

국소 최적성과 순차 기준을 바탕으로 한 검파 기법: 1. 문턱값 분석

준회원 최 상 원*, 오 중 호*, 권 형 문*, 정회원 윤 석 호**, 중신회원 배 진 수***, 송 익 호*

Detection Schemes Based on Local Optimality and Sequential Criterion: 1. Threshold Analysis

Sang Won Choi*, Jongho Oh*, Hyoungmoon Kwon* *Associate Members*,
Seokho Yoon** *Regular Members* Jinsoo Bae***, Ickho Song* *Lifelong Member*

요 약

이 논문에서는 새로운 약신호 검파 기법을 얻어, 그 기법과 국소 최적 검파 기법을 바탕으로 순차 검파 방식을 이끌어낸다. 먼저, 1부에서는 새로운 약신호 검파 기법을 제안하고, 흥미로운 문턱값 성질을 몇가지 밝히며, 여러 가지 잡음 분포에서 문턱값 보기를 다룬다. 한편, 2부에서는 제안한 순차 검파 방식의 성능을 고정 표본 검파 방식, 순차 확률비 검파 방식, 끝을 자른 순차 확률비 검파 방식의 성능과 견주어 본다.

Key Words : locally optimum detection, sequential detection, sequential probability ratio test(SPRT), truncated sequential probability ratio test(TSPRT).

ABSTRACT

In this paper, a sequential detection scheme is proposed as a combination of a novel weak-signal and a locally optimum(LO) detection schemes. In Part 1, we propose a novel sequential detection scheme for weak signals and show some interesting threshold properties and examples. In Part 2, the performance of the proposed sequential detection scheme is compared with that of the fixed sample size(FSS) test, sequential probability ratio test (SPRT), and truncated sequential probability ratio test(TSPRT).

I. 머리말

국소 최적 검파기는 통계학적 가설 검정에서 쓰는 일반화된 네이만 피어슨 정리를 바탕으로 얻는다 [1]. 국소 최적 검파기는 신호 대 잡음비가 0일 때, 검파력 함수 기울기를 가장 크게 하고 균일 최강 또는 최적 검파기보다 열개가 더 간단하다 이와 같은 특성으로 말미암아 많은 사람들이 국소 최적

검파기를 여러 환경에서 연구하였다[2]-[8].

좀더 구체적으로 살펴보면, [3]에서는 국소 최적 검파 기법에 알맞은 최적 문턱값 결정 방법을 제안하였고, [4]에서는 일반화된 관측 모형에서 국소 최적 검파기를 연구하였다. 한편, [5]에서는 복합신호적 산성 잡음모형에 알맞은 국소 최적 검파기를 제안하고, 접근 성능과 유한 표본 크기 성능을 갖대로 삼아 제안한 검파기를 다른 검파기와 견주었다

* 한국과학기술원 전자전산학과 ({swochi, jh, kwon}@Sejong.kaist.ac.kr, i.song@ieee.org)

** 성균관대학교 정보통신공학부(s.yoon@ieee.org)

*** 세종대학교 전자정보통신공학부(j.bae@ieee.org)

논문번호 : KICS2005-04-181, 접수일자 : 2005년 4월 28일

※ 이 연구는 과학기술부에서 지원하고 한국과학재단이 주관하는 국가지정연구실 사업의 지원을 받은 것입니다

이렇듯, 여러 환경에서 국소 최적 검파 기법을 많이 연구하였지만, 약신호에 알맞은 새로운 검파 기법 자체에 대한 연구는 거의 이루어지지 않았다 이 논문에서는 새로운 약신호 검파 기준을 제안하고 이에 알맞은 검파 기법을 이끌어 낸 뒤 국소 최적 검파 기법과 새로 얻은 약신호 검파 기법을 바탕으로 새로운 순차 검파 방식을 얻는다

II. 관측 모형과 국소 최적 검파 기법

2.1 순차 결정과 관측 모형

순차 결정 문제는 m 차원 실수 공간 \underline{z}_m 을 각각 세 결정 $d_{i,m}$, $i=0,1,2$ 에 해당하는 세 결정 영역 $Z_{i,m}$, $i=0,1,2$ 로 나누는 문제라 할 수 있다 여기서, $d_{i,m}$, $i=0,1$ 은 단계 m 에서 가설 $H_{i,m}$, $i=0,1$ 을 받아들이는 결정이고 $d_{2,m}$ 은 단계 m 에서 결정을 미룬다는 것을 뜻한다

단계 m 에서 순차 결정 문제의 귀무가설 $H_{0,m}$ 과 대립가설 $H_{1,m}$ 을 이산 시간 관측 모형으로 나타내면 아래와 같이 쓸 수 있다

$$\begin{aligned} H_{0,m}: \underline{z}_m &= \underline{v}_m, \\ H_{1,m}: \underline{z}_m &= \theta_1 \underline{s}_m + \underline{v}_m, \quad \theta_1 > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

관측 모형 (1)에서 $\underline{z}_m = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$ 은 관측 벡터이고 θ_1 은 신호 세기이며 $\underline{s}_m = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T$ 은 신호 벡터인데 $|s_i|^2 = 1$, $i=1, 2, \dots, m$ 이다. 순 덧셈꼴 잡음 벡터 $\underline{v}_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$ 은 서로 독립이고 분포가 같은 확률 벡터로 그 결합 확률 밀도 함수는 $f_{\underline{v}_m}$

$(\underline{v}_m) = \prod_{i=1}^m f_{v_i}(v_i)$ 이고 f_{v_i} 는 v_i 의 한계 확률 밀도 함수이고 짝함수라 둔다 여기서, $\underline{v}_m = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T$ 은 m 차원 실수 벡터이다 이 논문에서는 다음과 같이 둔다 첫째, 확률 밀도 함수 f_{v_i} 의 일차 미분 $f_{v_i}'(x) = \frac{df_{v_i}(x)}{dx}$ 는 모든 x 에서 뜻이 있다. 둘째, 피서 정보 $I_0(f_{v_i})$ 는 [9] 유한하다. 곧,

$$I_0(f_{v_i}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{f_{v_i}'(x)}{f_{v_i}(x)} \right\}^2 f_{v_i}(x) dx < \infty \quad (2)$$

이다.

