

라플라스 신호원에 대한 최소평균제곱오차 홀 양자기의 지지역에 관하여

정희원 김성민*, 나상신*

On the Support of Minimum Mean-Square Error Scalar Quantizers for a Laplacian Source

Seongmin Kim*, Sangsin Na* *Regular Members*

요 약

이 논문은 라플라스 밀도 함수에 대한 최적 홀 양자기의 지지역의 증가는 양자점의 개수와 대수적인 관계가 있음을 보여준다. 구체적으로, 분산이 1인 라플라스 밀도함수에 대해서 양자점의 개수 N 이 증가할 때 최적 양자기의 경계값에 의해 결정되는 지지역과 $\frac{3}{\sqrt{2}} \ln \frac{N}{2}$ 의 비율이 1로 수렴함을 보여준다. 또한 극한 상한값을 유도하여 최적 지지역의 로그적 증가가 그 값을 초과하지 않음을 보였다. 이 결과들로부터 이전부터 경험적으로 연구되어 온 최적 지지역의 로그 증가를 확인 할 수 있다.

Key Words : Laplacian source, Scalar quantizer, Mean-squared error distortion, The optimum support

ABSTRACT

This paper shows that the support growth of an optimum (minimum mean square-error) scalar quantizer for a Laplacian density is logarithmic with the number of quantization points. Specifically, it is shown that, for a unit-variance Laplacian density, the ratio of the support-determining threshold of an optimum quantizer to $\frac{3}{\sqrt{2}} \ln \frac{N}{2}$ converges to 1, as the number of quantization points grows. Also derived is a limiting upper bound that says that the optimum support cannot exceed the logarithmic growth by more than a constant. These results confirm the logarithmic growth of the optimum support that has previously been derived heuristically.

I. 서 론

Nitadori는 라플라스 밀도를 갖는 신호원에 대하여 짝수의 양자점을 갖는 최적 대칭 홀 양자기를 그 경계값들과 양자점들 사이의 최소거리의 제곱으로 표현했다^[1]. 그림 1에 대칭 양자기의 양의 부분에 2K개의 양자점들을 검은 점으로 나타냈다. Nitadori는 경계값들 (x_1, x_2, \dots, x_K) 과 양자점들 (y_1, y_2, \dots, y_K) 을 무한대로부터 0의 방향으로 일일이

열거하여 나타냈다. 양자화 구간 $[x_i, x_{i-1})$ 과 그것에 대응하는 양자점 y_i 가 주어진 경우 하위구간의 크기 δ_i 를 $y_i - x_i$ 로 정의하며, 상위 구간의 크기는 $x_{i-1} - y_i$ 로 정의한다. 그림 1은 최적 양자기의 경우 두 구간이 모두 양의 부분에 있다고 가정하고 하위구간의 크기는 그 왼쪽에 위치한 상위구간의 크기와 같음을 보여준다.

Nitadori는 분산이 1인 라플라스 밀도함수에 대

* 본 연구는 IDEC의 지원으로 수행되었습니다.

* 아주대학교 전자공학부 부호화 연구실 (koolland@gmail.com, sangna@ajou.ac.kr)

논문번호 : KICS030496-1111, 접수일자 : 2003년 11월 11일, 최종논문접수일자 : 2006년 9월 25일

한 $2K$ 의 양자점을 갖는 최적 대칭 홀 양자기 Q_{2K}^* 의 제곱 평균 오차 왜곡 $D(Q_{2K}^*)$ 를 다음과 같이 보였다.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|} \quad (1)$$

