

# 등가의 Wiener-Hopf 방정식에 관한 연구

정회원 안 봉 만\*, 조 주 필\*\*°

## Research on an Equivalent Wiener-Hopf Equation

Bong-Man Ahn\*, Juphil Cho\*\*° *Regular Members*

### 요 약

본 논문은 평균 지능 측면에서 직교 입력 신호에 대하여 TDL 필터의 계수를 구할 수 있는 등가의 Wiener-Hopf 방정식을 제안한다. 본 논문에서 제안한 등가의 Wiener-Hopf 방정식을 이용하면 직교 입력 신호에 대하여 역 직교화 과정을 거치지 않고 직접적으로 TDL 필터의 계수와 오차를 표현할 수 있다. 본 논문에는 MMSE(minimum mean square error)에 대한 이론적 해석을 포함하였으며 수학적 예제에서 Wiener-Hopf 해와 제안한 등가의 Wiener-Hopf 해를 동시에 나타내었다.

**Key Words** : Wiener-Hopf, Lattice, Gram-Schmidt, MMSE

### ABSTRACT

This paper makes a research on the equivalent Wiener-Hopf equation which can obtain the coefficient of TDL filter on orthogonal input signal in terms of mean square error. Using this result, we can present the coefficient and error of TDL filter directly without inverse orthogonalization process on orthogonal input signal. We make a theoretical analysis on MMSE and show an Wiener-Hopf solution and the proposed equivalent one in mathematical example simultaneously.

### 1. 서 론

일반적으로 적응필터는 적응 필터의 입력으로 비 직교하는 입력 신호와 직교하는 입력에 대하여 각각 발전되어 왔다. 또한 적응필터의 최적계수를 구하는 방법은 입력 신호의 구분에 관계없이 그 기반을 Wiener-Hopf 방정식의 해를 구하는 것으로 연구되어 왔다<sup>[1]</sup>.

일반적으로 필터구조는 비 직교하는 입력 신호를 이용하는 TDL 필터 구조와 직교입력신호를 이용하는 필터구조 등으로 나눌 수 있는데 Gram Schmidt 직교과정, Lattice 필터, QR 등은 직교입력신호를 이용하는 필터 구조에 속한다.

직교입력신호의 생성은 시간영역과 주파수영역으

로 나눌 수 있는데 시간영역 신호를 시간영역에서 직교신호를 생성하는 방법과 주파수 또는 복소수영역으로 변환시켜서 사용하는 방법이 있다. 주로 Gram Schmidt 직교과정[2], Gauss - Seidel[3], Lattice 필터[1][2], QR[1] 등은 전자에 해당하고 통상 Transform Domain 적응필터는 후자에 해당한다. 일반적으로 Transform Domain에서 사용하는 변환은 DFT, DCT, DHT 및 FFT 등이 있다<sup>[4][5][6]</sup>.

Gram Schmidt 직교과정<sup>[2]</sup>이하는 적응필터, Lattice 필터<sup>[1][2]</sup>는 직교화된 입력벡터를 이용하여 원하는 응답 벡터를 예측하는 부분이 존재하는데 하나의 예로 Lattice 필터의 joint-process estimation 단 있다. 또한 Gram Schmidt 직교화 과정 및 QR 등을 이용하는 적응필터에서도 joint-process

\* 전북대학교 Next 사업단, \*\* 군산대학교 전자정보공학부(stefano@kunsan.ac.kr) (° : 교신저자)

논문번호 : KICS2008-01-021, 접수일자 : 2008년 1월 10일, 최종논문접수일자 : 2008년 9월 1일

estimation 단과 유사한 역할을 하는 단이 존재한다.

joint-process estimation 단에서 구한 계수는 TDL 필터의 계수가 아니기 때문에 직교화 과정에 대한 적절한 역변환과정을 거쳐야 TDL 필터의 계수를 얻을 수 있다. 이러한 것은 Gram Schmidt 직교과정, QR 등을 이용하는 알고리즘<sup>11)</sup>도 그러하다.

직교입력 벡터를 사용하는 알고리즘들은 비정상적인 환경에서 일반적인 TDL 필터보다 우수한 수렴특성을 나타낸다. 그러나 우수한 수렴특성을 가지고 있음에도 TDL 필터 계수를 얻는데 제약이 존재하였다. 그러므로 시간영역에서 직교입력 벡터를 사용하는 알고리즘들도 위의 제약을 회피하는 방법은 연구할 필요가 있다.