한편, 위 (1)에서 $\theta_1=0$ 일 때, 대립가설은 귀무가설과 같으므로 아래와 같이 쓸 수 있다는 것을 새겨둘 만하다.

$$f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{1,m})|_{\theta_1=0} = f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{0,m}). \quad (3)$$

식 (3)에서, $f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{1,m})$ 과 $f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{0,m})$ 은 각각 대립 가설과(곧, 신호를 보냈을 때) 귀무가설에서(곧, 신호를 보내지 않았을 때) 관측 벡터의 확률 밀도 함수를 뜻한다

2.2 일반화된 네이만 피어슨 정리

국소 최적 검파 기법을 이해하려면 일반화된 네이만 피어슨 정리를 [1] 눈여겨보아야 한다.

정리 1 (일반화된 네이만 피어슨 정리: 실수 함수 $g(\underline{z}_n)$, $\delta(\underline{z}_n)$, $h_1(\underline{z}_n)$, $h_2(\underline{z}_n)$, ..., $h_p(\underline{z}_n)$ 을 n 차원 실수 공간 \underline{z}_n 에서 적분할 수 있다고 하고 \forall_i , $i=1, 2, \dots, p$ 를 아래와 같이 두자

$$\forall_i = \int_{\underline{z}_n} \delta(\underline{z}_n) h_i(\underline{z}_n) d\underline{z}_n. \quad (4)$$

이제, 확률 검정을 (randomized test) 생각하지 않으면, (4)에 보인 제한 조건 p 개를 만족시키는 모든 검정 함수 $\delta(\underline{z}_n)$ 가운데, 상수 $\tau_i \geq 0$, $i=1, 2, \dots, n$ 으로 나타낼 수 있는

$$\delta(\underline{z}_n) = \begin{cases} 1, & g(\underline{z}_n) \geq \sum_{i=1}^p \tau_i h_i(\underline{z}_n), \\ 0, & g(\underline{z}_n) < \sum_{i=1}^p \tau_i h_i(\underline{z}_n) \end{cases} \quad (5)$$

는 아래 식을 가장 크게 한다

$$\int_{\underline{z}_n} \delta(\underline{z}_n) g(\underline{z}_n) d\underline{z}_n. \quad (6)$$

국소 최적 검파란 신호가 약할 때 허용 오경보 확률 조건을 만족시키면서 $\theta_1=0$ 에서 검파력 함수

$$P_d(\theta_1) = \int_{\underline{z}_{1,m}} f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{1,m}) d\underline{z}_m \quad (7)$$

의 기울기를 가장 크게 하는 검파를 일컫는다 여기서, 검파력 함수 $P_d(\theta_1)$ 은 신호 세기가 θ_1 일 때 대립 가설을 고를 확률을 뜻하고 일반적으로 신호 세기 θ_1 이 커지면 따라서 커지는 함수이다 곧, 오

경보 확률을 P_{fa} 라 할 때, $0 \leq \bar{\theta}_2 < \bar{\theta}_1$ 이면 $P_{fa} = P_d(0) \leq P_d(\bar{\theta}_2) \leq P_d(\bar{\theta}_1)$ 이다.

2.3 국소 최적 검파

정리 1에 보인 일반화된 네이만 피어슨 정리에서 표본 크기가 m 일 때 생각하여

$$p = 1, \quad h_1(\underline{z}_m) = f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{0,m}), \quad (8)$$

$$g(\underline{z}_m) = f_{\underline{z}_m}^{(v)}(\underline{z}_m | H_{1,m})|_{\theta_1=0}$$

이라 두면 국소 최적 검파의 검정 함수를 얻을 수 있다. 식 (8)에서 v 는 $f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{1,m})$ 의 도함수가 $\theta_1=0$ 일 때 0이 아닌 함수가 되는 가장 낮은 차수이다. 곧,

$$f_{\underline{z}_m}^{(i)}(\underline{z}_m | H_{1,m})|_{\theta_1=0} = \frac{\partial^i f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{1,m})}{\partial \theta_1^i} \Big|_{\theta_1=0} \quad (9)$$

$$= 0, \quad i=1, 2, \dots, v-1$$

이고

$$f_{\underline{z}_m}^{(v)}(\underline{z}_m | H_{1,m})|_{\theta_1=0} > 0 \quad (10)$$

이다. 일반적으로 순 덧셈꼴 잡음 모형에서 이는 신호를 검파하는 문제에서는 $v=1$ 이고, 평균이 0인 확률 신호를 검파하는 문제에서는 $v=2$ 이다 [4]. 이 논문에서는 관측 모형 (1)에서 신호 벡터 \underline{s}_m 을 안다고 두었으므로 $v=1$ 이다.