$$D(Q_{2K}^*) = \delta_K^2 \quad (2)$$

최적 대칭 양자기를 위한 위의 결과는 라플라스 밀도 함수에 대해서도 적용이 가능한데, 이것은 라플라스 밀도 함수에 대한 최적 양자기의 대칭구조 때문이다^[2]. 여기서 특이한 사실은 라플라스 밀도 함수에 대한 최적 양자기의 구간 크기들 $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_K)$ 의 값은 양자기의 양자점들의 개수와는 상관이 없다는 것이다. 이것을 증명하기 위해 Q_{2K}^* 와 Q_{2L}^* 을 라플라스 밀도 함수에 대한 $2K$ 와 $2L$ 의 양자점($L > M$)을 가지는 최적 양자기라 하자. 그리고 Q_{2K}^* 의 양의 하위구간 크기를 $\delta_{K,1}, \delta_{K,2}, \dots, \delta_{K,K}$ 라 하고, Q_{2L}^* 의 양의 하위구간 크기를 $\delta_{L,1}, \delta_{L,2}, \dots, \delta_{L,L}$ 라 하자. 그러면 $\delta_{L,i} = \delta_{K,i}$ for $i = 1, 2, \dots, K$ 라는 사실을 알 수 있다. 이 사실로부터 라플라스 밀도 함수에 대한 최적 양자기의 비반복적 설계방법이 유도되었다^{[1],[2],[3]}. 양자기의 지지역은 양자화 크기들의 집합으로 정의할 수도 있다(지지역은 대략적으로 granular 영역과 같다). 그림 1에 양자기 지지역의 범위를 $[-x_1, x_1]$ 로 나타냈다. 최외곽 경계값 x_1 에 의해 결정되는 지지역은 양자기 전체의 지지역을 결정하며, 최적 양자기의 성능에 대한 평가를 가능하게 해준다. 또한 최적 양자기의 경우에 그 값의 좋은 평가가 가능하다면 수렴함을 확신할 수 있으며, 로이드 맥스 알고리즘 [5, 6]에서의 최외곽 경계값을 찾기 위한 반복횟수를 줄일 수 있다. 이러한 역할 때문에 양자기의 지지역은 많은 관심을 갖게 되었다.

$2K$ 점 최적 양자기 Q_{2K}^* 의 경계값 x_1 에 의해 결정하는 지지역은 하위 구간들의 합으로 나타낼 수 있다.

$$x_1 = 2 \sum_{k=1}^K \delta_k - (\delta_1 + \delta_K) \quad (3)$$

최근 양자점의 개수로 직접적으로 x_1 을 찾는 다양한 방법들이 유도되고 있다^[7](수치적 관찰에 기초를 한 연구들도 있다^[6]).

$$x_1 \approx \frac{3}{\sqrt{2}} (\ln K + c)$$

여기서 c 는 상수값이며 방법에 따라 $\ln \frac{2}{3}, \ln \frac{2}{3\sqrt{3}}$, 또는 $\ln \frac{2}{3\sqrt{18}}$ 의 값들을 갖는다. 이 결과값들을 정밀하게 증명하는 것이 이 논문의 목적이다. 구체적으로 다음을 보이는 것이다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \ln K} = 1$$

즉, 최적 지지역은 양자점의 개수와 관련하여 로그 증가하게 된다는 것이다.

또한 극한 상한값은 다음과 같이 유도된다.

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} (x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln K) \leq \beta$$

여기서 β 은 불확정 상수값이다. 이 사실은 최적 지지역은 어떤 상수값에 의해 로그 증가를 초과할 수 없음을 보여준다. 따라서, 이런 극한 결과들로 [7]에서 유도한 최적 라플라스 양자기의 지지역이 대수적인 증가를 한다는 사실을 확인할 수 있다.

II. 최적 지지역에 대한 극한 정리들

이 절에서는 최적 $2K$ 점 양자기 Q_{2K}^* 의 지지역에 대한 두가지 극한 결과를 소개하고 증명한다.

2.1 최적 지지역의 성장률

이래의 정리 1은 라플라스 밀도함수에 대한 최적 지지역의 성장률은 로그 함수의 성질을 가짐을 보여준다.

[정리 1]

x_1 을 라플라스 밀도함수 $p(x)$ 의 $2K$ 점 최적 양자기 Q_{2K}^* 의 지지역을 결정하는 경계값이라 하자. 그러면, 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \ln K} = 1 \quad (4)$$

[증명]

라플라스 밀도 함수 $p(x)$ 에 대한 팬타-다잇 공식이 다음과 같이 알려져 있다^{8,9)}.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} (2K)^2 D(Q_{2K}^*) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} p^{\frac{1}{3}}(x) dx \right)^3 = \frac{2}{9} \quad (5)$$

그리고, 각각의 $k = 1, 2, \dots$,에 대해서 값 o_k 는 다음과 같이 존재하게 된다.