제안한 논문은 직교입력 벡터를 이용하여 원하는 응답과의 오차를 생성하면서 동시에 TDL 필터의 계수를 생성할 수 있는 등가의 Wiener-Hopf 방정식을 제안한다.

제안한 논문에는 등가의 Wiener-Hopf 방정식을 이용한 경우의 MMSE(minimum mean square error)에 대한 이론적 해석을 포함하였으며 수학적 예제에서 Wiener-Hopf 해와 제안한 등가의 Wiener-Hopf 해를 동시에 나타내었다.

## II. 등가의 Wiener-Hopf 방정식 유도

그림 1에서 입력신호 벡터  $x(n)$ , 최적계수벡터  $w_{opt}$ , 직교벡터  $b(n)$  및  $k$ 는  $M \times 1$ 인 벡터이고  $Q^H$ 는  $M \times M$ 인 직교 변환 행렬이다. 그리고  $d(n)$ 는 원하는 응답,  $\hat{d}(n)$ 는 예측된 원하는 응답 그리고  $v(n)$ 은 측정 잡음이다. 그리고  $v(n)$ 은 입력신

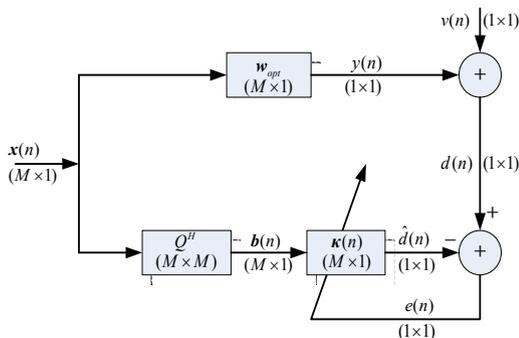


그림 1. 제안한 알고리즘의 구조  
Fig. 1. Structure of proposed algorithm

호 벡터  $x(n)$ 와 독립적이다. 직교 변환 행렬  $Q^H$ 은 선형 독립인 입력신호벡터  $x(n)$ 으로부터 상호 직교하는 벡터  $b(n)$ 를 얻는 과정을 나타낸다. 또한 벡터  $b(n)$ 와 계수벡터  $k$  선형 결합하여 예측된 원하는 응답  $\hat{d}(n)$ 를 생성한다.

그림1에서 원하는 응답은 식(2.1)과 같이 정의된다.

$$d(n) = w_{opt}^H x(n) \quad (2.1)$$

직교입력벡터  $b(n)$ 은 다음과 같이 정의된다<sup>11)</sup>

$$b(n) = Q^H x(n) \quad (2.2)$$

여기서 ( $H$ )는 Hermitian transpose를 나타낸다.

그리고 원하는 응답의 예측값은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{d}(n) = k^H b(n) = k^H Q^H x(n) \quad (2.3)$$

오차  $e(n)$ 가 0될 경우  $d(n)$ 와  $\hat{d}(n)$ 은 같게 되므로

$$d(n) - \hat{d}(n) = [w_{opt}^H - k^H Q^H] x(n) = 0 \quad (2.4)$$

위 방정식의 해는  $x(n) \neq 0$ 일때

$$w_{opt} = Q k \quad (2.5)$$

위의 결과는 참고문헌 [1]에서의 결과와 유사하다. 이 경우  $k$ 을 알고 있는 경우  $w_{opt}$ 를 계산하기 위해서는 변환행렬  $Q$ 을 반드시 알아야한다. 원하는 응답  $d(n)$ 와 예측된 원하는 응답  $\hat{d}(n)$ 이 평균자승면에서 가장 유사할 때  $k$ 에 대하여 알아보자. 식(2.1)과 식(2.3)에서 원하는 응답과 그 예측값과의 차이는 오차  $e(n)$ 로 정의할 수 있다. 오차  $e(n)$ 가 평균자승면에서 최소값을 가지는 경우  $d(n)$ 와  $\hat{d}(n)$ 은 가장 유사하다<sup>11)</sup>.

