

# 초고해상도 영상 복원을 위한 Preconditioned Conjugate Gradient 최적화 기법

준회원 이 은 성\*, 정회원 김 정 태\*

## Preconditioned Conjugate Gradient Method for Super Resolution Image Reconstruction

Eunsung Lee\* Associate Member, Jeongtae Kim\* Regular Member

### 요 약

본 논문에서는 초고해상도 영상을 복원하기 위한 최적화 기법으로 널리 사용되는 PCG(Preconditioned Conjugate Gradient) 기법을 위한 새로운 preconditioner를 제안하였다. 제안된 preconditioner는 기존의 블록 circulant preconditioner를 확장하여 roughness 벌칙 함수에 대해서 효과적인 수렴이 가능하도록 한 것으로써, 잡음에 민감한 기존 방법의 성능을 개선할 수 있는 것이다. 제안된 preconditioner의 성능을 확인하기 위한 실험과 시뮬레이션에서 제안된 PCG 방법은 기존 방법보다 우수한 수렴 속도를 보였다.

**Key Words** : Super resolution, PCG, block circulant preconditioner, block Toeplitz, roughness penalty.

### ABSTRACT

We proposed a novel preconditioner based PCG(Preconditioned Conjugate Gradient) method for super resolution image reconstruction. Compared with the conventional block circulant type preconditioner, the proposed preconditioner can be more effectively applied for objective functions that include roughness penalty functions. The effectiveness of the proposed method was shown by simulations and experiments.

### I. 서 론

초고해상도 영상복원 기술이란 동일한 장면에 대하여 정수 화소 미만의 차이를 가지는 여러 장의 저해상도 영상을 이용하여 고해상도 영상을 복원하는 것이다. 이 방법의 장점은 같은 장면에 대해서 충분한 정보를 가지는 저해상도 영상들을 얻을 수 있다면 고해상도의 CCD를 사용하지 않고도 신호처리 기술을 통해 고화질 영상을 얻을 수 있다는 것이다<sup>1)</sup>.

이러한 목적을 달성하는 초고해상도 복원 알고리즘으로는 주파수 영역 접근법, POCS(Projection in Convex Sets), PWLS(Penalized Weighted Least

Square) 등 여러 가지가 있다<sup>1)</sup>. 가장 널리 사용되고 있는 방법 중의 하나인 PWLS는 임의의 고해상도 영상으로부터 저해상도 영상들을 생성하고 이 생성된 저해상도 영상들과 실제로 측정된 저해상도 영상들과의 오차를 포함하는 목적 함수를 최소화하는 고해상도 영상을 발견함으로써 초고해상도 화상 복원을 구현한다. 이 때 저해상도 영상들의 오차만을 고려하면 불충분한 저해상도 영상 정보로 인하여, 고해상도 영상이 유일하지 않고 잡음에 민감하다는 등의 문제가 발생하므로 추정하고자 하는 영상의 특성을 포함하는 목적함수를 설계하고 이를 최소화시키는 고해상도 영상을 찾게 된다<sup>1)</sup>.

\* 이화여자대학교 정보통신학과 멀티미디어 신호 처리 연구실 (silverstar@ewhain.net, jtkim@ewha.ac.kr)  
논문번호 : KICS2006-07-302, 접수일자 : 2006년 7월 6일, 최종논문접수일자 : 2006년 8월 21일

일반적으로 설계된 목적함수를 최소화하는 해는 closed form이 존재하지 않기 때문에 반복적인 최적화 기법을 통하여 해를 구해나가기야 한다. 최적화 기법으로는 Steepest descent, Quasi-Newton, CG(Conjugate Gradient) 등의 여러 알고리즘들이 있는데 이중 CG 방법은 가장 널리 사용되고 있는 방법들 중 하나이다<sup>[2]</sup>. CG 알고리즘의 수렴 속도는 목적함수의 Hessian 행렬의 조건수가 1에 근사한 값일 수록 우수한 것으로 알려져 있다<sup>[3]</sup>. 따라서 목적함수의 Hessian 행렬의 조건수를 개선할 수 있도록 적절한 preconditioner를 gradient 항에 곱해 주어 CG보다 수렴 속도를 빠르게 하고자 하는 방법이 PCG(Preconditioned Conjugate Gradient) 기법이다. 가장 이상적인 preconditioner는 Hessian 행렬의 역행렬이지만 이를 구하는 과정이 시간이 많이 걸리게 되어 Hessian 행렬을 근사화시킨 행렬의 역행렬을 구해 preconditioner로써 사용하는 방법이 많이 연구되고 있다<sup>[4,5]</sup>.

