

# MIMO 시스템에서 Semidefinite Relaxation을 이용한 잡음 분산 행렬 기반의 Lattice-Reduction-Aided 검출기

준희원 이 동 진\*, 정희원 박 수 빈\*, 종신회원 변 윤 식\*\*

## Lattice-Reduction-Aided Detection based Extended Noise Variance Matrix using Semidefinite Relaxation in MIMO Systems

Dong-Jin Lee\* *Associate Member*, Su-Bin Park\* *Regular Member*,  
Youn-Shik Byun\*\* *Lifelong Member*

### 요 약

공간 다중화 방식의 MIMO(Multiple-Input Multiple-Output) 시스템에서 MLD(Maximum-Likelihood Detector)는 최적의 성능을 보이지만, 그 복잡성이 상당히 큰 단점이 있다. 이를 보완하기 위해 여러 가지 기법들이 제안되었으며, Lattice-reduction(LR) 검출기 또한 MIMO 시스템의 성능을 개선하기 위해 제안되었다. 본 논문에서는 확장된 잡음분산 행렬을 이용해 rounding operation 과정에서 발생하는 양자화 오류를 이용해 송신 신호 벡터에 근접한 candidate symbol set을 찾고, 여기서 Semidefinite Relaxation을 이용해 최대 우도 symbol을 검출한다. 그러나 그 복잡도는 MLD의 복잡도 보다 현저히 작고, LR 검출기의 복잡도에 근접한다.

**Key Words** : MIMO systems, LRAD, SDR, MLD, Detector

### ABSTRACT

Recently lattice-reduction (LR) has been used in signal detection for multiple-input multiple-output (MIMO) systems. The conventional LR aided detection schemes are combinations of LR and signal detection methods such as zero-forcing (ZF) and minimum mean square error (MMSE) detection. In this paper, we propose the Lattice-Reduction-aided scheme based on extended noise variance matrix to search good candidate symbol set in quantization step. Then this scheme estimates transmitted symbol with Semidefinite Relaxation by candidate symbol set. Simulation results in a random MIMO system show that the proposed scheme exhibits improved performance and a slight increase in complexity.

### I. 서 론

MIMO 시스템은 대역폭의 증가 없이 고속의 데이터를 전송하는 방법으로 공간 다중화 방식이 많이 연구 되어오고 있다<sup>[1]</sup>. 낮은 복잡도를 갖는 검출기인 ZF (Zero-forcing)이나 MMSE (Mini-

Mean Square Error) 검출기는 성능의 열화가 심각하다<sup>[2]</sup>. MLD (Maximum-Likelihood Detector)는 최적의 성능을 보이지만, 그 복잡도 매우 높아 효율적이지 못하다<sup>[3]</sup>. MLD의 복잡도를 줄이기 위해 SD (Sphere Decoding)가 제안 되었으나 낮은 신호 대 잡음 비에서 여전히 높은 복잡도를 갖고 있고 또한

\* 이 논문은 2007년도 인천대학교 자체 연구비 지원에 의해 수행되었음.

\* 시립인천대학교 전자공학과 신호처리연구실 (slldjj@incheon.ac.kr), (gmangel@incheon.ac.kr)

\*\* 시립인천대학교 전자공학과 교수 (byun@incheon.ac.kr)

논문번호 : KICS2007-10-489, 접수일자 : 2007년 10월 30일, 최종논문접수일자 : 2008년 9월 10일

여러 가지 문제점을 가지고 있다<sup>[4]</sup>. 최근에 LR (Lattice Reduction) 을 이용해 낮은 복잡도를 갖는 검출기가 제안되었으며, Linear Detection을 이용한 LR 검출기의 성능은 MLD 성능에 보다 가깝게 도달하였다<sup>[5],[6]</sup>.

LR은 주어진 시스템의 변화 없이 채널 행렬을 LLL algorithm [7]으로 유사 직교화하여 검출하는 검출기로서 주어진 채널에 대해 최적의 직교 변화 기저를 찾는 것이다. 그러나 LR 검출기는 rounding operation 과정에서 양자화 오류가 발생하고 이는 MLD와의 성능 차이를 갖도록 한다. 또한, [7]에서 near-ML Semidefinite Relaxation 기법에 의해 주어진 최적의 조건을 이용하여 MLD 방법의 복잡도를 줄이는 방법이 소개되었다.

본 논문에서는 rounding operation 과정에서 확장된 잡음 분산 행렬을 이용한다. 그에 따른 양자화 오류를 이용 송신신호 벡터에 가까운 candidate symbol set을 찾고 Semidefinite Relaxation 조건식을 갖는 symbol로 검출하여 낮은 복잡도를 가지면서 MLD가 갖는 최적의 성능에 도달하고자 한다.

본 논문의 순서는 II장에서 MIMO 시스템 모델에 대해 살펴보고, III장에서는 Semidefinite Relaxation 기법대해 알아본다. 그리고 IV장에서는 lattice reduction에 대해 소개와 기존의 LR 검출기들을 설명하고, 본 논문에서 제안한 Semidefinite Relaxation 기법을 적용한 확장된 잡음 분산을 이용한 LR 검출기는 V장에서 설명한다. VI장에서는 모의 실험을 통한 성능과 복잡도 비교로 제안한 검출기를 평가하고, 마지막 VII장에서 결론을 맺는다.