표본 크기가 m 일 때 국소 최적 검파기는 검정 함수가

$$\delta_{LO}(\underline{z}_m) = \begin{cases} 1, & \Lambda_{LO}(\underline{z}_m) \geq \tau_{LO,m}(\alpha), \\ 0, & \Lambda_{LO}(\underline{z}_m) < \tau_{LO,m}(\alpha) \end{cases} \quad (11)$$

인데, 이 검정 함수 $\delta_{LO}(\cdot)$ 은 허용 오경보 확률

$$\alpha = \int_{\underline{z}_m} \delta(\underline{z}_m) f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{0,m}) d\underline{z}_m \quad (12)$$

를 만족시키는 모든 검정 함수 $\delta(\cdot)$ 가운데 $\theta_1 = 0$ 에서 검파력 함수 $P_d(\theta_1)$ 의 (일반화된) 기울기

$$\int_{\underline{z}_m} \delta(\underline{z}_m) f_{\underline{z}_m}^{(v)}(\underline{z}_m | H_{1,m}) \Big|_{\theta_1=0} d\underline{z}_m \quad (13)$$

을 가장 크게 한다. 식 (10)에서

$$\Lambda_{LO}(\underline{z}_m) = \frac{f_{\underline{z}_m}^{(v)}(\underline{z}_m | H_{1,m})|_{\theta_1=0}}{f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m | H_{0,m})}$$

$$= \sum_{i=1}^m s_i \cdot \left\{ - \frac{f_{\underline{v}}'(z_i)}{f_{\underline{v}}(z_i)} \right\} \quad (14)$$

$$= \sum_{i=1}^m s_i \cdot g_{LO}(z_i)$$

는 국소 최적 검정 통계량이라 부른다 여기서, $f_{z_i}(z_i | H_{1,m})$ 과 $f_{z_i}(z_i | H_{0,m})$ 은 각각 대립가설과 귀무가설에서 z_i 의 조건부 확률 밀도 함수이고 비선형 함수

$$g_{LO}(z_i) = - \frac{f_{\underline{v}}'(z_i)}{f_{\underline{v}}(z_i)} \quad (15)$$

는 국소 최적 비선형성이라 부른다 한편, (11)에서 문턱값 $\tau_{LO,m}(\alpha)$ 는 오경보 확률이 허용 오경보 확률 α 와 같도록 정한다

III. 새로운 약신호 검파

3.1 검파 기준

잘 알려진 바와 같이 이진 결정 문제에는 네 가지 확률이 있다. 구체적으로는, 잘못 확률인 오경보 확률 $P\{d_{1,m} | H_{0,m}\}$ 과 놓침 확률 $P\{d_{0,m} | H_{1,m}\}$ 이 있고, 옳게 판단할 확률인 검파 확률 $P\{d_{1,m} | H_{1,m}\}$ 과 대칭 검파 확률 $P\{d_{0,m} | H_{0,m}\}$ 이 있다. 이 네 가지 확률은 $P\{d_{1,m} | H_{0,m}\} + P\{d_{0,m} | H_{0,m}\} = 1$ 과 $P\{d_{0,m} | H_{1,m}\} + P\{d_{1,m} | H_{1,m}\} = 1$ 을 만족시킨다. 국소 최적 검파는 오경보 확률 $P\{d_{1,m} | H_{0,m}\}$ 을 일정하게 두고 검파 확률 $P\{d_{1,m} | H_{1,m}\}$ 을 (더 정확하게는, $\theta_1=0$ 일 때 검파 확률의 기울기를) 가장 크게 하여 얻은 것이다

한편, 놓침 확률 $\beta' = P\{d_{0,m} | H_{1,m}\}$ 과 대칭 검파 확률 $P\{d_{0,m} | H_{0,m}\}$ 을 엮어서 검파 기준을 하나 생각해볼 수 있다. 먼저, 신호 세기가 θ_1 일 때 귀무가설을 고를 확률 $P_{sd}(\theta_1) = P\{d_{0,m} | H_{1,m}\}$ 을 놓침 확률 함수라 부르자. 이 놓침 확률 함수는 일반적으로 신호 세기 θ_1 이 커질수록 작아지는 단조 감소 함수이다. 곧, $\bar{\theta}_1 > \bar{\theta}_2 \geq 0$ 이면 $P_{sd}(\bar{\theta}_1) \leq P_{sd}(\bar{\theta}_2) \leq P_{sd}(0) = 1 - P_{fa}$ 이다. 확률 밀도 함수 $f_{\underline{z}_m}(\underline{z}_m |$

$|H_{1,m})$ 을 $\theta_1=0$ 에서 테일러 급수로 나타내고(3)을 써서 어렵다면

$$\begin{aligned}
 f_{\underline{z}_m}(z_m|H_{1,m}) &= f_{\underline{z}_m}(z_m|H_{1,m})|_{\theta_1=0} \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_1^i}{i!} f^{(i)}_{\underline{z}_m}(z_m|H_{1,m})|_{\theta_1=0} \\
 &\approx f_{\underline{z}_m}(z_m|H_{0,m}) \\
 &+ \frac{\theta_1^v}{v!} f^{(v)}_{\underline{z}_m}(z_m|H_{1,m})|_{\theta_1=0}
 \end{aligned} \tag{16}$$

이다. 식 (16)을 써서 농침 확률을 나타내면 아래와 같다

$$\begin{aligned}
 \beta' &= \int_{Z_{0,m}} f_{\underline{z}_m}(z_m|H_{1,m}) dz_m \\
 &\approx \int_{Z_{0,m}} \left\{ f_{\underline{z}_m}(z_m|H_{0,m}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\theta_1^v}{v!} f^{(v)}_{\underline{z}_m}(z_m|H_{1,m})|_{\theta_1=0} \right\} dz_m
 \end{aligned} \tag{17}$$

3.2 검정 함수

이제, 농침 확률 β' 이 허용 농침 확률 β 보다 작거나 같을 때 대칭 검파 확률 $P(d_{0,m}|H_{0,m})$ 을 가장 크게 하는 검파 기법을 생각해보자. 이 검파 기법은 라그랑주 곱수 $\lambda_{1,m}$ 을 써서 나타낸 아래 $\Gamma_{1,m}$ 을 가장 크게 하는 문제를 풀어 얻을 수 있다