최근 저해상도 영상을 만드는 시스템 행렬을 블록 Toeplitz 행렬로 나타낼 수 있도록 화소 순서를 재구성하고 이를 블록 circulant 행렬로 근사화하여 구한 Hessian 행렬의 역행렬을 preconditioner로 사용한 최적화 알고리즘이 제안되었고 그 수렴속도가 CG보다 우수함이 증명되었다<sup>[3]</sup>. 이 방법은 수렴 속도가 우수할 뿐 아니라 circulant 행렬의 특성상 preconditioner를 저장할 때 적은 양의 메모리만 필요하다는 장점을 지니고 있다. 그러나 이 방법은 널리 사용되고 있는 roughness 벌칙 함수 등에 대해서 효율적인 preconditioner를 설계하지 못한다는 단점을 지니고 있다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 잡음 감쇄에 유용한 roughness 벌칙 함수를 포함한 목적함수에 대한 새로운 preconditioner를 설계하여 잡음제거에 효과적이면서도 수렴속도가 우수한 PCG 방법을 제안한다.

본 논문에서 다루고 있는 내용은 다음과 같다. II장에서는 목적함수의 모델, 기존의 PCG 방법 등을 설명한다. III장에서는 새로운 preconditioner를 제안하며 IV장에서는 이를 이용한 실험 결과를 보여 준다. V장에서는 기존 방법과의 성능 비교 분석 등이 전개되어 있으며 마지막 VI장에서 결론이 도출된다.

## II. 이론

### 2.1 모델링

초고해상도 영상 복원 문제에서 고해상도 영상과

$p$ 개의 저해상도 영상의 관계식은 식 (1)과 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$Y_k = W_k X + n_k, \quad 1 \leq k \leq p. \quad (1)$$

여기서,  $Y_k$ 는 저해상도 영상,  $X$ 는 고해상도 영상,  $W_k$ 는 카메라 PSF(Point Spread Function), 움직임, 디지털화 과정의 샘플링 등을 등가적으로 나타내는 행렬이다.

전체  $p$ 개의 영상을 벡터로 나타내면 식 (1)은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Y = W X + n. \quad (2)$$

여기서,  $y = [y_1, \dots, y_p]^T$ ,  $W = [W_1, \dots, W_p]$ 이다. 식 (2)와 같은 모델에서 초고해상도 영상 복원은  $Y$ 로부터  $X$ 를 구하는 역 문제라고 볼 수 있다<sup>[1]</sup>. 일반적으로 이러한 역 문제는 다음과 같이 어떤 목적함수를 설계하고 그 목적함수의 최소값을 발견하는 방법으로 풀게 된다.

$$\hat{X} = \arg_{\mathbf{X}} \min \Phi(\mathbf{X}). \quad (3)$$

여기서  $\hat{X}$ 은 복원된 영상이며,  $\Phi(\mathbf{X})$ 는 목적함수이다. 목적함수로는 식 (4)와 같은 MSE(Mean Square Error) 등이 사용될 수 있다.

$$\Phi(\mathbf{X}) = \| \mathbf{Y} - \mathbf{W} \mathbf{X} \|^2. \quad (4)$$

만약 저해상도 영상의 개수가 충분하지 않으면 이 역 문제는 ill-posed 문제가 되어서 유일한 해가 존재하지 않고 잡음에 민감하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 목적함수 (5)와 같이 벌칙 함수를 포함하는 목적함수를 널리 사용한다.

$$\Phi(\mathbf{X}) = \| \mathbf{Y} - \mathbf{W} \mathbf{X} \|^2 + \beta \| \mathbf{C} \mathbf{X} \|^2. \quad (5)$$

여기서,  $\beta$ 는 정규화 인자이고  $\mathbf{C}$ 는 고역 통과 필터를 나타내는 행렬이다. 이러한 목적함수 설계는 복원되는 영상이 부드러운 영상이라는 가정에서 출발하여 측정된 영상과의 오차를 줄일 뿐만 아니라 너무 급격히 변하지 않는 영상을 찾게 하는 것이다.

식 (5)와 같은 목적함수를 최소화하는 영상  $\hat{X}$ 은 closed form으로 식 (6)과 같이 주어진다.

$$\hat{X} = (W^T W + \beta C^T C)^{-1} W^T Y. \quad (6)$$

1)  $W$ 는 영상등록 과정으로부터 추정되어 알려져 있다고 가정하였다.