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n) = d(n) - k^H b(n) \quad (2.6)$$

비용함수는 다음과 같다.

$$J = E[e(n)e^*(n)] = E[|e(n)|^2] \quad (2.7)$$

식(2.7)에 대한 경사를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial J(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = 2E[(d(n) - \mathbf{k}^H(n) \mathbf{b}(n))(-\mathbf{b}^H(n))] = 0 \quad (2.8)$$

위 방정식의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{k} = E[\mathbf{b}(n) \mathbf{b}^H(n)]^{-1} E[\mathbf{b}(n) d^*(n)] \quad (2.9)$$

위의 식에서

$$\mathbf{k} = R_{bb}^{-1} \mathbf{p}_{bd} \quad (2.10)$$

여기서

$$R_{bb} = E[\mathbf{b}(n) \mathbf{b}^H(n)] \quad (2.11)$$

$$\mathbf{p}_{bd} = E[\mathbf{b}(n) d^*(n)] \quad (2.12)$$

정리 원하는 응답  $d(n)$ 와 예측된 원하는 응답  $\hat{d}(n)$ 이 가장 유사할 때  $R_{bx} \mathbf{w}_{opt} = \mathbf{p}_{bd}$  로 정의된다.

**proof**

식(2.8)에 식(2.2)와 식(2.6)를 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial J(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = 2E[(d(n) - \mathbf{w}_{opt}^H Q^{-H} Q^H \mathbf{x}(n))(-\mathbf{b}^H(n))] = 0 \quad (2.13)$$

식(2.13)에서  $Q^{-H} Q^H = I$  이므로  $\mathbf{w}_{opt}$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$E[\mathbf{b}(n) \mathbf{x}^H(n)] \mathbf{w}_{opt} = E[\mathbf{b}(n) d^*(n)] \quad (2.14)$$

위식은 다음식과 같이 정리될 수 있다.

$$R_{bx} \mathbf{w}_{opt} = \mathbf{p}_{bd} \quad (2.15)$$

여기서

$$R_{bx} = E[\mathbf{b}(n) \mathbf{x}^H(n)] \quad (2.16)$$

위의  $R_{bx}$ 는 상삼각행렬(upper triangular matrix)을 나타낸다. 즉, 비 Toeplitz 구조이다.

(증명 끝)

식(2.15)는 식(2.13)에서 처럼 비용함수  $J(\mathbf{k})$ 를  $\mathbf{k}$ 으로 편미분하여 얻은 결과이다. 이것은 식(2.13)의 물리적 의미를 유지하면서  $\mathbf{w}_{opt}$ 를 얻을 수 있다는 것을 의미한다. 그러므로 식(2.15)을 이용하면 입력벡터  $\mathbf{x}(n)$ 에 대한 직교변환 입력  $\mathbf{b}(n)$ 을 사용하는 필터에서 다른 어떠한 변환을 사용하지 않고 TDL 필터의 계수  $\mathbf{w}_{opt}$ 를 구할 수 있음을 나타낸다. 식(2.10)을 이용한 알고리즘들은  $R_{bb}$ 가 대각(diagonal) 행렬 형태이고 이것의 역행렬을 쉽게 구할 수 있기 때문에 알고리즘 개발에 주로 이용되어 왔다<sup>[7]</sup>. 그러나  $\mathbf{k}$ 은 TDL 계수가 아니기 때문에 적절한 과정을 통하여 변환 시켜주는 잉여의 계산이 필요하다. 이에 반하여 식(2.15)의  $R_{bx}$ 는 상삼각(upper triangular) 행렬 형태를 취하지만  $\mathbf{w}_{opt}$ 의 순시예측을 가능하게 해준다.

### III. Cost Function 및 MMSE의 견해

식(2.13)에서 다음과 같은 식을 얻었다.

$$\frac{\partial J(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = 2E[(d(n) - \mathbf{w}_{opt}^H Q^{-H} Q^H \mathbf{x}(n))(-\mathbf{b}^H(n))] = 0 \quad (3.1)$$

식(3.1)에서 다음을 추론 할 수 있다.

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}) &= E[(d(n) - \mathbf{w}_{opt}^H Q^{-H} Q^H \mathbf{x}(n))(d^*(n) - \mathbf{b}^H(n) \mathbf{k})] \\ &= E[(d(n) - \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{x}(n))(d^*(n) - \mathbf{b}^H(n) \mathbf{k})] \end{aligned} \quad (3.2)$$

식(3.2)의 의미는  $\mathbf{w}_{opt}$ 를 이용하여 생성된 오차 공간과  $\mathbf{k}$ 를 이용하여 생성된 오차 공간은 일반적으로 같으므로<sup>[1]</sup> 식(3.2)와 같은 비용함수의 선택도 가능하다.