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{1,m} &= P_{sd}(0) - \lambda_{1,m} \left[\int_{Z_{0,m}} \left\{ f_{\underline{z}_m}(z_m|H_{0,m}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\theta_1^v}{v!} f^{(v)}_{\underline{z}_m}(z_m|H_{1,m})|_{\theta_1=0} \right\} dz_m - \beta \right] \\
 &= \int_{Z_{0,m}} \left\{ (1 - \lambda_{1,m}) f_{\underline{z}_m}(z_m|H_{0,m}) \right. \\
 &\quad \left. - \lambda_{1,m} \frac{\theta_1^v}{v!} f^{(v)}_{\underline{z}_m}(z_m|H_{1,m})|_{\theta_1=0} \right\} dz_m \\
 &\quad + \lambda_{1,m} \beta.
 \end{aligned} \tag{18}$$

식 (18)에서 $\lambda_{1,m}\beta$ 는 상수이므로, $\Gamma_{1,m}$ 을 가장 크게 하려면 피적분식을 가장 크게 해야 한다. 곧, 피적분식이 0보다 작지 않도록 하는 관측 벡터 \underline{z}_m 의 모임을 결정 영역 $Z_{0,m}$ 으로 삼으면 $\Gamma_{1,m}$ 을 가장 크게 할 수 있다. 아울러, 결정 영역 $Z_{0,m}$ 과 결정 영역 $Z_{1,m}$ 은 m 차원 실수 공간 Z_m 의 분할이므로, (18)을 가장 크게 하는 검정 함수 $\delta_{wd}(\underline{z}_m)$ 은 아래와 같이 나타낼 수 있다

$$\delta_{wd}(\underline{z}_m) = \begin{cases} 1, & \Lambda_{LO}(\underline{z}_m) \geq \tau_{wd,m}(\beta), \\ 0, & \Lambda_{LO}(\underline{z}_m) < \tau_{wd,m}(\beta). \end{cases} \tag{19}$$

여기서, 문턱값 $\tau_{wd,m}(\beta)$ 는 농침 확률 β' 이 허용 농침 확률 β 와 같도록 정한다. 식 (11)과 (19)를 살펴보면, 새로 얻은 약신호 검파 (19)는 국소 최적 검파 (11)과 검정 통계량은 같으나 문턱값이 다르다는 것을 알 수 있다

IV. 문턱값 분석

4.1 검정 통계량

위에서 국소 최적 검파와 새로 얻은 약신호 검파는 문턱값만 다르다는 것을 보았다. 이제, (14)에 보인 국소 최적 검정 통계량에서 $g_{LO}(z_i)$ 를

$$g_{LO}(z_i) = \frac{g_{LO}(z_i) - \varepsilon}{\rho} \tag{20}$$

으로 바꾸어 이를 쓰자. 여기서, $\rho > 0$ 와 ε 은 (20)을 간단히 해주도록 고른 실수이다

식 (20)을 써서 국소 최적 검파 (11)을

$$\delta_{LO}(\underline{z}_m) = \begin{cases} 1, & \Lambda_{LO}(\underline{z}_m) \geq \tau_{LO,m}(\alpha), \\ 0, & \Lambda_{LO}(\underline{z}_m) < \tau_{LO,m}(\alpha) \end{cases} \tag{21}$$

과 같이 다시 쓸 수 있고, 새로 얻은 약신호 검파 (19)는

$$\delta_{wd}(\underline{z}_m) = \begin{cases} 1, & \Lambda_{LO}(\underline{z}_m) \geq \tau_{wd,m}(\beta), \\ 0, & \Lambda_{LO}(\underline{z}_m) < \tau_{wd,m}(\beta) \end{cases} \tag{22}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서,

$$\Lambda_{LO}(\underline{z}_m) = \sum_{i=1}^m s_i \cdot g_{LO}(z_i) \tag{23}$$

을 ‘덜 복잡한 국소 최적 검정 통계량’이라 부르고, 확률 변수 $\Lambda_{LO}(\underline{z}_m)$ 의 확률 밀도 함수를 $f_{\Lambda_m}(\lambda)$ 로 쓰자. 한편, $\tau_{LO,m}(\alpha) = \left\{ \tau_{LO,m}(\alpha) - \sum_{i=1}^m \varepsilon \cdot s_i \right\} / \rho$ 이고 $\tau_{wd,m}(\beta) = \left\{ \tau_{wd,m}(\beta) - \sum_{i=1}^m \varepsilon \cdot s_i \right\} / \rho$ 임을 쉽게 알 수 있다.

4.2 문턱값

이제, 문턱값 $\tau_{LO,m}(\alpha)$ 와 $\tau_{wd,m}(\beta)$ 가 관측 크기 m 과 어떻게 이어져 있는지 살펴보고자 한다. 먼저, (23)에서 확률 변수 $\{g_{LO}(z_i)\}_{i=1}^m$ 은 서로

독립이고 분포가 같으므로 m 이 충분히 클 때 $\Lambda_{LOI}(\mathbf{z}_m)$ 의 평균을 μ_Λ , 분산을 σ_Λ^2 이라 하면 중심 극한 정리에서 [10] $\{\Lambda_{LOI}(\mathbf{z}_m) - \mu_\Lambda\} / \sigma_\Lambda$ 의 분포는 점근적으로 표준 정규 분포임을 알 수 있다 이때, 평균 μ_Λ 와 분산 σ_Λ^2 은 가설마다 다르다 구체적으로는, 귀무가설에서는 평균이

$$\begin{aligned} \mu_{0,m} &= E\{\Lambda_{LOI}(\mathbf{z}_m) | H_{0,m}\} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{\rho} \cdot E\{g_{LOI}(z_i) - \varepsilon | H_{0,m}\} \\ &= -\frac{\varepsilon}{\rho} \sum_{i=1}^m s_i \end{aligned} \quad (24)$$

이고, 분산은

$$\begin{aligned} \sigma_{0,m}^2 &= Var\{\Lambda_{LOI}(\mathbf{z}_m) | H_{0,m}\} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=1}^m I_0(f_{\mathbf{v}}) \\ &= \frac{m}{\rho^2} I_0(f_{\mathbf{v}}) \end{aligned} \quad (25)$$