## II. MIMO 시스템 모델

$N_t$ 개의 송신 안테나와  $N_r$ 개의 수신 안테나를 고려한다. 또한 송수신단간의 채널은 uncorrelated flat fading 채널로 가정한다.

일반적인 MIMO(Multiple-Input Multiple- Output) 시스템 환경에서 공간 다중화를 위해서는 Fig. 1에서와 같이 송신기에서 다중화를 통하여 각 안테나 별로 다른 데이터 스트림  $\{x_{c,1} \dots x_{c,N_t}\}$ 을 전송하고 수신기에서는 각 수신 안테나에서 수신된 신호  $\{y_{c,1} \dots y_{c,N_r}\}$ 를 이용하여 전송된 데이터 스트림을 복원하게 된다. 이때 데이터 전송률은 SISO (Single- Input Single-Output) 시스템에 비해  $N_t$ 배 빨라지게 된다.

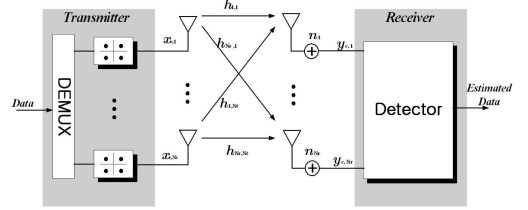


Fig. 1.  $N_r \times N_t$  MIMO 시스템

공간 다중화 방식으로서 데이터는  $N_t$ 개의 스트림으로 나누어진다. 따라서 MIMO 시스템의 수신 신호는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{H}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{n}_c \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x}_c$ ,  $\mathbf{n}_c$ ,  $\mathbf{y}_c$ 는 각각  $N_t \times 1$ 의 복소수 송신 벡터, 분산이  $\sigma_n^2$ 인 White Gaussian noise 벡터 그리고  $N_r \times 1$ 의 복소수 수신 벡터이다. 복소 시스템 모델을 다음과 같이 실수 등가 모델로 변환할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Re \mathbf{y}_c \\ \Im \mathbf{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re \mathbf{H}_c & -\Im \mathbf{H}_c \\ \Im \mathbf{H}_c & \Re \mathbf{H}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re \mathbf{x}_c \\ \Im \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Re \mathbf{n}_c \\ \Im \mathbf{n}_c \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서  $\Re$ 과  $\Im$ 는 각각 복소수의 실수와 허수를 나타낸다. 이는 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{H}$ 는  $n \times m$  행렬이고,  $m = 2N_t$ 와  $n = 2N_r$ 로 정의된다. 또한, M-QAM을 가정했을 때 송신신호는 집합은 다음과 같이 주어진다.

$$\Lambda = \left\{ \pm \frac{1}{2}a, \pm \frac{3}{2}a, \dots, \pm \frac{\sqrt{M}-1}{2}a \right\} \quad (4)$$

또한,  $a = \sqrt{6/(M-1)}$  송신신호를 1로 정규화 시킨다. 이때 ML detector의 수식은 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{\mathbf{s}}_{ML} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \Lambda^m} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|^2 \quad (5)$$

ML 검출기는 이론적으로 최적의 성능을 갖는다. 그러나 연산량이 변조 지수와 송신 안테나 개수에 따라 지수적으로 늘어나는 단점을 가지므로 실제로 구현이 불가능하다. 따라서 MLD 기법은 MIMO 시스템 환경에서 얻을 수 있는 성능의 하향 경계를 나타내는데 사용하고 실제 구현 시에는 성능의 저

하가 있더라도 계산이 간단한 수신기 구조를 고려하게 된다.

### III. Lattice Reduction 및 검출기

#### 3.1 Lattice Reduction

$h_1, \dots, h_m$ 는 실수 채널 행렬  $\mathbf{H}$ 의 열벡터이다. 격자에 의해 생성된 모든 가능한 수신 신호는 다음 집합으로 정의 된다.

$$L(\mathbf{H}) = L(h_1, \dots, h_m) = \sum_{l=1}^m h_l \mathbf{z} \quad (6)$$

여기서  $(m \times m)$ 행렬  $\mathbf{T}$  내의 모든 원소 값은 정수이고, determinant가  $\pm 1$ 인 unimodular이면,  $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{T}$ 는  $\mathbf{H}$ 와 동일한 격자를 가진다. Unimodular 행렬의 inverse는 항상 존재하고 오직 정수 값만을 가진다. Lattice reduction은 동일한 격자에서 좋은 basis를 찾는 것으로서, 주어진  $\mathbf{H}$ 보다 길이가 짧고 유사 직교인 새로운 basis  $\tilde{\mathbf{H}}$ 를 찾는 것이다. Basis reduction algorithm으로 LLL(Lenstra, Lenstra and Lovasz) algorithm이 쓰인다.  $n \times m$ 의  $\mathbf{H}$ 가 주어졌을 때,  $\mathbf{Q} = [q_1, \dots, q_m]$ 와  $m \times m$  상 삼각 행렬  $\mathbf{R} = [r_{l,k}]_{1 \leq l, k \leq m}$ 로 QR decomposition으로  $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ 으로 나타낼 수 있다. 그럼  $\mathbf{H}$ 의 열벡터는  $h_k = \sum_{l=1}^k r_{l,k} q_l$ 이다.