$$(2K)^2 D(Q_{2K}^*) = (2k)^2 \delta_k^2 = \frac{9}{2}(1+o_k) ,$$

위의 식에서 o_k 는 $\lim_{k \rightarrow \infty} |o_k| = 0$ 인 성질을 가지고 있다. 또한 여기서 양자기의 왜곡은 반드시 양의 값을 가져야 하기 때문에 각각의 k 에 대해서 $1 + o_k > 0$ 임에 주의해야 한다. 위로부터

$$\delta_k = \frac{3}{2\sqrt{2}k} (1+o_k) ,$$

여기서, $w_k = \sqrt{1+o_k} - 1$ 이고, w_k 는 o_k 와 같은 성질을 가지고 있다. 즉, $\lim_{k \rightarrow \infty} |w_k| = 0$ 이 된다. 식(3)을 사용하여 다음을 얻는다.

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k} (1+w_k) - \frac{3}{2\sqrt{2}} \left((1+w_1) + \frac{1}{K} (1+w_K) \right) ,$$

또는

$$\frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} = 1 + \frac{\sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} - \frac{1}{2} \frac{(1+w_1) + \frac{1}{K}(1+w_K)}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} ,$$

위로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} - 1 \right| \\ & \leq \left| \frac{\sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} \right| + \left| \frac{1}{2} \frac{(1+w_1) + \frac{1}{K}(1+w_K)}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} \right| \\ & \leq \frac{\sum_{k=1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} + \frac{1}{2} \frac{(1+|w_1|) + \frac{1}{K}(1+|w_K|)}{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} \\ & \leq \frac{\sum_{k=1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} + \frac{1}{2} \frac{(1+|w_1|) + \frac{1}{K}(1+|w_K|)}{\ln K} , \end{aligned}$$

위에서 마지막 등식은 다음을 사용하여 얻을 수 있다^{10, p.470)}.

$$\begin{aligned} \ln K + 1 &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{K} \quad (7) \\ &> \ln(K+1) > \ln K \end{aligned}$$

$K \rightarrow \infty$ 이면 $w_K \rightarrow \infty$ 이기 때문에, $\epsilon > 0$ 일 때 식(6)의 오른쪽 두번째 항을 위한 K_1 이 다음과 같은 조건으로 존재하게 된다.

$$\frac{1}{2} \frac{(1+|w_k|) + \frac{1}{K}(1+|w_K|)}{\ln K} < \frac{\epsilon}{2} \text{ for all } K > K_1$$

또한 식(6)의 $\epsilon > 0$ 일 때 오른쪽 첫 번째 항에 대한 K_2 는 $K > K_2$ 을 만족하는데, 이것은 $|w| < \epsilon/8$ 을 의미한다. 즉, 다음처럼 나타낼 수 있다.

$$\frac{\sum_{k=1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} = \frac{\sum_{k=1}^{K_2} \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} + \frac{\sum_{k=K_2}^{K_3} \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} \quad (8)$$

식(8)의 오른쪽의 첫 번째 부분의 분자의 결과값이 유한하고 분모의 값은 한계가 없이 증가하기 때문에, $K > K_3$ 을 만족 시키는 K_3 의 값이 존재한다. $K > K_3$ 라는 의미는 다음과 같다.

$$\frac{\sum_{k=1}^{K_2} \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} < \frac{\epsilon}{4}$$

그리고 식(8)의 두 번째 부분은 다음과 같이 경계가 된다.

$$\frac{\sum_{k=K_3+1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} < \frac{\epsilon}{8} \frac{\sum_{k=K_3+1}^K \frac{1}{k}}{\ln K}$$

$$< \frac{\epsilon \ln K + 1}{8 \ln K} = \frac{\epsilon}{8} \left(1 + \frac{1}{\ln K}\right)$$

위 식의 마지막 부등식은 식(7)로 부터 유도되었다. $K > K_4 \equiv \max(K_2, K_3)$ 에 대해서 다음을 얻는다.

$$\frac{\sum_{k=K_2+1}^K \frac{|w_k|}{k}}{\ln K} < \frac{\epsilon}{4}$$

따라서, $K > K_5 \equiv \max(K_3, K_4)$ 에 대한 식(8)의 상한값은 $\frac{\epsilon}{2}$ 이다. 결론적으로 위의 결과들로부터