이다. 한편, 대립가설에서는 평균이

$$\begin{aligned} \mu_{1,m} &= E\{\Lambda_{LOI}(\mathbf{z}_m) | H_{1,m}\} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{\rho} E\{g_{LOI}(z_i) - \varepsilon | H_{1,m}\} \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^m s_i \cdot E\{g_{LOI}(z_i) | H_{1,m}\} - \frac{\varepsilon}{\rho} \sum_{i=1}^m s_i \end{aligned} \quad (26)$$

이고, 분산은

$$\begin{aligned} \sigma_{1,m}^2 &= Var\{\Lambda_{LOI}(\mathbf{z}_m) | H_{1,m}\} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=1}^m I_1(f_{\mathbf{v}}) \\ &= \frac{m}{\rho^2} I_1(f_{\mathbf{v}}) \end{aligned} \quad (27)$$

이다. 여기서, $\theta_1 \rightarrow 0$ 이면 $\mu_{1,m} \rightarrow \mu_{0,m}$ 이고 $I_1(f_{\mathbf{v}}) = Var\{g_{LOI}(z_i) | H_{1,m}\} \rightarrow I_0(f_{\mathbf{v}})$ 임을 (3)을 바탕으로 알 수 있다

이제, (24)와 (25)를 써서 허용 오경보 확률을 나타내면

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{ \sum_{i=1}^m s_i \cdot g_{LOI}(\mathbf{z}_i) \geq \tau_{LOI,m}(\alpha) | H_{0,m} \right\} \\ &\approx Q\left(\frac{\tau_{LOI,m}(\alpha) - \mu_{0,m}}{\sigma_{0,m}} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

이고, 이 식에서

$$\begin{aligned} \tau_{LOI,m}(\alpha) &\approx \mu_{0,m} + \sigma_{0,m} Q^{-1}(\alpha) \\ &= \mu_{0,m} + \frac{\sqrt{mI_0(f_{\mathbf{v}})}}{\rho} Q^{-1}(\alpha) \end{aligned} \quad (29)$$

를 얻는다. 여기서,

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt \quad (30)$$

은 표준 정규 보 누적 분포 함수이고 $Q^{-1}(x)$ 는 $Q(x)$ 의 역함수이다. 한편, 관측 모형 (1)에서 순 덧셈폴 잡음 벡터 \mathbf{v}_m 이 정규 확률 벡터이면 덜 복잡한 국소 최적 검정 통계량은 관측값을 선형적으로 더한 꼴이므로, 확률 변수 $\Lambda_{LOI}(\mathbf{z}_m)$ 은 정규 분포를 따를 것이고 따라서 (29)에서 얻은 문턱값 식이 어렵지 않다. 정확한 식이 됨을 쉽게 알 수 있다.

비슷한 방법으로 중심 극한 정리를 써서 허용 농침 확률을 정리하여 쓰면

$$\begin{aligned} \beta &= P\left\{ \sum_{i=1}^m s_i \cdot g_{LOI}(\mathbf{z}_i) < \tau_{WDL,m}(\beta) | H_{1,m} \right\} \\ &= 1 - P\left\{ \sum_{i=1}^m s_i \cdot g_{LOI}(\mathbf{z}_i) \geq \tau_{WDL,m}(\beta) | H_{1,m} \right\} \\ &\approx 1 - Q\left(\frac{\tau_{WDL,m}(\beta) - \mu_{1,m}}{\sigma_{1,m}} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

과 같고, 이 식에서

$$\begin{aligned} \tau_{WDL,m}(\beta) &\approx \mu_{1,m} + \sigma_{1,m} Q^{-1}(1 - \beta) \\ &= \mu_{1,m} + \frac{\sqrt{mI_1(f_{\mathbf{v}})}}{\rho} Q^{-1}(1 - \beta) \end{aligned} \quad (32)$$

를 얻는다.

4.3 문턱값 분석

이제, 중심 극한 정리를 써서 나타낸 두 문턱값 (29)와 (32)가 관측 크기 m 이 늘어나면 어떻게 바뀌는지 살펴보자. 먼저, $\mu_{0,m} = -\sum_{i=1}^m s_i \cdot \varepsilon / \rho$, $\mu_{1,m} = -\sum_{i=1}^{m+1} s_i \cdot \varepsilon / \rho$ 과 (29)를 써서 아래와 같은 식을 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_{LOI,m+1}(\alpha) - \tau_{LOI,m}(\alpha) &\approx -s_{m+1} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} + \left(\frac{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}}{\rho} \right) \\ &\quad \cdot \sqrt{I_0(f_{\mathbf{v}})} Q^{-1}(\alpha). \end{aligned} \quad (33)$$

보통, 허용 오경보 확률 α 가 0에 가까우다고 두는 것이 타당하므로, 그렇게 두고 (33)을 살펴보도록 하자. 먼저, α 가 0에 가까울 때 $0 < Q^{-1}(\alpha) < \infty$ 이고, (33)에서 $\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$ 은 m 이 커질수록 작아진다. 따라서, 관측 크기가 커지면 문턱값은 커지고 그 증가율은 작아짐을 알 수 있다

같은 방법으로 (26)과 (32)에서

$$\begin{aligned} & \tau_{WDI, m+1}(\beta) - \tau_{WDI, m}(\beta) \\ & \approx (\mu_{1, m+1} - \mu_{1, m}) + \left(\frac{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}}{\rho} \right) \\ & \quad \cdot \sqrt{I_1(f_{\mathbf{v}})} Q^{-1}(1-\beta) \\ & = \frac{s_{m+1}}{\rho} \cdot \{E\{g_{LOI}(z_{m+1}) - \varepsilon\} H_{1, m+1}\} \\ & \quad + \left(\frac{\sqrt{m+1} - \sqrt{m}}{\rho} \right) \cdot \sqrt{I_1(f_{\mathbf{v}})} Q^{-1}(1-\beta) \end{aligned} \quad (34)$$