#### Definition(Lenstra-Laenstra-Lovasz Reduction)

가져  $\tilde{\mathbf{H}}$ 가 QR decomposition으로  $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{R}}$ 일 때, parameter  $\delta(1/4 < \delta \leq 1)$ 을 갖는 LLL-reduction algorithm 이라 부른다.

$$|\tilde{r}_{l,k}| \leq \frac{1}{2} |\tilde{r}_{l,l}|, \quad 1 \leq l < k \leq m \quad (7)$$

$$\delta \tilde{r}_{k-1,k-1}^2 \leq \tilde{r}_{k,k}^2 + \tilde{r}_{k-1,k}^2, \quad k = 2, \dots, m \quad (8)$$

우리는 [8]에서 제안된  $\delta = 3/4$ 을 가정한다. 또한, LLL algorithm은 [9]에서 자세히 표현 되어 있다. 채널 행렬  $\mathbf{H}$ 의 QR decomposition이 주어질 때, (11)에 의해서 reduced basis가 만들어지고, (8)에 만족하지 않으면 두 열 벡터를 교환하는 과정을 반복 수행함으로써  $\tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{T}$ 와  $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{T}$ 을 얻는다. 또한, 본 논문에서는 QR decomposition의 수행에 있어 SQR(sorted QR) decomposition을 수행함으로써 복잡도를 거의 무시할 수 있다<sup>[10]</sup>.

#### 3.2 Lattice Reduction Aided Detector<sup>[11]</sup>

Reduced basis  $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{T}$ 가 주어지고,  $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ 라고 가정하면, (3)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{z} + \mathbf{n} \end{aligned} \quad (9)$$

$\mathbf{T}$ 는 unimodular 행렬이고,  $\mathbf{z}$ 는 정수 벡터이다. 또한 채널 행렬  $\mathbf{H}$ 의 reduced basis를 가지는  $\tilde{\mathbf{H}}$ 는 유사 직교 행렬이다. 따라서 Lattice reduction ZF 검출기 (LR-ZF)는 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF} := \tilde{\mathbf{H}}^+ \mathbf{y} \quad (10)$$

여기서  $\tilde{\mathbf{H}}^+ = (\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}})^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^T$ 는  $\tilde{\mathbf{H}}$ 의 pseudo-inverse 행렬이다. 그리고 rounding operation 과정을 거치고 unimodular 행렬  $\mathbf{T}$ 를 곱하면, LR-ZF의 최종 송신 신호 추정을 할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{LR-ZF} = \mathbf{T}\mathbf{Q}\{\tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF}\} \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{Q}\{\cdot\}$ 는 rounding operation으로 반올림 연산자이다. 또한, 이를 잡음 성분을 고려한 MMSE 검출기에 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE} := (\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} + \sigma_n^2 \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1})^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{y} \quad (12)$$

이를 LR-MMSE라 부른다. 그리고 rounding operation 과정을 거치고 unimodular 행렬  $\mathbf{T}$ 를 곱하면, LR-MMSE의 최종 송신신호 추정을 할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE} = \mathbf{T}\mathbf{Q}\{\tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE}\} \quad (13)$$

잡음 variance를 고려한 LR-MMSE는 일반적으로 LR-MMSE 보다 성능이 우수하다. 이러한 LR-ZF와 LR-MMSE는 lattice reduced  $\tilde{\mathbf{H}}$ 에 의해서 수행되었다.

우리는 MMSE 검출기와 수직적으로 등가를 이루는 MMSE( $\mathbf{H}$ ) 고려하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{MMSE} &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_m)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ &= (\underline{\mathbf{H}}^T \underline{\mathbf{H}})^{-1} \underline{\mathbf{H}}^T \mathbf{y} = \underline{\mathbf{H}}^+ \mathbf{y} \end{aligned} \quad (14)$$

확장된 채널 행렬  $\underline{\mathbf{H}}$ 과 확장된 수신 벡터  $\underline{\mathbf{y}}$ 를 고려한 MMSE( $\mathbf{H}$ ) 검출기이다. 여기서 확장된 채널  $\underline{\mathbf{H}}$ 와 확장된 수신 벡터  $\underline{\mathbf{y}}$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \sigma_n \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{0}_{m,1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서  $\mathbf{I}_m$ 는  $(m \times m)$  단위행렬이고,  $\mathbf{0}_{m,1}$ 는 크기가 0인  $(m \times 1)$  영벡터이다.

MMSE( $\mathbf{H}$ )에서  $\mathbf{H}$ 를 Lattice-Reduction Aided 검출기에 적용하면, Lattice-Reduction Algorithm에 의해 새로운 변형 기저 행렬  $\tilde{\mathbf{H}}$ 와  $\mathbf{T}$ 를 구할 수 있다. 이를 LR-MMSE( $\mathbf{H}$ )라 하며, 이는 기존의 LR-ZF와 LR-MMSE의 성능을 더욱 개선시킨다.