$K > K_0 \equiv \max(K_1, K_5)$ 에 대한 식(6)의 오른쪽 항의 상한값은 ϵ 가 된다. 따라서, 위에서 $\epsilon > 0$ 이라 임의적으로 정했기 때문에 다음을 구할 수 있다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} = 1$$

마찬가지로 식(7)로부터 다음을 구할 수 있다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}}{\ln K} = 1$$

결론적으로 정리를 하면 다음과 같다.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} = \left(\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{x_1}{\frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k}} \right) \left(\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^K \frac{1}{k}}{\ln K} \right) = 1$$

이것으로 증명을 마치겠다.

정리1은 최적 지지역과 $\frac{3}{\sqrt{2}} \ln K$ 의 비율이 어떤 상수에 가까워지는 것을 보여준다. 그러나 앞의 두 값들은 경계치가 없이 증가하기 때문에 두 값의 차이는 무한대가 될 수 있다. 다음절에서 이 문제를 다룰 것이다.

2.2 최적 지지역을 위한 상한값

아래의 정리 3은 최적 지지역의 로그 증가는 어떤 상수값 이상 증가 하지 않음을 보여준다. 이것은 양자기의 왜곡을 계산 할 수 있는 양자기의 수열을 만들고 그것들로 극한 상한값을 구함으로써 증명을 한다. 자세한 계산법은 부록을 참고하면 된다.

다음의 보조정리는 어떤 값의 제곱근과 아주 작은 값(무시할 수 있을 정도)의 합을 다루는데 유용하다.

[보조정리 1]

$\{o_k\}_{k=1}^{\infty}$ 은 0으로 수렴하는 실수의 수열이라 하고, $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ 는 다음과 같이 정의 되는 실수의 수열이라 하자.

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2k} + \frac{w_k}{k}\right)^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}\right)$$

위에서 α 는 어떤 상수값이다. 그러면,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$$

[증명]

보조정리1에서 $w_k = k \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} - \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right) \right)$ 를 얻을 수 있다. 다음으로 왼쪽항을 $\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} + \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right)$ 으로 한번 곱하고 나누어준다.

$$w_k = k \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}\right) - \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right)^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} + \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right)}$$

$$= \frac{o_k - \frac{\alpha^2}{4k}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} + \left(1 + \frac{\alpha}{2k}\right)}$$

위 식을 사용하여 $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (o_k - \frac{\alpha^2}{4k})/2 = 0$ 을 얻을 수 있다.

[정리 2]

x_1 은 라플라스 밀도함수 $p(x)$ 의 $2K$ 양자점을 갖는 최적 양자기 Q_{2K}^* 라하면

$$\limsup_{K \rightarrow \infty} (x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln K) \leq \beta \quad (9)$$

위에서 β 값은 미정의 상수값이다.

[증명]

부록에 quantile 양자기 Q_{2K} 의 왜곡은 최적 양자기 Q_{2K}^* 에 대한 상한값을 제시하였다. 즉,

$$D(Q_{2K}^*) = \delta_K^2 < D(Q_{2K}) = \frac{9}{2(2K)^2} (1 + \frac{\alpha}{K} + \frac{o_k}{K})$$

α 은 미정의 상수값이며, o_K 는 $\lim_{K \rightarrow \infty} o_K = 0$ 의 성질을 가진다. 양변에 제곱근을 취함으로써 각각의 δ_k 에 대한 상한값을 얻는다.

$$\delta_k \leq \frac{3}{2\sqrt{2}k} (1 + \frac{\alpha}{K} + \frac{o_K}{K})$$

$$w_k = k[\sqrt{1 + \frac{\alpha}{k} + \frac{o_k}{k}} - (1 + \frac{\alpha}{2k})]$$