실제 초고해상도 영상 복원이 식 (6)을 이용해 연산 되는 경우는 거의 없다. 그 이유로는 첫째,  $C$ 와 같은 행렬로 나타낼 수 없는 많은 벌칙 함수의 경우, 그 해가 식 (6)과 같이 나타나지 않고 두 번째로는 closed form이 존재하는 경우라도 행렬의 크기가 워낙 커서 역행렬을 구하는데 많은 시간이 걸리기 때문이다. 따라서 대부분의 경우에는 반복적인 최적화 기법을 사용하게 된다.

2.2 PCG 기법

CG 방법은 가장 널리 쓰이고 있는 최적화 방법 중의 하나로써 많은 최적화 문제에 효과적으로 적용되어 왔다. CG의 수렴속도는 식 (7)과 같이 목적 함수의 Hessian 행렬의 조건수  $k$ 에 의해 결정된다<sup>6)</sup>.

$$\frac{\|\Phi(\mathbf{X}_n) - \Phi(\mathbf{X}_{n-1})\|_{\mathbf{A}}}{\|\Phi(\mathbf{X}_1) - \Phi(\mathbf{X}_0)\|_{\mathbf{A}}} \leq 2 \left( \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1} \right)^n, \quad (7)$$

여기서,  $k = \frac{\max(\mathbf{A} \text{의 고유치})}{\min(\mathbf{A} \text{의 고유치})}$ 이다. 식 (7)에서 볼 수 있는 바와 같이 조건수를 1 또는 그에 근접하게 만들어 준다면 CG의 수렴율을 높일 수 있을 것이다. 이를 위하여 시스템 행렬에 어떤 preconditioner를 곱하여 원래 시스템과 같은 해를 가지면서 조건수를 1에 가깝도록 만드는 것이 PCG 방법이다. 가장 이상적인 preconditioner는 목적함수의 Hessian 행렬의 역행렬로 알려져 있다. 이 경우의 목적 함수가 quadratic이면 고유치의 값이 모두 1이 될 것이다. 그러나 역행렬 연산 시에 생기는 긴 연산 시간, 메모리 공간 문제 등으로 인해 Hessian 행렬과 유사한 형태를 가지면서 역행렬 계산의 연산 시간이 빠르고 저장 공간은 많이 요구하지 않는 행렬들의 역행렬을 preconditioner로 사용되고 있다<sup>3)</sup>.

2.3 블록 circulant preconditioner 구성

시스템 행렬  $\mathbf{W}$ 는 고해상도 영상의 크기에 저해상도 영상의 총 크기를 곱한 크기를 가진다. 가령 64×64 해상도 영상 9장으로부터 256×256 해상도 영상을 복원하는 문제라면 시스템 행렬의 크기는 65536×36864 라는 매우 큰 행렬이 되어 저장과 Hessian의 역행렬을 구하는 과정이 쉽지 않게 된다.

이러한 문제를 해결하기 위해 시스템 행렬을 블록 Toeplitz 형태로 모델링한 뒤, 이와 유사한 블록 circulant 행렬을 구해 이것의 역행렬을 preconditioner로 사용하는 방법이 제안되었다. 블록 circulant 행렬로 변형시키면 연산시간 및 메모리 부족 문제를

극복할 수 있는데 전체 행렬의 값을 다 저장할 필요 없이 각 블록의 첫 번째 열만 알고 있다면 2번의 FFT를 통해 행렬이 어떻게 이루어졌는지 알 수 있고 그 역행렬도 쉽게 구할 수 있다<sup>6)</sup>.

선행 연구에서는 저해상도 영상의 한 화소가 고해상도 영상의 몇 개의 화소의 평균값으로 생성이 되는 경우에 대해서  $\mathbf{W}$ 를 블록 Toeplitz한 구조로 만들었는데 방법은 다음과 같다<sup>2)</sup>.

$N$ 개의 화소를 가지는 저해상도 영상이 얻어졌다고 가정하자. 이 경우 동일한 저해상도 영상의 화소를 만드는 고해상도 영상의 화소들을 그룹화하여  $N$ 개의 그룹을 만들 수 있다. 이 그룹들 중 같은 위치에 해당하는 화소들을 순서대로 배열하면 블록 Toeplitz 행렬을 얻을 수 있다. 예를 들면 그림 1과 같은 4×8 고해상도 영상이 있다면  $\{x_1, x_3, x_5, x_7, x_{17}, x_{19}, x_{21}, x_{23}, x_2, x_4, x_8, x_{18}, x_{20}, x_{22}, x_{24} \dots\}$ 순으로 배열하면 시스템 행렬은 그림 2와 같이 나타난다.