식(3.2)를 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}) &= E[d(n)d^*(n) - d(n)\mathbf{b}^H(n)\mathbf{k} - \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{x}(n)d^*(n) \\ &\quad + \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{x}(n)\mathbf{b}^H(n)\mathbf{k}] \\ &= E[d(n)d^*(n)] - E[d(n)\mathbf{b}^H(n)]\mathbf{k} \\ &\quad - \mathbf{w}_{opt}^H E[\mathbf{x}(n)d^*(n)] + \mathbf{w}_{opt}^H E[\mathbf{x}(n)\mathbf{b}^H(n)]\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

식(3.3)는  $\mathbf{k}$ 와  $\mathbf{w}_{opt}$ 이 모두 포함되어 있기 때문에  $\mathbf{k}$ 를 제거하여  $\mathbf{w}_{opt}$ 로 표현하자. 식(2.14)의  $\mathbf{w}_{opt}$ 를 식(3.3)에 대입한 후 정리하면 다음과 같다.

$$J(\mathbf{k}) = E[d^2(n)] - \mathbf{p}_{bd}^H \mathbf{k} - \mathbf{p}_{bd}^H R_{bx}^{-H} E[\mathbf{x}(n) d^*(n)] + \mathbf{p}_{bd}^H R_{bx}^{-H} R_{wx}^H(n) \mathbf{k} = E[d^2(n)] - \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{p}_{xd} \quad (3.4)$$

그러므로 식(3.4)는 MMSE(minimum mean square) 값을 나타낸다.

$$J(\mathbf{k})_{\min} = \sigma_d^2 - \mathbf{w}_{opt}^H \mathbf{p}_{xd} \quad (3.5)$$

여기서  $\sigma_d^2 = E[d^2(n)]$ ,  $\mathbf{p}_{xd} = E[\mathbf{x}(n) d^*(n)]$ 이다. 그러므로 식(3.5)은 기존의 Wiener-Hopf 방법과 같은 결과를 나타낸다. 식(3.5)에서 원하는 응답에 추정잡음이 있는 경우에 대하여 간단히 살펴보면 다음과 같다. 원하는 응답은 다음과 같이 통상 모델링됩니다.

$$d(n) = \mathbf{w}_{opt}^T \mathbf{x}(n) + v(n) \quad (3.6)$$

여기서  $n(n)$ 는 평균이 0이고 분산이  $\sigma_v^2$ 인 추정잡음이다.

식(3.5)에서 입력  $x(n)$ 과 원하는 응답  $d(n)$ 과의 상호상관 벡터  $\mathbf{p}_{xd}$ 는 잡음이 있는 경우에도 변화가 없으나, 원하는 응답  $d(n)$ 의 파워(power)만 변하게 된다.

$$E[d^2(n)] = \sigma_{d_o}^2 + \sigma_v^2 \quad (3.7)$$

여기서  $\sigma_{d_o}^2$ 는 추정잡음이 없는 경우의 원하는 응답의 파워이다.

만일 추정잡음의 S/N비가 작다면  $\sigma_v^2 \approx 0$ 이 되고 S/N비가 크다면  $\sigma_v^2 \neq 0$  되어  $\sigma_v^2$ 의 영향을 무시할 수 없게 된다.

#### IV. 수치적 예제

백색가우시안 잡음을 다음과 같은 필터에 통과시켜 유색가우시안 잡음을 얻었다.

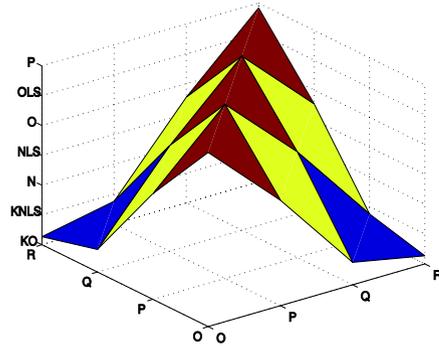
$$H(z) = 1/(-0.65z^{-1} + 0.693z^{-2} - 0.22z^{-3} + 0.309z^{-4} - 0.177z^{-5}) \quad (4.1)$$

유색가우시안 잡음을 다음과 같은 미지의 시스템에 통과시켜 출력응답을 얻었다.