보조정리2에서 $k \rightarrow 0$ 이면 $w_k \rightarrow 0$ 임을 알 수 있다. 따라서, 경계값 x_1 의 상한값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \sum_{k=1}^K \delta_k - (\delta_1 + \delta_K) \leq 2 \sum_{k=1}^K \delta_k \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K (\frac{1}{k} + \frac{\alpha}{2k^2} + \frac{w_k}{k^2}) , \\ x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln K & \\ &\leq \frac{3}{\sqrt{2}} (\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} - \ln K) \\ &\quad + \frac{3\alpha}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k^2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k^2} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)의 오른쪽 편의 각각의 항에 극한을 취하면 수렴값을 얻는다. 그 중 첫 번째 항은 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} - \ln K) \\ = \lim_{K \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} - \ln(K+1)) + \lim_{K \rightarrow \infty} (\ln(K+1) - \ln K) \\ = \gamma \end{aligned}$$

위에서 $\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} - \ln(K+1)$ 는 Euler 상수값

($\gamma = 0.5772 \dots$)으로 수렴한다는 사실을 이용하였다 [10, p. 470]. 두 번째 항 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 의 수렴값은 $\frac{\pi^2}{6}$

이 된다. 그리고 세 번째 항은 K 으로 수렴한다. $w_k \rightarrow 0$ 이기 때문에 B 를 w_k 에 대한 한계값이라 하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$|\sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k^2}| \leq \sum_{k=1}^K \frac{|w_k|}{k^2} \leq B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{B\pi^2}{6}$$

위의 식은 $\frac{w_k}{k^2}$ 가 summable 함을 보여준다. 따라서

$\sum_{k=1}^K \frac{w_k}{k^2}$ 는 K 로 수렴하게 된다.

그리고 식 (10)의 양변에 \limsup 을 취하고 오른쪽 항의 수렴값을 알면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \limsup_{K \rightarrow \infty} (x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \ln K) \\ \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \gamma + \frac{3\alpha}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \frac{3}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k}{k^2} \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)의 오른쪽 항의 전부를 β 값이라 정의하고 증명을 마치겠다.

III. 결론

이 논문은 라플라스 신호원에 대한 최소평균제곱오차 양자기의 지지역에 대한 극한 결과를 고찰하였다. 구체적으로, 이 양자기의 지지역은 양자점의 개수에 대해서 로그 선형 증가함을 증명하였다. 또한, 양자점의 개수가 무한정 증가할 때, 양자기의 지지역을 결정하는 최외곽 경계값 x_1 과 로그 선형 함수의 차이가 상수값으로 한정됨을 증명하였다. 이

논문에서 최외곽 경계값 x_1 을 양자점의 개수에 대한 함수로 공식화하였는데, 이 공식은 다음과 같은 의미를 갖는다. 첫째, 이 공식은 양자점의 개수 N 이 증가할수록 정확해진다. 따라서, 실제로 설계한 양자기의 최외곽 경계값 x_1 과 이 공식을 비교하여 최적에 얼마나 근접하는지를 평가할 수 있다. 둘째, 어떤 신호원에 최적으로 동작하도록 설계된 양자기가 이와는 다른 신호원에 사용되어 설계된 의도에 따라 동작을 하지 않는 상황을 양자기의 불일치라고 하는데, 이 경우에 이 공식을 사용하여 불일치된 양자기의 성능을 고찰할 수 있다. 이런 점에서 이 논문의 기여도가 높을 것으로 기대된다.

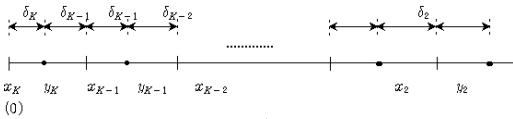


그림 1. 최적 대칭 양자기 Q_{2K}^* 의 양의 부분.
 Fig 1. The nonnegative half of of an optimum symmetric quantizer Q_{2K}^*

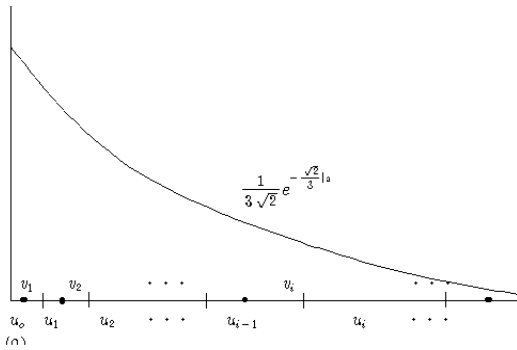


그림 2. Quantile 양자기 Q_{2K} 의 설계.
 Fig 2. The design of a quantizer Q_{2K}

부 록 : 접근 quantile 양자기

식 (1)의 라플라스 밀도함수 $p(x)$ 에 대한 $2K$ 점 대칭 양자기 Q_{2K} 는 다음과 같이 설계한다. 양자점과 경계값들은 그림 2와 같이 나타내었다.