따라서 LR-MMSE( $\mathbf{H}$ )는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE}^{(\mathbf{H})} := \tilde{\mathbf{H}}^+ \mathbf{y} \quad (16)$$

그리고 rounding operation 과정을 거치고 unimodular 행렬  $\mathbf{T}$ 를 곱하면, LR-MMSE( $\mathbf{H}$ )의 최종 송신신호 추정을 할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(\mathbf{H})} = \mathbf{TQ} \left\{ \tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE(\mathbf{H})} \right\} \quad (17)$$

직교 행렬  $\tilde{\mathbf{H}}$ 를 이용한 LR을 이용한 검출기는 최적의 성능을 가지는 MLD의 성능에 좀더 근접한다. 그러나 rounding operation 과정에서 발생하는 양자화 오류로 인해 MLD와 성능 차이를 보인다.

### 3.3 Lattice Reduction Aided Detector based on extended noise variance matrix<sup>[12]</sup>

(14)을 다시 자세히 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF} &:= \mathbf{H}^+ \mathbf{y} = \mathbf{H}^+ (\mathbf{H}\mathbf{x}) + \mathbf{H}^+ \mathbf{n} \\ &= \mathbf{H}^+ (\mathbf{H}\mathbf{x}) + \mathbf{w} \end{aligned} \quad (18)$$

LR 검출기는  $\tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF}$ 을 quantization 한다. 그러나 Rounding operation step에서  $\mathbf{w} = \mathbf{H}^+ \mathbf{n}$ 는 양자 오류를 발생시킨다. 따라서 잡음 분산을 고려하여, 다음과 같이 행렬을 구한다.

$$\boldsymbol{\alpha}^{(\mathbf{H})} = \tilde{\mathbf{H}}^+ \boldsymbol{\sigma}_n^2 \quad (19)$$

여기서  $\boldsymbol{\sigma}_n^2$ 는 잡음 분산 행렬이다.

$$\boldsymbol{\sigma}_n^2 = \sigma_n^2 [\mathbf{I}_{m \times 1}] \quad (20)$$

(19)에서 얻은  $\boldsymbol{\alpha}^{(\mathbf{H})}$ 를 rounding operation step

이전에 더해 주거나 빼준다.

$$\tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF(+)} = \tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF} + \boldsymbol{\alpha}^{(\mathbf{H})} \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF(-)} = \tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF} - \boldsymbol{\alpha}^{(\mathbf{H})} \quad (22)$$

벡터  $\tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF(+)}$ 와  $\tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF(-)}$ 의 행 속에는 좀 더 정확한 송신정보들을 가지게 된다. 그리고 rounding operation 과정을 거치고 unimodular 행렬  $\mathbf{T}$ 를 곱

하면, 다음 두개의  $\hat{\mathbf{x}}_{LR-ZF(+)}$ 와  $\hat{\mathbf{x}}_{LR-ZF(-)}$ 로서 최종 추정 심볼 벡터를 얻을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{LR-ZF(+)} = \mathbf{TQ} \left( \tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF(+)} \right) \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{LR-ZF(-)} = \mathbf{TQ} \left( \tilde{\mathbf{z}}_{LR-ZF(-)} \right) \quad (24)$$

$\hat{\mathbf{x}}_{LR-ZF(+)}$ 와  $\hat{\mathbf{x}}_{LR-ZF(-)}$ 의 행들 사이에 좀 더 정확한 심볼 정보를 갖는다.

이를 같은 방법으로 LR-MMSE( $\mathbf{H}$ )에 적용 하자. 그러면 우리는 다음을 얻을 수 있다

$$\boldsymbol{\alpha}^{(\mathbf{H})} = \tilde{\mathbf{H}}^+ \boldsymbol{\sigma}_n^2 \quad (25)$$

여기서  $\boldsymbol{\sigma}_n^2$ 는 확장된 잡음 분산 행렬이다.

$$\boldsymbol{\sigma}_n^2 = \sigma_n^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m,1} \\ \mathbf{0}_{m,1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$\boldsymbol{\alpha}^{(\mathbf{H})}$ 를 고려하면, 우리는 다음을 얻을 수 있다

$$\tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE(+)}^{(\mathbf{H})} = \tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE}^{(\mathbf{H})} + \boldsymbol{\alpha}^{(\mathbf{H})} \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE(-)}^{(\mathbf{H})} = \tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE}^{(\mathbf{H})} - \boldsymbol{\alpha}^{(\mathbf{H})} \quad (28)$$

이것은  $\tilde{\mathbf{H}}^+ \mathbf{n}$ 에 의해 발생하는 양자화 오류를 감소시키거나 오히려 증가시킨다. 그러나 (+)와 (-)는 양자화 오류를 증가시키는 부분과 감소시키는 부분 서로 상반되게 가지게 된다. 다음은 (27)과 (28)를 각각 quantization 하고  $\mathbf{T}$ 를 곱한다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(+)}^{(\mathbf{H})} = \mathbf{TQ} \left( \tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE(+)}^{(\mathbf{H})} \right) \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(-)}^{(\mathbf{H})} = \mathbf{TQ} \left( \tilde{\mathbf{z}}_{LR-MMSE(-)}^{(\mathbf{H})} \right) \quad (30)$$

우리는  $\Delta = \left[ \hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(+)}^{(\mathbf{H})} \hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(-)}^{(\mathbf{H})} \right]$ 을 얻을 수 있다.  $(m \times 2)$  matrix  $\Delta$ 의 행간 조합으로 candidate symbol set을 만든다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^T \\ &, \bar{x}_l \in \Delta_{(l, \cdot)} \quad \text{for } 1 \leq l \leq m \end{aligned} \quad (31)$$

$\bar{\mathbf{x}}$ 의 size는 최대  $m \times 2^m$  matrix이다. 각 행의 중복되는 수(k)를 제외하면  $m \times 2^{m-k}$  matrix가 된다.

