{T_x} \sum_{jk} \beta^3(\frac{y}{T_y} - j) \beta^3(\frac{z}{T_z} - k) \\ &= \frac{b}{T_x} \end{aligned} \quad (14)$$

유사한 방법으로  $y, z$  방향의 gradient 들도 각 방향으로 이웃한 두 계수의 차이가 제한되면 그 크기가 제한이 됨을 보일 수 있다

### 참 고 문 헌

[1] J M Fitzpatrick, D L G Hill, and C R Maurer,

- "Image Registration," in *Handbook of Medical Imaging, Volume 2 Medical Image Processing and Analysis*, M Sonka, J. Michael Fitzpatrick, Ed., pp. 477-513 SPICE, Bellingham, 2000
- [2] M J Murphy, "An automatic six -degree -of -freedom image registration algorithm for image-guided frameless stereotactic radiosurgery," *Med Phys.*, vol 24, on 6, pp 857, June 1997.
- [3] J Kim, J A Fessler, K L Lam, J M Balter, and R K Ten Haken, "A feasibility study of mutual information based set-up error estimator for radiotherapy, " *Med. Phys*, vol 28, no 12, pp 2391-2593, 2001.
- [4] K K Brock, D L McShan, R K Ten Haken, S J Hollister, L A Dawson, and J M Balter, "Inclusion of organ deformation in dose calculation," *Med. Phys.*, vol 30, no 3, pp 290-95, 2003
- [5] J Weese, G P Penny, P Desmedt, T M Buzug, D L G Hill, and D J Hawkes, "Voxel-based 2-D/3-D registration of fluoroscopy images and CT scans for image-guided surgery," *IEEE trans On Info. Tech. in Biomedicine*, vol 1 no 4, pp 284-293, 1997.
- [6] C R Meyer, J L Boes, B Kim, P H Bland, et al , "Demonstration of accuracy and clinical versatility of mutual information for automatic multimodality image fusion using affine and thin plate spline warped geometric deformations," *Med. Im. Anal*, vol 1, no 3, pp 195-206, 1997.
- [7] J Kim and J.A. Fessler, "Image registration using robust correlation," in *Proc. IEEE Intl. Symp. Biomedical Imaging*, 2002, pp 353-6
- [8] T Rohfling, C R Maurer Jr, D A Bluemke and M A Jacobs , "Volume-preserving nonrigid registration of MR breast images using free-form deformation with an incompressibility constraint," *IEEE Tr .Med Im*, vol 22, no. 6, pp 730-741, June 2003
- [9] D Rueckert, L I Sonoda, C Hayes, D L G Hill, M O Leach, and D J Hawkes, "Nonrigid registration using free-form deformations: Applications to breast NR images," *IEEE Tr .Med. Im.*, vol. 18, no. 8, pp 712-20, Aug 1999.
- [10] J Kybic, P Thvenaz, A Nirkko, and M Unser, "Unwarping of unidirectionally distorted EPI images," *IEEE Tr. Med IM*, vol 19, no 2, Feb.2000
- [11] G K Rhode, A Aldroubi, and B M Dewant, "The adaptive bases algorithm for intensity-based nonrigid image registration, " *IEEE Tr. Med. IM.*, vol 22, no 11, pp 1470-79 Nov. 2003.
- [12] A W Naylor and G R Sell, *Linear operator theory in engineering and science*, Springer, New York, 2000.
- [13] M Unser, "Splines a perfect fit for signal and image processing." *IEEE Signal processing magazine*, pp 22-38. Nov 1999.
- [14] F L Bookstein, "Principal warps. thin-plate splines and the decomposition of deformations," *IEEE Tr Patt Anal. Mach. Int.*, vol. 11, no 6, pp 567-87, June 1989.
- [15] G E Christensen and H J Johnson, "Consistent image registration, " *IEEE Tr. Med. IM.*, vol 20, no. 7, pp.568-82 July 2001
- [16] D G Luenberger, *Optimization by vector space methods*, Wiley, New York, 1969.
- [17] F Deutch and H Hundal, "The rate of convergence of Dykstra's cyclic projections algorithm the polyhedral case, " *Numer. Funct. Anal and Optimiz*, vol 15, pp.537-65 1994.
- [18] A Booker, J E Dennis, P Frank, D Serafini, V Torczon, and M Trosset, "A rigorous framework for optimization of expensive functions by surrogates , " *Structural Optimization*, vol. 17, bo 1, pp 1-13, Feb 1999.

김 정 태 (Jeongtae Kim)

정회원



1989년 2월 : 서울대학교 제어

계측공학과 학사

1991년 2월 : 서울대학교 제어

계측공학과 공학석사

1991년 2월-1998년 8월:

삼성전자 디지털 미디어 연구소

책임연구원

2003년 12월: The University of Michigan, Ann Arbor, Ph.D

2004년 3월 - 현재: 이화여자대학교 정보통신학과 전임강사

<관심분야> 통계적 신호처리, 추정이론, 의료영상신호처리