(1) 양의 경계값 u_i 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_0^{u_i} \lambda(x) dx = \frac{i}{2K}, \quad i = 0, 1, \dots, K \quad (12)$$

$$\lambda(x) = \frac{p^{1/3}(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p^{1/3}(x) dx} = \frac{1}{3\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{3}|x|} \quad (13)$$

여기서 $u_0 = 0$ 임.

(2) 양의 양자점 v_i 은 밀도함수 $p(x)$ 에 대하여 각각의 양자구간 $[u_{i-1}, u_i)$ 의 무게중심이 된다.

$$v_i = \frac{\int_{u_{i-1}}^{u_i} xp(x)dx}{\int_{u_{i-1}}^{u_i} p(x)dx}, \quad i = 1, \dots, K \quad (14)$$

(3) 음의 경계값과 양자점은 양의 부분의 값들의 경상(mirror image)에 의해서 얻을 수 있다. 양자화구간 $[u_{i-1}, u_i)$ 의 크기를 Δ_i 라 하면, 그 경계값 u_i 는 다음과 같다.

$$u_i = \sum_{k=1}^i \Delta_k, \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (15)$$

여기서 $u_0 = 0$ 임.

식(13)의 $\lambda(\cdot)$ 를 흔히 라플라스 밀도함수 $p(x)$ 에 대한 최적 양자기의 점근 양자점 밀도 함수라 한다. 위의 과정에 의해 설계된 양자기는 그 양자화 크기가 $\frac{1}{2K}$ quantile의 배수에 의해서 구해지기 때문에 $\frac{1}{2K}$ -quantile 양자기라 한다. 이와 비슷한 quantile 양자기에 대한 연구가 이미 되어 왔는데, 그 예로 Cnabains and Gerr^[11]의 경우 어떤 조건 하에 신호원의 밀도 함수에 대한 quantile 양자기의 점근적 최적화를 보였다. 이와 같은 접근법과는 달리 이 논문에서는 라플라스 신호 밀도 함수에 대한 왜곡 표현을 직접 계산법으로 유도하였다. 구체적으로 이것은 아래의 평균제곱오차왜곡으로 주어진다.

$$D(Q_{2K}) = E_p(X - Q_{2K}(x))^2 \quad (16)$$

$$= \frac{9}{2(2K)^2} \left(1 + \frac{\alpha}{K} + \frac{o_K}{K}\right)$$

위의 식에서 α 는 불확정 상수값이고, o_K 는 $\lim_{K \rightarrow \infty} o_K = 0$ 인 성질을 가진다. $2K$ 를 N 으로 바꾸주면 위의 식은 $D(Q_N) = \frac{9}{2N^2} \left(1 + \frac{2\alpha}{N} + \frac{o_K}{N^2}\right)$ 와 같다. 여기서 $K \rightarrow \infty$ 이면 $D(Q_{2K}^*)/D(Q_{2K}) \rightarrow 1$ 인 사실로부터 Q_{2K} 는 점근적으로 최적화됨을 알 수 있다.

왜곡식 $D(Q_{2K})$ 의 유도
 양자기의 왜곡 $D(Q_{2K})$ 는 양자화 구간 $[u_{i-1}, u_i)$ 의 왜곡 D_i 들의 합과 같으며, 대칭성에 의해 다음과 같다.

$$D(Q_{2K}) = 2 \sum_{i=1}^K D_i \quad (17)$$

$$D_i = \int_{u_{i-1}}^{u_i} (x - v_i)^2 p(x) dx \quad (18)$$

u_{i-1}, u_i 그리고 Δ_i 에 대한 D_i 의 완전한 식을 찾기 위해서는 먼저 v_i 에 대한 식을 구한 후, 식(18)을 이용한다. 식(14)로 v_i 의 값을 찾을 수 있다.