$\mathbf{W}$ 가 블록마다 대각선 방향끼리 같은 값을 갖고 있는 것을 볼 수 있는데 간혹 대각선 방향끼리  $t$ 값이 이어지다 0이 나오는 경우가 있다. 이는 고해상도 영상의 화소를 움직이면서 저해상도 영상을 만들 때 가장자리 부분을 0값으로 처리하였기 때문이다. 이러한 부분은  $t$ 값을 넣어 Toeplitz 형태가 되도록 근사화시켜 준다.

이렇게 생성된 블록 Toeplitz 행렬은 블록 circulant 행렬로 근사화하였다. 블록 Toeplitz 행렬은 블록 circulant 행렬로 근사화하는 방법은 널리 사용되어 온 것으로서<sup>4,5)</sup>, 이렇게 근사화된 블록 circulant 행렬을 사용하면 Hessian 행렬도 역시 블록 circulant 행렬이 되고, FFT를 이용해 Hessian 행렬의 역행렬을 쉽게 구할 수 있다. 이렇게 생성된 역행렬을 preconditioner로 사용하여 수렴 속도를 향상시키는 방법이 제안되었었다<sup>3,6)</sup>.

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
y1	x10	x11	y2	x13	y3	x15	y4
x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16
x17	x18	x19	x20	x21	x22	x23	x24
y5	x26	x27	y6	x29	y7	x31	y8
x25	x26	x27	x28	x29	x30	x31	x32

그림 1. 고해상도 영상과 저해상도 영상

2) 이 가정은 저해상도 영상을 모델링할 때 일반적으로 사용되는 것으로써 카메라의 PSF를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ \vdots \\ y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1, & W_1, & W_1, & W_1 \\ W_2, & W_1, & W_2, & W_1 \\ W_3, & W_3, & W_1, & W_1 \\ W_4, & W_3, & W_2, & W_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_{17} \\ x_{19} \\ x_{21} \\ x_{23} \\ \vdots \\ x_{32} \end{bmatrix}, \quad W_1 = \begin{bmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0 & t & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & t & \dots \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ \dots & \dots & 0 & t \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & t & 0 \\ & & & 0 & t & 0 & \\ & & & & 0 & t & \\ & & & & & 0 & t \\ & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad W_4 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & t & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & t \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

그림 2.  $y = Wx$

상기와 같은 preconditioner는  $W$  행렬에 대해서는 효과적으로 적용될 수 있었으나 벌칙 함수의 경우 행렬  $C$ 가 Toeplitz로 나타나지 않아서 적용할 수 없는 단점이 있다. 따라서 가장 간단한 경우인  $C$ 가 정방행렬  $I$ 인 경우에 대한 결과만이 보고되었다<sup>3)</sup>. 이 정규화 방법은 화소값의 변화율을 벌칙 함수에 포함시키지 않아서 잡음에 민감한 영상을 얻을 수 있다는 단점을 가지고 있다.

### III. 제안하는 preconditioner

초고해상도 영상 복원 과정에서 잡음에 덜 민감한 결과를 얻기 위해서 벌칙 함수에 화소 값 변화율을 포함시키는 방법이 널리 사용된다<sup>8)</sup>. 이러한 벌칙 함수들 중, 1차 roughness 벌칙 함수는 행 방향에 따른 화소 값의 총 변화율과 열 방향에 대한 총 변화율을 고려하여 다음 식들과 같이 나타낸다.

$$\|C_1 X\|^2 = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{N-1} (X(p, q+1) - X(p, q))^2. \quad (8)$$

$$\|C_2 X\|^2 = \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^{N-1} (X(p+1, q) - X(p, q))^2. \quad (9)$$

이와 같은 벌칙 함수를 사용하여 다음 식 (10)과 같은 목적함수를 설계할 수 있다.

$$\Phi(X) = \|Y - WX\|^2 + \beta (\|C_1 X\|^2 + \|C_2 X\|^2). \quad (10)$$

식 (8)과 (9)를 구현하는  $C_1$ ,  $C_2$ 를 화소 순서대로 나타내면  $C_1$ ,  $C_2$  행렬들은 블록 Toeplitz 구조를 가지지 않는다. 따라서 기존의 블록 circulant 근사법을 사용할 수 없다.