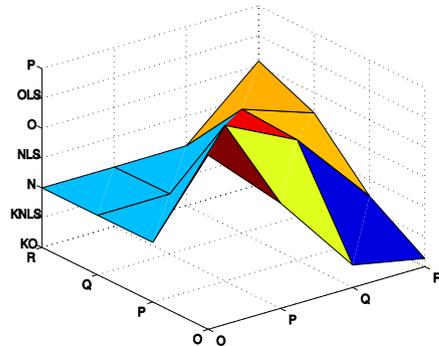
$$H(z) = 2.65 - 3.31z^{-1} + 2.24z^{-2} - 0.7z^{-3} \quad (4.2)$$

원하는 응답은 식(4.2)의 출력에 적절한 S/N비를 갖는 추정잡음 첨가하였다. 식(4.1) 및 식(4.2)로부터 Wiener-Hopf 해와 본 논문에서 제안한 등가의 Wiener-Hopf 해를 구하였다. 이때 사용한 데이터는 9000개의 데이터를 이용하여 100번의 독립된 실험을 수행하여 그 결과를 얻었다. 또한 입력벡터의 직교화는 격자필터<sup>[2]</sup>를 이용하여 수행하였다.

그림 2는 상관행렬  $R_{xx}$ 와  $R_{bx}$ 를 나타낸 것이다.  $R_{xx}$ 는 Toeplitz 구조를 가지고 있는 반면에  $R_{bx}$ 는 비 Toeplitz 구조를 가진다.  $R_{bx}$ 의 구조를 보면 상 삼각행렬임을 알 수 있다. 그러나  $0 \leq k \leq m-1$ 인 경우 평균



(a)  $R_{xx}$



(b)  $R_{bx}$

그림 2. 상관 행렬  $R_{xx}$ 와  $R_{bx}$ 의 모습

Fig. 2. Shape of autocorrelation matrix  $R_{xx}$  and  $R_{bx}$

적으로  $E[b_m(n)x(n-k)] = 0$ 이지 만 실제로는 0이 아닌 값을 가지고 있다.

표 1은 S/N 비가 -70dB, -20dB 및 -10dB인 경우 Wiener-Hopf 및 등가의 Wiener-Hopf 해를 구하여 나타낸 것이다. S/N 비가 -70dB 및 -20dB인 경우 Wiener-Hopf 및 등가의 Wiener-Hopf 해가 일치하며 S/N 비가 -10dB인 경우 약간 차이를 알 수 있으나 그 차이는 미비함을 알 수 있다. 결론적으로 Wiener-Hopf의 해와 등가의 Wiener-Hopf 해가 잘 일치함을 알 수 있다. 그러므로 등가의 Wiener-Hopf 방정식을 이용하여 최적의 계수를 구할 수 있음을 나타내고 있다.

표 1. S/N에 따른 계수 Wiener-Hopf 및 등가의 Wiener-Hopf 해  
Table 1. Wiener-Hopf and equivalent Wiener-Hopf solution according to S/N ratio

| S/N=-70dB     | Wiener - Hopf | 제안한 방법 |
|---------------|---------------|--------|
| $w_1 = 2.65$  | 2.65          | 2.65   |
| $w_2 = -3.31$ | -3.31         | -3.31  |
| $w_3 = 2.24$  | 2.24          | 2.24   |
| $w_4 = -0.7$  | -0.7          | -0.7   |

(a) S/N=-70dB.

| S/N=-20dB     | Wiener - Hopf | 제안한 방법  |
|---------------|---------------|---------|
| $w_1 = 2.65$  | 2.65          | 2.65    |
| $w_2 = -3.31$ | -3.3099       | -3.3099 |
| $w_3 = 2.24$  | 2.24          | 2.24    |
| $w_4 = -0.7$  | -0.6993       | -0.6993 |

(b) S/N=-20dB.

| S/N=-10dB     | Wiener - Hopf | 제안한 방법   |
|---------------|---------------|----------|
| $w_1 = 2.65$  | 2.6497        | 2.6497   |
| $w_2 = -3.31$ | -3.3098       | -3.3098  |
| $w_3 = 2.24$  | 2.2399        | 2.24     |
| $w_4 = -0.7$  | -0.70009      | -0.70011 |

(c) S/N=-10dB.