$$v_i = u_{i-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\Delta_i e^{-\sqrt{2}\Delta_i}}{1 - e^{-\sqrt{2}\Delta_i}}, \quad i = 1, \dots, K$$

이 값을 식(18)에 대입하여 D_i 를 구한다.

$$D_i = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2}u_{i-1}} \cdot (1 - e^{-\sqrt{2}\Delta_i} - 2\Delta_i^2 \frac{e^{-\sqrt{2}\Delta_i}}{1 - e^{-\sqrt{2}\Delta_i}}) \quad (19)$$

또한 식(13)으로부터 u_{i-1}, Δ_i 와 K 의 관계를 구한다.

$$e^{-\sqrt{2}\Delta_i} = (1 - \frac{1}{K} e^{-\frac{\sqrt{2}}{3}u_{i-1}})^3$$

위 식의 양변에 로그를 취하여 다음을 구한다.

$$\Delta_i = -\frac{3}{\sqrt{2}} \ln(1 - \frac{1}{K} e^{-\frac{\sqrt{2}}{3}u_{i-1}})$$

위의 결과와 식(15)를 이용하여 K 에 대한 Δ_i 는 다음 식과 같다.

$$\Delta_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln(1 + \frac{1}{K-i}), \quad i = 1, 2, \dots, K-1 \quad (20)$$

위의 지수 형태는 다음과 같다.

$$e^{-\sqrt{2}\Delta_i} = (\frac{K-i}{K-i+1})^3, \quad i = 1, 2, \dots, K-1 \quad (21)$$

최종적인 경계값 u_{i-1} 는 식(15)에 식(20)을 대입하여 다음과 같이 구해진다.

$$u_{i-1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln(\frac{K-i+1}{K-i}), \quad i = 1, 2, \dots, K-1$$

또는

$$e^{-\sqrt{2}u_{i-1}} = (\frac{K-i+1}{K})^3, \quad i = 1, 2, \dots, K-1 \quad (22)$$

식(19)의 왜곡 D_i 는 식(20), (21), (22)를 사용하여 K 에 대해 직접적으로 표현할 수 있다.

$$D_i = \frac{2}{(2K)^3} [3(K-i)^2 + 3(K-i) + 1 - 3(\ln(1 + \frac{1}{K-i}))^2 \frac{(K-i)^3(K-i+1)^3}{(K-i)^2 + (K-i) + \frac{1}{3}}], \quad i = 1, \dots, K-1$$

그리고

$$D_K = \frac{2}{(2K)^3}$$

위의 식을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$D_{K-i} = \frac{2}{(2K)^3} [3i^2 + 3i + 1 - 3(\ln(1 + \frac{1}{i}))^2 \frac{i^3(i+1)^3}{i^2 + i + \frac{1}{3}}], \quad i = 1, \dots, K-1 \quad (23)$$

$$D_K = \frac{2}{(2K)^3} \quad (24)$$

식(23)의 $(\ln(1 + \frac{1}{i}))^2$ 은 $i = 1, 2, \dots, K-1$ 에 대한 테일러 시리즈이다. 즉,

$$(\ln(1 + \frac{1}{i}))^2 = 2 \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}) \frac{1}{i^n} = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{i^3} + \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{i^4} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{i^5} + \dots \quad (25)$$

식(23)에 식(25)를 대입하면 다음과 같다.

$$D_{K-i} = \frac{9}{2(2K)^3} \left[1 + \frac{\frac{22}{3} + \frac{19}{i} + \frac{10}{i^2}}{9(i^2 + i + 1/3)} \right. \quad (26)$$

$$\left. - \frac{8}{9} \sum_{n=6}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \frac{i^3(i+1)^3}{i^2 + i + 1/3} \right],$$

$i = 1, \dots, K-1$

위의 식에서

$$\frac{\frac{22}{3} + \frac{19}{i} + \frac{10}{i^2}}{9(i^2 + i + \frac{1}{3})} - \frac{8}{9} \sum_{n=6}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) \frac{i^3(i+1)^3}{i^2 + i + \frac{1}{3}}$$

$$= \alpha_i$$

라 하면 $\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i$ 가 K 로 수렴함을 알 수 있다.