이 문제를 해결하기 위하여, 본 논문에서는 화소의 순서를 바꿔 주어 Toeplitz꼴로 나타내는 방법을 제안한다. 예를 들어 그림 1을 바탕으로 설명하면, 식 (8)로부터 원래 화소 순서대로 열 방향의 총 변화율을 구하면 식 (11)과 같이 된다<sup>4)</sup>. 식 (11)과 같은 순서로 만드는  $C_1$  행렬은 Toeplitz 구조를 가지지 않으므로, 블록 Toeplitz한  $C_1$  행렬을 갖기 위해 그림 1의 각 영역에서 같은 위치에 해당하는 화소들의 변화율을 차례대로 나열한다. 예를 들면, 식 (11)은 식 (12)와 같이 다시 배열한다.

$$\begin{aligned}
 \|C_1 X\|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + \dots \\
 &+ (x_5 - x_4)^2 + (x_6 - x_5)^2 + (x_7 - x_6)^2 + \dots \\
 &+ (x_8 - x_7)^2 + (x_{10} - x_9)^2 + (x_{11} - x_{10})^2 + \dots \\
 &+ (x_{27} - x_{26})^2 + (x_{28} - x_{27})^2 + (x_{129} - x_{28})^2 + \dots \\
 &+ (x_{30} - x_{29})^2 + (x_{31} - x_{30})^2 + (x_{32} - x_{31})^2.
 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 \|C_2 X\|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (x_6 - x_5)^2 + \dots \\
 &+ (x_8 - x_7)^2 + (x_{18} - x_{17})^2 + (x_{20} - x_{19})^2 + \dots \\
 &+ (x_{22} - x_{21})^2 + (x_{24} - x_{23})^2 + (x_3 - x_2)^2 + \dots \\
 &+ (x_{11} - x_{10})^2 + (x_{13} - x_{12})^2 + (x_{15} - x_{14})^2 + \dots \\
 &+ (x_{27} - x_{26})^2 + (x_{29} - x_{28})^2 + (x_{31} - x_{30})^2.
 \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)와 같은 순서대로 항들이 생성되는 행렬  $C_1$ 은 그림 3과 같이 나타낸다. 이렇게 설계된 행렬은 그림 3에 표시한 바와 같이 대부분 블록 Toeplitz 구조를 가지지만 몇몇 블록에 대해서는 블록의 크기도 달라지고 변화율계수 배열도 불규칙적인 부분들이 나타난다. 블록 형태가 깨어진 원인은 영상의 가장자리 부분에서 변화율을 적용하지 않았기 때문이다. 역행렬 연산을 위해서는 모든 블록을 circu-

3)  $C$ 가 정방행렬  $I$ 인 벌칙함수는 Miller 벌칙함수로 알려져 있다.

4) 이 때 변화율 계산에 있어서 고해상도 영상의 가장자리 부분은 제외되었다.





(a) 벌칙 함수를 사용하지 않은 경우 복원 영상(잡음  $\sigma=3$ ,  $\beta=0$ ) (b) Miller의 벌칙 함수를 사용한 복원영상(잡음  $\sigma=3$ ,  $\beta=0.1$ ) (c) 1차 roughness 벌칙 함수를 사용한 복원영상(잡음  $\sigma=3$ ,  $\beta=0.1$ )  
 그림 8. 벌칙 함수에 따른 복원 영상들