간단하게 예를 들면, 각각  $\hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(+)}^{(H)} = [a, b, c]^T$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(-)}^{(H)} = [e, b, f]^T$  가정한다. 그러면

$$\Delta = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(+)}^{(H)} & \hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(-)}^{(H)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & e \\ b & b \\ c & f \end{bmatrix} \quad (32)$$

그리고 다음 행렬을 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a & a & e & e \\ b & b & b & b \\ c & f & c & f \end{bmatrix} \quad (33)$$

이렇게 얻은 후보 심볼 행렬의 각 열 벡터를 (34)과 같이 minimum Euclidean distance에 해당하는 열 벡터를 계산하여 최종 추정 송심볼로써 검출하고, 만약 후보 심볼 행렬  $\bar{\mathbf{x}}$ 이 오직 하나의 벡터만 가질 경우 Euclidean distance를 계산할 필요 없이  $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}$ 으로 한다.

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\mathbf{x}}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}\|^2 \quad (34)$$

#### IV. Semidefinite를 이용한 잡음 분산 행렬 기반의 LRA 검출기

잡음 분산 행렬을 이용한 검출기는 [12]에서 제안되었으나 여전히 낮은 SNR에서는 선형 검출기의 복잡도 보다 높다. 따라서 본 논문에서는 Semidefinite Relaxation을 이용하여 후보 심볼 행렬 안에서 maximum likelihood를 찾는 방법으로 잡음 분산 행렬을 이용한 검출기의 성능을 그대로 유지하며 복잡도를 줄이고자 한다.

##### 4.1 Semidefinite Relaxation

식 (5) ML detector의 수식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\hat{\mathbf{s}}_{ML} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \Lambda^m} \mathbf{s}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{s} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{s} \quad (35)$$

[7]에서 정의된  $\mathbf{x}^T \mathbf{L} \mathbf{x} = \text{Tr}(\mathbf{L} \mathbf{x} \mathbf{x}^T)$ 와  $\mathbf{x} = [s^T \ 1]^T$ 에 의해서 식(35)은 다음을 만족해야 된다.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}} \quad & \text{tr}(\mathbf{L}\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{e} \\ & \mathbf{X} = \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^T \end{aligned} \quad (36)$$

여기서  $\mathbf{e}$ 는 모든 원소가 1인 행렬이고,  $\mathbf{L}$ 과  $\underline{\mathbf{x}}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & -\mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ -\mathbf{y}^T \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

식(36)에서 constraint  $\mathbf{X} = \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^T$ 는 symmetric 하고 positive semidefinite (PSD)를 의미하는  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ 로 교체하여 다시 쓰면 다음과 같은 convex optimization problem이 된다.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}} \quad & \text{tr}(\mathbf{L}\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{diag}(\mathbf{X}) = \mathbf{e} \\ & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (38)$$

$\mathbf{X} = \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^T$ 가  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ 의 의미를 함축하므로, 식(38)는 식(36) 연장이라 볼 수 있다. 또한, 식(38)의 optimal objective value는 식(36)의 하향 경계 값을 준다.

$\mathbf{s}$ 에 상응하는 rank one solution을 갖는 식(38)는 [9]에서 얻어진다. [9]의 증명되어진 결과는 다음 Theorem 1로 주어진다.

**Theorem 1.** Let  $\mathbf{s}$  be any vector in  $\Lambda^m$ . Also let  $\bar{\mathbf{v}} \triangleq \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}$  and define a set

$$\mathcal{V}_s \triangleq \{ \bar{\mathbf{v}} | \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \text{Diag}(\mathbf{s})^{-1} \text{Diag}(\mathbf{H}^T \bar{\mathbf{v}}) \geq \mathbf{0} \}$$

Then,  $\bar{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_s$  if and only if

$$\mathbf{X} = \underline{\mathbf{x}} \underline{\mathbf{x}}^T, \quad \underline{\mathbf{x}} = [s^T \ 1]^T$$

is a solution to (38)

다음 corollary는 식(36)의 rank one solution이 또한 식(38)의 solution이기 때문에 이와같은 결과로 나타낼 수 있다.

**Corollary 2.** Let  $\hat{\mathbf{s}} \in \Lambda^m$  be any estimate of  $\mathbf{s}$ .

Let  $\bar{\mathbf{v}}$  and  $\mathcal{V}_{\hat{\mathbf{s}}}$  be given as in Theorem 1.