그림 3의 그림 중 첫번째 그래프는 Wiener-Hopf 방법을 이용하여 구한 계수벡터  $w_{xx}$ 와 최적 계수 벡터  $w_o$ 의 차이를 나타낸 것이고 그림 중 두번째 그래프는 본 논문에서 제안한 등가의 Wiener-Hopf 방법을 이용하여 구한 계수벡터  $w_{bx}$ 와 최적 계수 벡터  $w_o$ 의 차이를 나타낸 것이고 그림 중 마지막

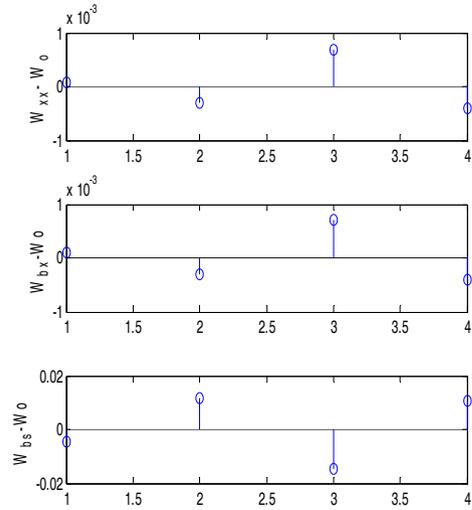


그림 3. 계수  $w$ 와 최적계수  $w_o$ 와의 차이  
Fig. 3. Difference between the coefficient  $w$  and the optimal coefficient  $w_o$ .

그래프는  $R_{bx}$ 가 그림 2의 (b)에서와 같이 상삼각행렬을 이룬다고 가정하여 back substitution을 이용하여 구한 계수  $w_{bs}$ 와 최적 계수벡터  $w_o$ 의 차이를 나타낸 것이다. 이때 S/N비는 -20dB로 하였다. 그림에서 제안한 등가의 Wiener-Hopf 방법과 Wiener-Hopf 방법은 거의 비슷한 크기의 오차를 나타내고 있고 back substitution을 이용하여 구한 계수  $w_{bs}$ 와 최적계수 벡터  $w_o$ 의 차가 크음을 알 수 있다. 그 이유는 일반적으로  $0 \leq k \leq m-1$ 인 경우 평균적으로  $E[b_m(n)x(n-k)] = 0$ 이지 만 실제로는 0이 아닌 값을 가지고 있기 때문이다.

## V. 결론

본 논문에서 등가의 Wiener-Hopf 해를 제안하였다. 그리고 등가의 Wiener-Hopf 해를 이용한 경우 MMSE에 대한 이론적 해석을 실시하였으며 그 결과는 기존의 Wiener-Hopf 해를 이용하는 것과 같다.

간단한 수치적 예제에서 미지의 시스템 인식 문제에 적용하여 기존의 Wiener-Hopf 해와 제안한 등가의 Wiener-Hopf 해를 각각 구한 후 이것들을 비교하였다. 그 결과 제안한 등가의 Wiener-Hopf 방정식을 이용해도 최적의 계수벡터를 구할 수 있음을 알 수 있었다. 그러므로 입력신호를 직교변환시켜 사용하는 경우 제안한 등가의 Wiener-Hopf 방정식을 이용하면 손쉽게 TDL 필터의 계수벡터를 구할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Haykin, *Adaptive Filter Theory-Fourth Edition*, Prentice Hall.
- [2] J. G. Proakis, C. M. Rader, F. Ling and C. L. Nikias, *Advanced Digital Signal Processing*. Macmillan Publishing Company, 1992.
- [3] F. Albu, M. Bouchard, Y. Zakharov, "Pseudo-Affine Projection Algorithms for Multichannel Active Noise Control," *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing*, Vol.15, Issue 3, pp.1044 - 1052, March 2007.
- [4] Liu Song, Li Xiaodong, Tian Jing, "Transform domain adaptive filter in active noise control," *Signal Processing*, 2002 6th International Conference on Vol.1, pp.272 - 275, Aug. 2002.
- [5] W. B. Mikhael, A. S. Spanias, "A fast frequency-domain adaptive algorithm," *Proceedings of the IEEE*, Vol.76, Issue 1, pp.80 - 82, Jan. 1988.
- [6] A. C. P.Veiga, Y. Iano and , G. A. Carrijo "A new adaptive filter structure: comparative study of NLMS, DST-LMS and DCT-LMS schemes applied to electromyographic signal modelling," *PACRIM. 2001 IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and signal Processing*, Vol.2 ,26-28, pp.555 - 558 Aug. 2001.
- [7] J. Makhoul. "A Class of ALL-Zero Lattice Digital Filters: Properties and Applications," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol.ASSP-26, pp. 304-314, Aug. 1978.

안 봉 만 (Bong-Man Ahn)

정회원

한국통신학회논문지 '07-9 Vol.32, No.8 참조

조 주 필 (Juphil Cho)

정회원

한국통신학회논문지 '07-9 Vol.32, No.8 참조