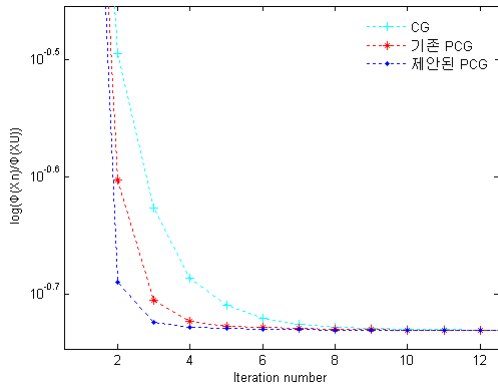


그림 9. 1차 roughness 벌칙 함수, 저해상도 16장 중 9장을 사용했을 경우의 CG, 기존의 PCG, 논문 PCG의 수렴율

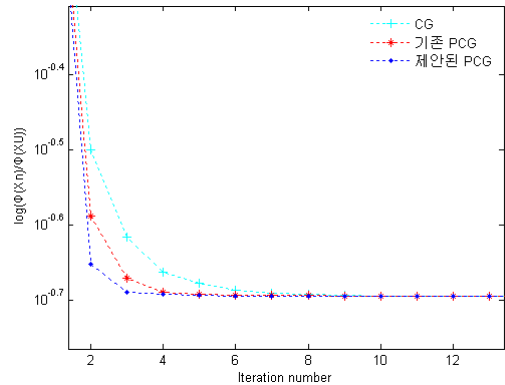


그림 10. 1차 roughness 벌칙 함수, 저해상도 16장 중 6장을 사용했을 경우의 CG, 기존의 PCG, 논문 PCG의 수렴율

먼저 기존 방법의 성능을 확인하기 위하여 CG와 PCG의 수렴율을 비교해 보았다. 기존 방법은 Miller 벌칙 함수에만 적용 가능하므로, 이를 사용하여 영상을 복원하였다. 그림 7은 각 기법의 반복횟수에 따른 목적함수 값의 감소율을 보여 준다. 세로축은 초기 함수 값에 대한  $N$ 번 째 반복에서의 함수 값의 비율이고 이 시물레이션은 잡음  $\sigma=3$ ,  $\beta=0.01$ 일 때 수행되었다. 그림 7에서 볼 수 있듯이 기존 PCG 방법이 CG보다 수렴 속도가 우수한 것을 알 수 있다.

앞 장에서 설명한 바와 같이 Miller 벌칙 함수를 사용하여 얻은 초고해상도 영상은 잡음에 민감하다는 단점을 가지고 있다. 그림 8에서는 벌칙 함수를 사용하지 않은 경우, Miller 벌칙 함수를 사용한 경우, 1차 roughness 벌칙 함수를 사용한 경우의 복원한 영상을 보이고 있다. 벌칙 함수를 사용하지 않은 영상에는 잡음이 많이 개입되어 있으며 Miller 벌칙 함수를 사용한 영상은 이보다는 잡음이 상당 부분 제거되었으나 여전히 남아있으며 전체적인 화소들의 밝기 값도 1차 roughness 벌칙 함수를 사용한 영상에 비해 떨어진 것을 볼 수 있다. 시물레이션은 잡음  $\sigma=3$ 에서,  $\beta$ 값을 0.001부터 1까지 10배씩 달리

해가며 알맞은  $\beta$ 값을 택하였다.

그림 8의 (c)와 같이 1차 roughness 벌칙 함수를 사용한 영상을 얻기 위한 최적화 과정을 CG와 PCG를 사용하며 진행하였다. 본 논문에서 제안한 preconditioner를 사용한 PCG의 수렴 특성을 확인하기 위하여 CG, 기존의 preconditioner를 사용한 PCG와 수렴 속도를 비교하였다. 기존 PCG 방법에서는 Miller 정규화 함수를 가정한 preconditioner를 사용하였다. 즉, 목적함수는 roughness 벌칙함수이지만, 이를 효과적으로 블록 circulant 한 구조로 나타내지 못하여, 마치 Miller 벌칙함수를 사용한 것처럼 가정하고 설계한 preconditioner를 사용하였다.

잡음  $\sigma=3$ ,  $\beta=0.01$ 에 대하여 저해상도 영상의 개수를 9장, 6장, 4장으로 달리해가며 시물레이션을 하였고 결과는 그림 9, 10, 11과 같았다. 목적함수의 값을 소수 넷째자리까지 고려하였을 때 저해상도 영상 9장의 경우 CG는 19번, 기존의 preconditioner를 사용한 PCG는 21번, 본 논문에서 제안한 preconditioner를 사용한 PCG는 9번 만에 수렴하였고, 6장 사용하였을 때는 CG는 18번, 기존의 preconditioner를 사용한 PCG는 16번, 제안한 preconditioner를 사용한



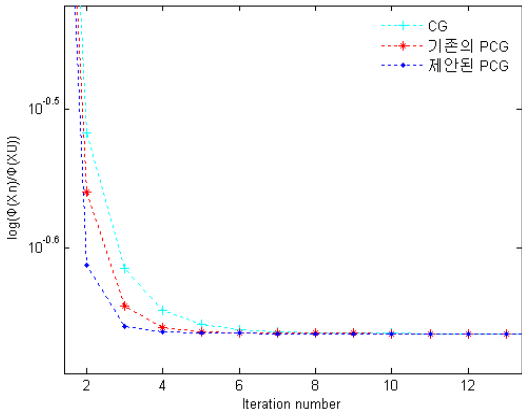


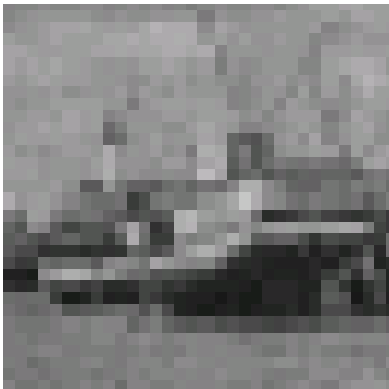
그림 11. 1차 roughness 벌칙 함수, 저해상도 16장 중 4장을 사용했을 경우의 CG, 기존의 PCG, 논문 PCG의 수렴율