를 얻는다. 한편, 허용 농침 확률 β 가 0에 가까울 때 $-\infty < Q^{-1}(1-\beta) < 0$ 이다. 따라서, 관측크기가

$$\begin{aligned} m^* = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\rho(\mu_{1, m+1} - \mu_{1, m})}{\sqrt{I_1(f_{\mathbf{v}})} Q^{-1}(1-\beta)} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{I_1(f_{\mathbf{v}})} Q^{-1}(1-\beta)}{\rho(\mu_{1, m+1} - \mu_{1, m})} \right\}^2 \end{aligned} \quad (35)$$

보다 작을 때에는 관측 크기가 커질수록 문턱값이 작아지고, 관측 크기가 m^* 보다 클 때에는 관측 크기가 늘어날수록 문턱값이 커지고 그 증가율도 커진다. 보기를 들어 신호 벡터 $\underline{s}_m = [1, 1, \dots, 1]^T$ 이고, \underline{v}_m 은 평균이 0이고 분산이 1인 덧셈폴 흰빛 정규 잡음 벡터이며 신호 세기 $\theta_1 = 0.5$ 이고, 허용 농침 확률이 10^{-3} 이라 하자. 그러면, $m^* \approx 9.06$ 이고, 따라서, 문턱값 $\tau_{WDI, m}(\beta)$ 는 $m=9$ 일 때까지는 관측 크기 m 이 커질수록 그 값이 작아지고, 그 뒤부터는 관측 크기가 커지면 따라서 커진다. 이제, 국소 최적 검파에 쓰이는 문턱값 $\tau_{LOI, m}(\alpha)$ 와 새로운 약신호 검파에 쓰이는 문턱값 $\tau_{WDI, m}(\beta)$ 를 비정규 잡음에서 살펴보자 여기서, 신호 벡터는 $\underline{s}_m = [1, 1, \dots, 1]^T$ 이고, $\alpha = \beta = 10^{-3}$ 이라 두었다. 그림 1과 2는 각각 피검 매개변수 α 가 1인 코쉬 확률 밀도 함수

$$f_C(x) = \frac{\alpha/\pi}{x^2 + \alpha^2} \quad (36)$$

과 $k = \sqrt{3}/\pi$ 인 로지스틱 확률 밀도 함수

$$f_L(x) = \frac{e^{x/k}}{k(1 + e^{x/k})^2}, \quad k > 0 \quad (37)$$

로 나타낼 수 있는 잡음에서 관측 크기 m 의 함수로 두 문턱값 $\tau_{LOI, m}(\alpha)$ 와 $\tau_{WDI, m}(\beta)$ 를 나타낸 것이다. 그림 1과 2는 점 하나를 얻을 때마다 모의실험을 백만 번씩 거듭하여 얻었다. 그림 1과 2에서 $\tau_{LOI, m}(\alpha)$ 와 $\tau_{WDI, m}(\beta)$ 가 코쉬 잡음과 로지스틱 잡음에서도 정규 잡음에서와 비슷하게 바뀔을 알 수 있다.

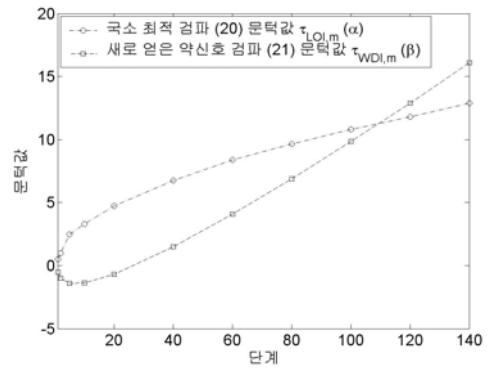


그림 1. 코쉬 잡음에서 $\alpha = \beta = 10^{-3}$ 일 때 관측 크기와 두 문턱값 $\tau_{LOI, m}(\alpha)$ 와 $\tau_{WDI, m}(\beta)$.

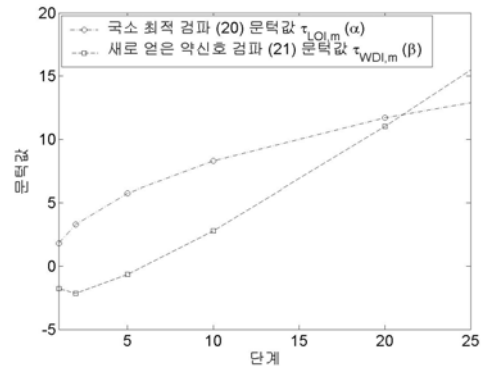


그림 2. 로지스틱 잡음에서 $\alpha = \beta = 10^{-3}$ 일 때 관측 크기와 두 문턱값 $\tau_{LOI, m}(\alpha)$ 와 $\tau_{WDI, m}(\beta)$.

V. 제안한 순차 검파

5.1 기본 원리

순차 검파 방식이 뜻 있으려면, 허용 오경보 확률이 α 이고 허용 농침 확률이 β 일 때 어떤 단계 m 에서도 오경보 확률 $\alpha' = P(d_{1, m} | H_{0, m})$ 과 농침 확률 $\beta' = P(d_{0, m} | H_{1, m})$ 이

$$\begin{aligned} \alpha' &\leq \alpha, \\ \beta' &\leq \beta \end{aligned} \quad (38)$$

을 만족시키면서 되도록 적은 관측으로 신호를 검파해야 한다. 이때, 관측 수를 되도록 적게 하려면 결정을 이루는 확률 $P(d_{2,m}|H_{j,m})$, $j=0,1$ 을 낮게 해야 한다. 그런데, 여섯 확률 $P(d_{i,m}|H_{j,m})$, $i=0,1,2, j=0,1$ 은 어느 단계에서나

$$\sum_{i=0}^2 P(d_{i,m}|H_{j,m}) = 1, \quad j=0,1 \quad (39)$$

를 만족시키므로 순차 검파 문제는 (38)을 만족시키면서 $P(d_{i,m}|H_{i,m})$, $i=0,1$ 을 가장 높이는 문제로 생각할 수 있다. 이를 바탕으로, 앞에서 보인 국소 최적 검정 통계량을 써서 순차 검파 방식을 이끌어내 보자.