즉, $2 \sum_{i=1}^{K-1} D_{K-i}$ 에 대하여 다음과 같이 나타낸다.

$$D(Q_{2K}) = \frac{9}{2(2K)^2} \left[1 - \frac{5}{9K} + \frac{\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i}{K} \right]$$

$\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i$ 가 수렴하기 때문에, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ 를 A_0 라 하자. 그러면 $K \rightarrow \infty$ 로 증가하게 되면 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = A_0 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i$ 은 0로 수렴하게 된다. 이것을 적절히 인용하여 다음을 얻게 된다.

$$D(Q_{2K}) = \frac{9}{2(2K)^2} \left[1 - \frac{5}{9K} + \frac{A_0 + o_K}{K} \right] \quad (27)$$

$$= \frac{9}{2(2K)^2} \left[1 + \frac{A_0 - \frac{5}{9}}{K} + \frac{o_K}{K} \right]$$

위 식에서 $\alpha = A_0 - 5/9$ 라 하면 식(16)과 같다. α 의 수치적인 결과값은 $K=10,000$ 일 때, $\alpha \approx -0.74$ 의 수치적 결과를 얻을 수 있다.

참 고 문 헌

[1] K. Nitadori, "Statistical analysis of Δ PCM," *Electron. Commun. in Japan*, vol. 48, pp.17-26, Feb. 1965.

[2] P.E. Fleischer, "Sufficient conditions for achieving minimum distortion in a quantizer," *int.Conv.Rec.*, Part 1, pp. 104-111, 1964.

[3] H. Lanfer, "Maximum signal-to-noise-ratio quantization for Laplacian-distributed signals," *Information and System Theory in Digital Communications*, NTG-Report vol.65 VDE-Verlag GmbH Berlin, Germany, p. 52, 1978

[4] P. Nol and Zelinski, "comments on 'quantizing characteristics for signals Laplacian amplitude probability density function'," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. COM-27,n. 8, pp. 1259-1260, Aug. 1979.

[5] J.A. Bucklew and N.C. Gallagher, Jr., "Note on the computation of optimal minimum mean-square error quantizers," *IEEE Trans. on Commun*, COM-30, pp. 298-301, Jan. 1982

[6] F.S. Lu and G.L. Wise, "A further investigation of Max's algorithm for optimum quantization," *IEEE Trans. on Comm.*, COM-33, pp. 746-750, Jul. 1985.

[7] S. Na and D.L. Neuhoff, "On the support region of asymptotically optimum mean-square error scalar quantizers for a generalized gamma source," Submitted to *IEEE Trans. on Inform Theory* for publication.

[8] P.F. Panter and W. Dite, "Quantization distortion in pulse count modulation with nonuniform spacing of levels," *Proc. IRE*, pp. 44-48, Jan. 1951.

[9] J.A. Bucklew and G.L. Wise, "A note on multi-dimensional asymptotic quantization theory," *Proc. Eighteen Ann. Allerton Conf. Commun. Contr. Comput*, pp. 454-463, Oct. 1980.

[10] E.J. Purcell and D. Varberg, *Calculus with Analytic Geometry*, 4th edition, Prentice-Hall, 1984.

[11] S. Cambanis and N.L. Gerr, "Simple class of asymptotically optimal quantizers," *IEEE Trans. on Inform. Theory*, IT-29, pp.664-676, Sept. 1983.

[12] J.W. Harris and H. Stocker. *Handbook of Mathematics and Computational Science*, Springer, 1998.

김 성 민 (Seongmin Kim)

정회원



2002년 2월 아주대학교 전자공학과 졸업

2004년 2월 아주대학교 전자공학과 석사

2004년 3월~현재 아주대학교 전자공학과 박사과정

<관심분야> 통신이론, 적응신호

처리, 디지털통신시스템

나 상 신 (Sangsin Na)

정회원



1982년 서울대학교 전자공학 학사

1985년 미국 미시간 대학교 전기공학 및 컴퓨터과학 석사

1989년 미국 미시간 대학교 전기공학 및 컴퓨터과학 박사

1989~1991년 미국 네브라스카

대학교 전기공학과 조교수

1991년~현재 아주대학교 전자공학부 재임

1998, 2002년 미국 미시간대학교 객원 교수

<관심분야> 디지털통신, 정보이론, 자료압축, 신호원 부호화