표 1. 복원된 256×256 과일 영상의 MSE

(β=0.1)	σ=3	σ=5	σ=10
Miller	22.96	23.10	24.07
Roughness	7.62	7.97	9.43



(a) 128×128 고해상도 영상



(b) 32×32 저해상도 영상

그림 12. 고해상도 영상과 이로부터 얻어진 저해상도 영상 중 한 장

PCG방법은 11번 만에 수렴하였다. 또 4장을 사용했을 때는 CG는 20번, 기존의 PCG는 19번, 제안한 PCG방법은 10번 만에 수렴하였다. 각각의 경우 CG와 기존 PCG의 수렴율은 비슷하였으며 새롭게 설계한 PCG의 수렴율은 두 가지 경우에 비해 우수하였다.

표 1에서는 Miller 벌칙 함수와 1차 roughness 벌칙 함수를 기반으로 복원된 영상의 화질을 알아보기 위하여 MSE를 구하였다. 이 때 MSE 계산에는 원래 알고 있는 고해상도 영상과 복원한 영상을 사용했으며, 실험에서는 σ=3, σ=5, σ=10으로 잡음을 증가시키면서 두 가지 벌칙 함수에 따른 복원 영상의 화질을 비교해 보았다.

표 1에서 볼 수 있듯이 1차 roughness 벌칙 함수를 기반으로 복원된 영상의 화질은 Miller 정규화를 사용한 경우보다 더 나음을 알 수 있다. 이상의 실험에서 roughness 벌칙 함수가 필요하고 이를 포함하는 목적함수를 최소화하는 데에 제안된 preconditioner가 유용함을 볼 수 있었다.

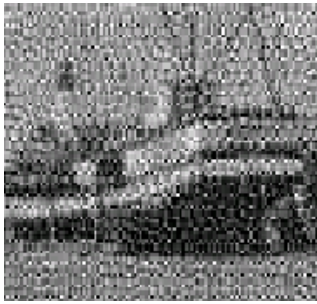
다른 영상의 경우에도 비슷한 결론을 보이고 있는지 확인하기 위하여 그림 12에 보여진 128×128 선박 영상에 대해서 앞선 실험과 동일한 실험을 수행하였다.

그림 13은 그 각각 다른 벌칙함수를 사용하였을 때 복원된 영상들을 보여주고 있다. 앞서의 실험과 마찬가지로 roughness 벌칙함수를 사용한 복원 영상의 화질이 가장 우수하였다.

그림 14는 roughness 벌칙 함수를 사용한 경우의 수렴 속도를 보여주고 있다. 그림에서 볼 수 있듯이 제안된 PCG 방법의 수렴 속도가 가장 우수함을 볼 수 있고 표 2에서 볼 수 있듯이 roughness 벌칙 함수를 사용한 경우에 복원된 영상의 화질이 더 우수함을 알 수 있다.

## V. 토론

PCG를 이용한 최적화 알고리즘의 설계 시에 효율적인 preconditioner의 설계는 수렴속도의 향상에 매우 중요하다. 이러한 preconditioner의 설계는 목적함수의 Hessian 행렬을 잘 고려해서 설계하여야 한다. 실험 결과에서 볼 수 있었듯이 Miller 정규화는 잡음 감쇄에 효과적이지 못 하였는데 이를 해결하기 위하여 roughness 벌칙 함수를 도입할 필요가 있었다.



(a) 벌칙 함수를 사용하지 않은 경우 복원영상(잡음  $\sigma=3$ ,  $\beta=0$ )



(b) Miller의 벌칙 함수를 사용한 복원영상(잡음  $\sigma=3$ ,  $\beta=0.01$ )



(c) 1차 roughness penalty를 사용한 복원영상(잡음  $\sigma=3$ ,  $\beta=0.01$ )

그림 13. 잡음 증가 시 Miller 벌칙 함수와 1차 roughness 벌칙 함수를 사용한 영상

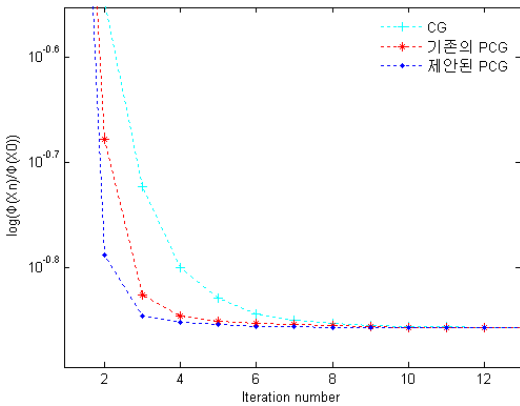


그림 14. 1차 roughness 벌칙 함수, 저해상도 16장 중 9장을 사용했을 경우의 CG, 기존의 PCG, 논문 PCG의 수렴속도

표 2. 복원된 256×256 파일 영상의 MSE

( $\beta=0.01$ )	$\sigma=3$	$\sigma=5$	$\sigma=10$
Miller	13.65	17.59	29.31
Roughness	10.83	12.70	19.80