Then

$$\bar{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_{\hat{\mathbf{s}}} \Rightarrow \hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}_{ML}$$

Corollary는 함축된 결과로부터  $\bar{\mathbf{v}} \notin \mathcal{V}_{\hat{\mathbf{s}}}$  이더라도  $\hat{\mathbf{s}}_{ML} = \hat{\mathbf{s}}$ 일 가능성이 있다. 이것은 SDR (Semidefinite Relaxation)이 항상 rank one solution을 결과를 내는 것을 보장하지는 않는다. 하지만,

만약  $\bar{\mathbf{v}} \in \mathcal{L}_i$  이면 항상  $\hat{\mathbf{s}}_{ML} = \hat{\mathbf{s}}$  로서 최적의 값을 갖는다.

### 4.2 Semidefinite Relaxation을 이용한 잡음 분산 행렬 기반의 LRA 검출기

(29)와 (30)에서 얻어진  $\hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(+)}^{(H)}$  와  $\hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(-)}^{(H)}$

로  $\Delta = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(+)}^{(H)} & \hat{\mathbf{x}}_{LR-MMSE(-)}^{(H)} \end{bmatrix}$  을 얻을 수 있다. matrix  $\Delta$  의 행간 조합으로 candidate symbol set  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m]^T$ ,  $\bar{x}_i \in \Delta_{(i,:)}$  for  $1 \leq i \leq m$  을 만든다.

candidate symbol set의 각 열 벡터 채널 행렬  $\mathbf{H}$  와 행렬 곱을 하여 수신 벡터에 빼주어 가상의 noise 벡터를 구한다.

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{y} - \mathbf{H}\bar{x}_i \quad (39)$$

여기서  $\bar{x}_i \in \bar{\mathbf{x}}$  이다. 그리고 다음을 검사한다.

$$\mathbf{Q}_i \triangleq \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \text{Diag}(\bar{x}_i)^{-1} \text{Diag}(\mathbf{H}^T \hat{\mathbf{v}}_i) \succeq \mathbf{0} \quad (40)$$

만약, 이 조건을 만족하면  $\hat{\mathbf{x}} = \bar{x}_i$  로서 최종적으로 송신 신호를 검출 한다. 그러나 이 조건이 만족하지 않는 경우 행렬  $\bar{\mathbf{x}}$  의 열벡터를 candidate 심볼로써 마지막으로 minimum Euclidean distance를 계산하여 심볼을 검출한다.

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\bar{x}_i \in \bar{\mathbf{x}}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\bar{x}_i\|^2 \quad (41)$$

또한  $\bar{\mathbf{x}}$  가 오직 하나의 벡터만 가질 경우 Euclidean distance를 계산할 필요 없이  $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}$  으로 한다. 높은 SNR에서는  $\bar{\mathbf{x}}$  가 가지는 candidate symbol들은 높은 비율로 Semidefinite Relaxation 목적 함수를 만족한다.

## V. 모의실험 환경 및 결과

본 연구는 기존 Lattice-Reduction-Aided Detection과 제안된 확장된 잡음 분산 행렬을 이용한 개선된 검출기와 동일한 채널 환경에서 비교 실험하였다.

### 5.1 모의실험 환경

Matlab를 이용하여  $N_r = N_t = 4$  인 MIMO 시스템에서 각각의 채널마다 독립적인 Rayleigh Fading 채널을 갖도록 하여 모의실험을 하였다. 또한, 변조 방식은

Table 1. Simulation parameter

PARAMETERS	VALUES
Frame length	512 symbols
The number of Transmitter Antennas	4
The number of Receiver Antennas	4
M-QAM	4-QAM
Channel Model	4×4 Rayleigh Fading
Channel coding	None

4-QAM을 사용하였다. 기존 논문에서 제안한 LR-ZF, LR-MMSE, LR-MMSE(H)와 확장된 잡음 분산 행렬을 이용한 개선된 검출기와 비교 분석 하였다.

또한, 복잡도 계산은 행렬연산의 곱셈의 수만 고려하였다. 이는 덧셈기의 수와 연산양이 곱셈기 보다 현저히 작기 때문이다. 또한, Lattice-Reduction Algorithm에 의해 같은 채널이 Lattice-Reduction 되고 SQR에 의해 LLL-Algorithm의 연산양이 상당히 줄어들어 복잡도 계산에 고려되지 않았다.

### 5.2 모의실험 결과

Fig 2는 4×4 MIMO시스템에서 기존의 LR-ZF, LR-MMSE, LR-MMSE(H), [12]에서 제안된 확장된 잡음 분산 행렬을 이용한 LR-MMSE(H)와 본 논문에서 제안된 LR-MMSE(H)에 확장된 잡음 행렬을 이용하여 후보 심볼 list를 만들어 Semidefinite Relaxation을 이용해 list 중에 maximum likelihood를 찾는 방법의 BER 성능 곡선들을 비교하였다. [12]에서 제안된 검출기와 제안된 검출기는 동일 후보 심볼 list에서 maximum likelihood를 찾는 검출