순차 검파 문제에서는 두 허용 잘못 확률 α 와 β 가 어떤 값이나에 따라 결정 영역이 둘 ($Z_{0,m}, Z_{1,m}$) 또는 셋으로 ($Z_{0,m}, Z_{1,m}, Z_{2,m}$) 나뉜다. 구체적으로는, 허용 오경보 확률 α 를 만족시키는 문턱값 $\tau_{LOI,m}(\alpha)$ 와 허용 농침 확률 β 를 만족시키는 문턱값 $\tau_{WDL,m}(\beta)$ 의 상대적인 크기에 따라 순차 검파 문제를 나누어 생각해볼 수 있다. 순차 검파에서는 일반적으로 단계 1에서 관측 크기 $m=1$ 로 시작하여 단계마다 관측 크기를 하나씩 늘려서 신호를 검파한다. 곧, 단계 m 에서는 관측 m 개를 바탕으로 신호를 검파한다. 이와 같은 사실을 새겨두고, 단계 1에서 두 문턱값 크기를 견주어 보자. 먼저, 오경보 확률 α' 을

$$\alpha' = \int_{\tau_{LOI,1}(\alpha')}^{\infty} f_{\Lambda_1}(\lambda|H_{0,1})d\lambda \quad (40)$$

으로 쓸 수 있고, 신호 세기 θ_1 이 0에 가까울 때 (2)를 바탕으로 농침 확률 β' 을

$$\begin{aligned} \beta' &= \int_{-\infty}^{\tau_{WDL,1}(\beta')} f_{\Lambda_1}(\lambda|H_{1,1})d\lambda \\ &\approx \int_{-\infty}^{\tau_{WDL,1}(\beta')} f_{\Lambda_1}(\lambda|H_{0,1})d\lambda \end{aligned} \quad (41)$$

이라 쓸 수 있다. 이제, 신호 세기 θ_1 이 0에 가까울 때, 허용 오경보 확률 α 와 허용 농침 확률 β 가 충분히 작을 때, (40)과 (41)을 써서 (38)을 살펴보면 $0 < \tau_{LOI,1}(\alpha) < \infty$ 이고 $-\infty < \tau_{WDL,1}(\beta) < 0$ 임을 알 수 있다. 따라서, 관측 크기 $m=1$ 일 때에 두 문턱

값은 아래와 같은 관계를 만족시킴을 알 수 있다

$$\tau_{LOI,1}(\alpha) > \tau_{WDL,1}(\beta). \quad (42)$$

한편, (33)과 (34)에서 보았듯이 m 이 커질수록 문턱값 $\tau_{LOI,m}(\alpha)$ 은 커지지만 증가율은 낮아지고 문턱값 $\tau_{WDL,m}(\beta)$ 는 ($m > m^*$ 이면) 커지고 그 증가율도 높아진다. 이제, $m \rightarrow \infty$ 일 때 두 문턱값의 비를 얻어보면 아래와 같다

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\tau_{WDL,m}(\beta)}{\tau_{LOI,m}(\alpha)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{\mu_{1,m}} + \sqrt{m\sigma_{1,m}}Q^{-1}(1-\beta)}{m^{\mu_{0,m}} + \sqrt{m\sigma_{0,m}}Q^{-1}(\alpha)} > 1. \\ &= \frac{\mu_{1,m}}{\mu_{0,m}} \end{aligned} \quad (43)$$

따라서, (42)와 (43)에서

$$\tau_{LOI,m}(\alpha) \leq \tau_{WDL,m}(\beta) \quad (44)$$

를 만족시키는 m 이 적어도 하나 있음을 알 수 있다

5.2 새로운 순차 검파 방식

위에서 밝힌 두 문턱값의 경향을 생각하여 순차 검파 문제를 아래와 같이 생각해보자

첫째, $\tau_{LOI,m}(\alpha) > \tau_{WDL,m}(\beta)$ 일 때를 생각해보자. 단계 m 에서 검정 통계량 $\Lambda_{LOI}(z_m)$ 이 문턱값 $\tau_{LOI,m}(\alpha)$ 보다 크거나 같을 때에는 신호가 있다고 결정하고 문턱값 $\tau_{LOI,m}(\alpha)$ 보다 작을 때에는 신호가 없다고 결정하면 허용 오경보 확률을 만족시킨다. 같은 까닭으로, 비슷하게, 단계 m 에서 $\Lambda_{LOI}(z_m)$ 이 문턱값 $\tau_{WDL,m}(\beta)$ 보다 크거나 같을 때에는 신호가 있다고 결정하고 문턱값 $\tau_{WDL,m}(\beta)$ 보다 작을 때에는 신호가 없다고 결정하면 허용 농침 확률을 만족시킨다. 한편, $\Lambda_{LOI}(z_m)$ 이 $\tau_{WDL,m}(\beta)$ 와 $\tau_{LOI,m}(\alpha)$ 사이에 있으면 두 잘못 확률을 동시에 만족시킬 수 없으므로, 결정을 미루고 관측을 하나 더 본 뒤, 다시 결정한다

둘째, $\tau_{LOI,m}(\alpha) \leq \tau_{WDL,m}(\beta)$ 일 때를 생각해보자. 이때는,

$$\tau_{LOI,m}(\alpha) \leq \tau_{t,m}(\alpha, \beta) \leq \tau_{WDL,m}(\beta). \quad (45)$$