본 논문에서 제안한 preconditioner를 사용한 최적화 알고리즘은 CG 방법보다 우수한 수렴율을 보이고 있는 것을 확인할 수 있었다. 흥미로운 사실은 본 논문에서 제안한 preconditioner를 사용하지 않고 Miller 벌칙 함수를 가정한 preconditioner를 사용하여도 CG 방법보다 수렴 속도가 개선이 된다는 사실이다. 이는 아마 그림 5에서 볼 수 있듯이  $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{C}}$  행렬이 대각 행렬과 유사한 구조를 가졌기 때문으로 추측된다.

본 논문에서 설계한 1차 roughness 행렬에 대한 preconditioner 외에 여러 가지 벌칙 행렬이 응용될 수 있을 것으로 생각된다. 실험으로는 CG보다 성능이 좋은 것을 보였지만 이론적으로 이를 증명하는 과정이 앞으로 남겨진 과제라 하겠다.

본 논문에서는 저해상도 영상과 고해상도 영상의 기하학적 변형 관계가 알려져 있다고 가정하였다. 만약 알려져 있지 않은 경우에는 joint registration 복원 등의 방법이 필요한데 이러한 최적화 문제에 대한 preconditioner의 설계는 중요한 후속 과제이다<sup>[9]</sup>.

## VI. 결론

본 논문에서는 1차 roughness 벌칙 함수를 블록 circulant한 행렬로 근사화하여 preconditioner를 설계하고 이를 이용한 PCG 방법을 사용하여 최적화 수렴 속도를 개선하였다.

## 참고 문헌

- [1] S. C. Park, M. K. Park, and M. G. Kang, "Super-Resolution Image Reconstruction : A Technical Overview," *IEEE Signal processing magazine*, pp.21-36, May. 2003.
- [2] Willam H. Press, Brian P. Flanner, Saul A, Teukolsky, Willam T. Vettering, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing.*, 2nd ed.: Cambridge University Press, 1992.
- [3] N. Nguyen, P. Milanfar, and G. Golub, "A Computationally Efficient Superresolution Reconstruction Algorithm." *IEEE Trans. Image processing*, Vol.10, pp.573-583, Apr.2001.
- [4] R. Chan and M. Ng, "Conjugate gradient method for Toeplitz systems," *SIAM Rev.*, Vol.38, pp.427-482, Sept. 1996.
- [5] R. Chan, M. Ng, R. Plemmons, "Generalization of Strang's Preconditioner with Applications to Toeplitz Least Squares Problems," *Numer.*



*Linear Algebra Appl.* 3 (1996), pp.45-64.

[6] P. Davis, (1979) *Circulant Matrices*, John Wileys and Sons, New York.

[7] Michal K. Ng and Nirmal K .Bose, "Mathematical Analysis of Superre-solution Methodology.", *IEEE Signal processing imagazine*, pp.62-74. May. 2003.

[8] J. A. Fessler, "Grouped coordinate descent algorithms for robust edge-preserving image restoration," in *Proc. SPIE 3071, Im. Recon. and Restor.* II, pp.184-194, 1997.

[9] R. C. Hardie, K. J. Barnard, and E. F.Armstrong, "Joint MAP Resigtration and High-Resolution Image Estimation Image", *IEEE Trans. Image Processing*, vol.6, pages 1621-1633, Dec. 1997.

이 은 성 (Eunseong Lee)

준회원



2004년 2월 이화여자대학교 정보통신학과 학사

2004년 3월~현재 이화여자대학교 정보통신학과 석사과정

<관심 분야 > Inverse problems, numerical optimization methods, image processing.

김 정 태 (Jeongtae Kim)

정회원



1989년 2월 서울대학교 제어계측학과 학사

1991년 2월 서울대학교 제어계측학과 석사

1991년 3월~1998년 삼성전자 책임연구원

2004년 12월 The University of Michigan at Ann Arbor, Ph.D in Electrical Engineering and Computer Science

2004년 3월~현재 이화여자대학교 정보통신학과 조교수

<관심 분야 > statistical signal and image processing, non-parametric estimation, medical imaging, tomography, and inverse problems