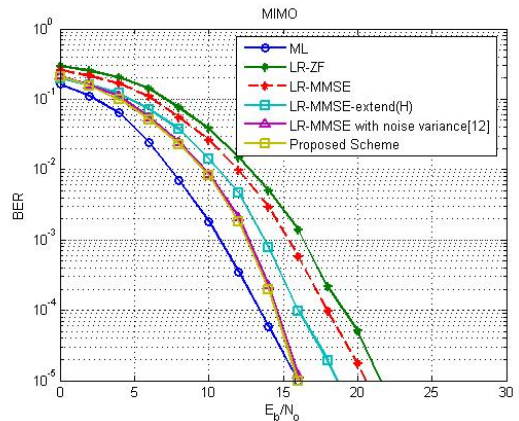


Fig. 2. 4×4 MIMO 시스템에서 기존의 LR 검출기와 제안된 검출기의 성능

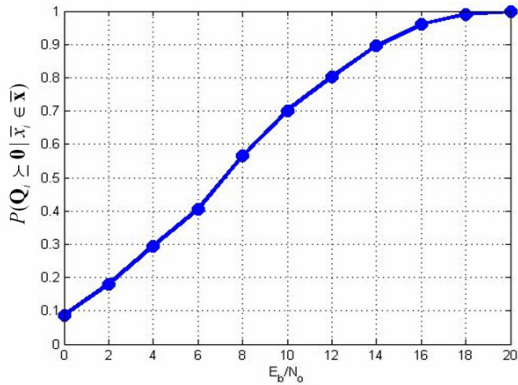


Fig. 3. Candidate symbol set  $\bar{\mathbf{x}}$ 이면서  $Q \geq 0$ 인 확률 곡선

방법으로 BER 성능 곡선은 거의 일치한다. 제안된 검출기는 오율 10-4에서 LR-MMSE(H)보다 약 2 dB 성능 향상을 보이고, 약 16 dB 이상에서는 MLD의 성능에 근접한다. 또한, 기존 LRAD와 MLD 사이에서 다이버시티 이득을 얻는 것을 확인할 수 있다. 또한, 일정 신호 대 잡음 비 이상에서는 candidate symbol set  $\bar{\mathbf{X}}$  안에 MLD의 minimum distance에 해당하는 심볼이 정확히 포함되어 있음을 알 수 있다.

Fig 3에서는 4x4 MIMO 시스템에서 제안된 알고리즘의 사용된 Semidefinite Relaxation의해 정의된 조건식 Q의 확률 곡선으로 candidate symbol set  $\bar{\mathbf{X}}$ 의 list 중에  $Q \geq 0$ , 즉 Semidefinite 인 candidate symbol이 존재 할 확률을 나타낸다. 또한 high SNR에서  $\bar{\mathbf{X}}$ 의 size는 줄어들고  $Q \geq 0$ 인 확률을 커지게 되어 BER 성능이 MLD에 근접한다.

Fig 4는 candidate symbol set  $\bar{\mathbf{X}}$ 의 list 중에  $Q \geq 0$ 인 symbol이 전송된 송신 symbol로 검출될

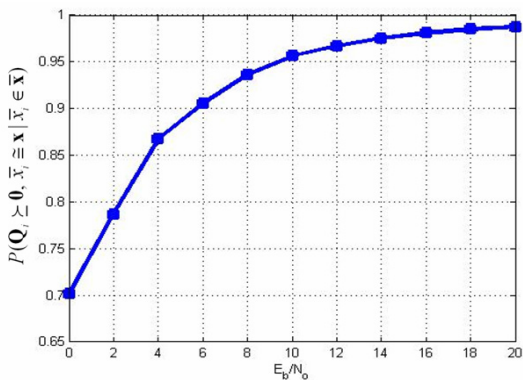


Fig. 4. candidate symbol set  $\bar{\mathbf{X}}$ 이면서  $Q \geq 0$ 인 symbol이 transmitted symbol일 확률 곡선

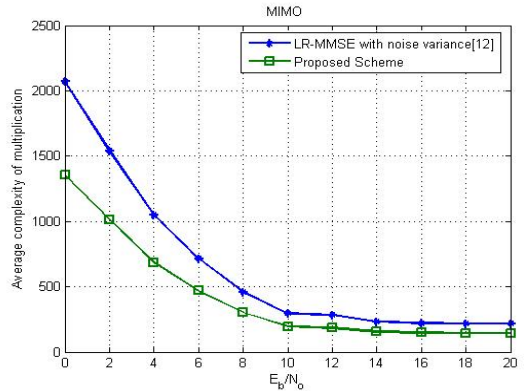


Fig. 5. 확장된 잡음 분산을 이용한 LR-MMSE(H)와 제안된 검출기의 복잡도

확률을 나타낸다. 이 확률 곡선은 SNR이 0dB에서도 candidate symbol set  $\bar{\mathbf{X}}$ 의 list 중에  $Q \geq 0$ 인 symbol이 70%의 높은 확률로 송신 심볼을 검출해 낼 수 있음을 보여준다.

Fig 5는 [12]에서 제안된 확장된 잡음 분산 행렬을 이용한 LR-MMSE(H)와 본 논문에서 제안된 LR-MMSE(H)에 확장된 잡음 행렬을 이용하여 후보 심볼 list를 만들어 Semidefinite Relaxation을 이용한 검출기의 복잡도를 비교하였다. 복잡도 연산은 두 검출기 동일 연산과정은 제외하고 실제로 복잡도의 차이를 만들어내는 candidate symbol set  $\bar{\mathbf{x}}$ 의 Semidefinite과 maximum likelihood 연산을 주요하게 비교하였다. 두 복잡도는  $\bar{\mathbf{x}}$ 의 크기에 관련하여 SNR이 증가함에 따라 감소한다. 제안된 검출기는 Semidefinite을 만족하는 벡터를 송신 심볼로 검출하고 다음 후보들에 대한 Semidefinite 연산을 하지 않기 때문에 [12]에서 제안된 검출기의 복잡도와 평행을 이루지 않고 낮은 SNR 영역에서도 비교적 낮은 복잡도를 갖는다.