인 문턱값 $\tau_{t,m}(\alpha, \beta)$ 를 하나 골라 신호를 검파하면 두 잘못 확률 조건 (38)을 만족시킬 수 있다. 왜

냐하면, 문턱값 $\tau_{t,m}(\alpha, \beta)$ 를 써서 얻을 수 있는 두 잘못 확률은 아래 두 식을 만족시키기 때문이다

$$\int_{\tau_{t,m}(\alpha, \beta)}^{\infty} f_{\Lambda_m}(\lambda|H_{0,m})d\lambda \quad (46)$$

$$\leq \int_{\tau_{LOI,m}(\alpha)}^{\infty} f_{\Lambda_m}(\lambda|H_{0,m})d\lambda = \alpha,$$

$$\int_{-\infty}^{\tau_{t,m}(\alpha, \beta)} f_{\Lambda_m}(\lambda|H_{1,m})d\lambda \quad (47)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\tau_{WDI,m}(\beta)} f_{\Lambda_m}(\lambda|H_{1,m})d\lambda = \beta.$$

이제, 새로 얻은 약신호 검파에서 쓰는 문턱값이 국소 최적 검파 기법에서 쓰는 문턱값보다 처음으로 크거나 같게 되는 때를

$$\delta_p = \arg \min_m \{ \tau_{LOI,m}(\alpha) \leq \tau_{WDI,m}(\beta) \} \quad (48)$$

이라 하고 단계 δ_p 에서 (45)를 만족시키는 $\tau_{t,m}(\alpha, \beta)$ 를 $\tau_t^*(\alpha, \beta)$ 라 하자. 이때, (48)을 써서 제안한 검파 방식의 결정 규칙을 쓰면 아래와 같다

(1) $1 \leq m \leq \delta_p - 1$ 일 때에는,

$\Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) < \tau_{WDI,m}(\beta)$ 이면, $H_{0,m}$ 을 받아들임;

$\Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) \geq \tau_{LOI,m}(\alpha)$ 이면, $H_{1,m}$ 을 받아들임;

$\tau_{WDI,m}(\beta) \leq \Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) < \tau_{LOI,m}(\alpha)$ 이면, 관측을 하나 더 받아보고 결정 내림

(2) $m = \delta_p$ 일 때에는,

$\Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) < \tau_t^*(\alpha, \beta)$ 이면, $H_{0,m}$ 을 받아들임;

$\Lambda_{LOI}(\underline{z}_m) \geq \tau_t^*(\alpha, \beta)$ 이면, $H_{1,m}$ 을 받아들임.

한편, 위 (48)에서 정의한 δ_p 는 두 잘못 확률을 동시에 만족시키는 고정 표본 검파 방식의 최소 관측 크기와 같다 보기를 들어, 신호 벡터 $\underline{s}_m = [1, 1, \dots, 1]^T$ 이고, \underline{v}_m 은 평균이 0이고 분산이 σ^2 인 덧셈꼴 흰빛 정규 잡음 벡터이고 두 허용 잘못 확률이 각각 α 와 β 이면 (48)을 써서 아래와 같은 고정 표본 검파 방식의 최소 관측 크기를 얻을 수 있다

$$\delta_p = \arg \min_m \{ \tau_{LOI,m}(\alpha) \leq \tau_{WDI,m}(\beta) \} \quad (49)$$

$$= \lceil \{ Q^{-1}(\alpha) - Q^{-1}(1-\beta) \}^2 \rceil.$$

여기서, $[x]$ 는 x 보다 작지 않은 자연수 가운데 가장 작은 자연수를 뜻한다

제안한 순차 검파 방식에서는 (44)를 만족시키는 단계 m 이 적어도 하나 있음을 보았다 곧, 제안한 검파 방식을 쓰면 결정을 무한히 미룰 확률이 0이므로 결정을 무한히 미룰 때도 있는 순차 확률비 검파 방식이 지닌 문제점을 풀 수 있다

VI. 맺음말

이 논문에서는 이산 시간 관측 모형에서 새로운 약신호 검파 기법을 제안하였다 제안한 약신호 검파 기법은 놓침 확률을 일정하게 하고 대칭 검파 확률을 가장 크게 하는 검파 기법이다 이와 같이 새로 얻은 약신호 검파 기법을 국소 최적 검파 기법과 결합하여 순차 검파 방식을 얻었다 제안한 순차 검파 방식에서 쓰는 두 문턱값은 어떤 단계에 이르던 크기가 바뀌어 결정을 무한히 미룰 때도 있는 순차 확률비 검파 방식이 지닌 문제점을 풀어준다

2부에서는 [11] 제안한 순차 검파 방식의 성능을 고정 표본 검파 방식, 순차 확률비 검파 방식, 끝을 지른 순차 확률비 검파 방식의 성능과 견주어 볼 것이다.

참고 문헌

- [1] S. A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*, New York: Springer-Verlag, 1988.
- [2] H. V. Poor and J. B. Thomas, "Locally optimum detection of discrete-time stochastic signals in non-Gaussian noise," *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 63, pp. 75-80, Jan. 1978.
- [3] 이재환, 신승호, 진용욱, "LOD 방법을 이용한 미소신호 검출의 최적임계치 결정" 한국통신학회 논문지, 10권, 123-129쪽, 1985년 6월.
- [4] I. Song and S. A. Kassam, "Locally optimum detection of signals in a generalized observation model: The random signal case," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 36, pp. 516-530, May 1990.
- [5] 엄태상, 김상엽, 김형명, 송익호, 김선용, 유홍균, "'복합신호-적산성 잡음모형에서 약한 신호 검파,'" 한국통신학회 논문지, 16권, 1125-1131쪽, 1991년 11월.