## VI. 결론

MIMO 시스템에서 다양한 검출기가 연구되어 왔다. 본 연구에서는 MIMO 시스템에서 LR 검출기의 rounding operation 과정에서 확장된 잡음 분산 행렬을 이용하여 보다 신뢰성 있는 candidate symbol set을 찾고, 이를 Semidefinite Relaxation을 이용해 minimum distance에 해당하는 심볼로 추정함으로써 적은 복잡도를 유지하면서 MLD의 성능에 도달 하였다.

MIMO 시스템의 검출 기법들은 성능과 복잡도 사이에 trade-off 관계를 갖는다. 본 연구를 통해 최

적의 성능을 갖는 MLD의 복잡도 보다 현저히 적은 양의 복잡도를 갖으면서 최적의 성능에 도달하였다. 그 복잡도 또한 선형 검출기의 복잡도 보다 약간 증가한 정도였다.

참 고 문 헌

[1] E.Telatar, "Capacity of Multi-antenna Gaussian Channel," *AT&T Bell Labs Internal Tech. Memo.*, June 1995.

[2] G.D.Golden, G.J.Foschini, R.A. Valenzuela and P.W.Wolniansky, "Detection algorithm and initial laboratory results using the V-BLAST space-time communication architecture," *Electronics Letters*, Vol.35, No.1, pp.1415, Jan. 1999.

[3] S.Verdu, *Multiuser Detection*. Cambridge, U.K: Cambridge Univ. Press, 1998.

[4] E.Agrell, T.Eriksson, A.Vardy, and K.-Zeger, "Closest Point Search in Lattices," *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol.48, No.8, pp.2201-2214, August. 2002.

[5] H.Yao, and G.W.Wornell, "Lattice-Reduction-Aided Detectors for MIMO Communication System," *IEEE Proc. Globecom*, pp.424-428, Nov. 2002.

[6] C.Windpassinger and R.F.H.Fischer, "Low-Complexity Near-Maximum-Likelihood Detection and Precoding for MIMO Systems using Lattice Reduction," *IEEE Proc. ITW*, Mach. 2003.

[7] J.Jalden, B.Ottersten and W.K.Ma, "Reducing the average complexity of ML detection using Semidefinite relaxation", *IEEE ICASSP'05*, Vol.3, pp.1021-1024, Mar. 2005.

[8] A.K.Lenstra, H.W.Lenstra, and L.Lovasz, "Factoring Polynomials with Rational Coefficients," *Math. Ann*, Vol.261, pp.515-534, 1981.

[9] D.Wubben, R.Bohnke, V.Kuhn, and K.D. Kammeyer, "MMSE-Based Lattice Reduction for Near-ML Detection of MIMO systems," *Proc ITG Workshop on Smart Antennas*, March. 2004.

[10] D.Wubben, R.Bohnke, V.Kuhn, and K.D. Kammeyer, "MMSE Extension of V-BLAST based in Sorted QR Decomposition," *IEEE Proc. VTC Fall*, 895-901, Jun. 1981, October. 2004.

[11] D.Wubben, R.Bohnke, V.Kuhn, and K. D.Kammeyer, "Near-maximum-likelihood detection of MIMO systems using MMSE-based lattice reduction," *IEEE Proc. International Conference on Communications (ICC)*, June. 2004.

[12] D.J.Lee, R.W.Kim, and Y.S.Byun, "Improved lattice reduction aided detection based on extended noise variance matrix for MIMO systems", *8th IEEE Workshop on Signal Processing Advance in Wireless Communications (SPAWC)*, June, 2007

이 동 진 (Dong-Jin Lee)

준회원



2006년 2월 인천대학교 전자공학과 졸업  
2008년 2월 인천대학교 전자공학과 석사졸업  
2008년 8월~현재 Broad-Q 연구원 <관심분야> MIMO-OFDM, UWB, 통신 신호 처리

박 수 빈 (Su-Bin Park)

정회원



2007년 2월 인천대학교 전자공학과 졸업  
2007년 3월~현재 인천대학교 전자공학과 석사과정  
<관심분야> MIMO-OFDM, 통신신호처리

변 윤 식 (Youn-Shik Byun)

종신회원



1978년 2월 연세대학교 전기공학과 졸업  
1981년 2월 연세대학교 전기공학과 석사  
1985년 2월 연세대학교 전기공학과 박사  
1990년 8월~1991년 7월 미국 Stanford 대학 전자 공학과 객원 교수  
2004년 9월~2005년 8월 고려대학교 전파통신공학과 객원 교수  
2006년 7월~2008년 2월 시립 인천대학교 공과대학장  
2008년 3월~2008년 7월 시립 인천대학교 교무처장  
1987년 3월~현재 시립 인천대학교 전자공학과 교수  
<관심분야> 디지털 통신 및 신호 처리