최대 자기 상관값이 3인 4진 수열

정회원 장 지 웅*, 종신회원 김 상 효**, 정회원 임 대 운***°

Quaternary Sequence with Maximum Autocorrelation of 3

Ji-Woong Jang* ***Regular Member,***
Sang-Hyo Kim** ***Lifelong Member***, Dae-Woon Lim***° ***Regular Member***

요 약

본 논문에서는 우수한 상관값을 갖는 새로운 4진 수열의 생성법을 제안한다. 새로운 4진 수열은 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 이진 수열과 역 Gray 사상을 이용하여 생성하며 0이 아닌 위상차에서 갖는 자기 상관 값의 최대 크기는 3이다. 새로운 4진 수열은 2진 수열의 형태에 하나의 허수부를 갖는 근사 이진 수열의 형태를 가지므로 균형성이 크게 어긋나나 문자열의 합은 0에 매우 근사한 형태를 갖는다.

ABSTRACT

In this paper, we propose a quaternary sequence with good autocorrelation property. New quaternary sequence is generated by using inverse Gray mapping and binary sequence with ideal autocorrelation. And the maximum magnitude of nontrivial correlation value is 3. Proposed quaternary sequence has only one 1 in one period, so called almost binary sequence. Therefore the balance property is not good, but value of its weight function is nearly 0.

Ⅰ. 서 론

의사 불규칙 수열은 동기, 거리 측정, 대역 확산, 자료의 난수화 및 파일럿 혼합 등 디지털 통신의 다양한 기법에 응용되고 있다. 이러한 수열들이 좋은 성능을 내기 위해서는 자기 자신과 위상을 변화시킨 상태와의 동기점 이외에서의 자기 상관 함수 값이 작아야 한다. 이러한 특성을 만족하는 다양한 수열들 중 구현의 용이성 때문에 이진과 4진 수열이 가장 많이 이용되고 있다. 이러한 수열들을 알아보기 위하여 우선 이진과 4진 수열, 그리고 자기 상관함수에 대해 살펴보아야 한다.

주기가 N인 특정 수열의 동기점 이외에서의 자기 상관값의 절대값의 최대값을 $R_{\max}$라 하자. $R_{\max}=0$이면 완전 수열이 된다. 현재까지 많은 실험을 통하여 짧은 몇몇 주기의 경우를 제외하면 이진과 4진 수열에서는 완전수열이 없다는 가설이 있다[1]. 그러나 m-수열[2], GMW 수열[3] 및 방정식의 사상에 의한 수열[4][12,13] 등 $R_{\max}=1$인 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 이진 수열에 대해서는 다양한 연구가 이루어지고 있다.

우수한 자기 상관 특성을 갖는 4진 수열에 대해서도 많은 연구가 진행되어 왔다[1,5,6,7]. Schotten의 complementary를 기반으로한 수열[1,5,6]은 홀수 주기에 대하여 $R_{\max}=1$로 이상적인 자기 상관 특성을 갖는다. 또한 Luke와 Schotten, Hadinejad-Mahram이 제안한 4진 수열[1]은 짝수 주기에 대하여 $R_{\max}=2$를 만족하며, $N\equiv 2 \mod 4$의 주기에 대해서는 Lee의 완전 수열을 변형하여 생성한 수열과 주기적 곱 방식으로 생성한 $R_{\max}=2$인 4진 수열[1]

* UCSD 전기컴퓨터공학부(stasera.jang@gmail.com), ** 성균관대학교 정보통신공학부 (iamshkim@skku.edu)
*** 동국대학교 정보통신공학과 (daewoonlim@gmail.com) (°: 교신저자)
논문번호 : KICS2008-10-449, 접수일자 : 2008년 10월 13일, 최종논문접수일자 :2008년 11월 27일

이 존재한다. 이들 수열은 현재까지 알려진 자기 상관 특성이 가장 좋은 4진 수열들이다.

본 논문에서는 우수한 상관값을 갖는 새로운 4진 수열의 생성법을 제안한다. 새로운 4진 수열은 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 이진 수열과 역 Gray 사상을 이용하여 생성하며 0이 아닌 위상차에서 갖는 자기 상관 값의 최대 크기는 3이다. 새로운 4진 수열은 2진 수열의 형태에 하나의 허수부를 갖는 근사 이진 수열의 형태를 가지므로 균형성이 크게 어긋나나 문자열의 합은 0에 매우 근사한 형태를 갖는다.

주기가 N인 M진 수열 $s_1(t)$와 $s_2(t)$간의 상관 함수 $R_{s_1,s_2}(\tau)$는 다음과 같이 정의된다[8,9].

$$R_{s_1,s_2}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}\omega_M^{s_1(t)-s_2(t+\tau)}$$

단, ω_M은 M차 원시 복소 단위원이다.

이제 $\phi[a,b]$가 다음과 같이 정의되는 역 Gray 사상이라고 하자.

$$\phi[a,b]=\begin{cases}0, \text{if} & (a,b)=(0,0)\\ 1, \text{if} & (a,b)=(0,1)\\ 2, \text{if} & (a,b)=(1,1)\\ 3, \text{if} & (a,b)=(1,0).\end{cases}$$

양의 정수 N에 대해 $a(t)$와 $b(t)$가 주기가 N인 이진 수열이라 하고 $q(t)=\phi[a(t),b(t)]$로 정의하면 다음이 성립한다[7].

$$\omega_4^{q(t)}=\frac{1+\omega_4}{2}(-1)^{a(t)}+\frac{1-\omega_4}{2}(-1)^{b(t)}. \qquad (1)$$

Ⅱ. 우수한 자기 상관 특성을 갖는 4진 수열의 생성법

본 장에서는 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 이진 수열과 역 Gray 사상을 이용하여 우수한 상관값을 갖는 새로운 4진 수열의 생성법을 제안한다.

Krone와 Sarwate는 역 Gray 사상으로 생성한 4진 수열과 생성에 사용된 이진 수열 사이에 다음의 관계가 성립함을 유도하였다[7].

사전정리 1.(Krone and Sarwate [7]) $a(t)$와 $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$가 동일한 주기를 갖는 이진 수열이라고 하자. 이제 $p(t)$와 $q(t)$가 각각 $p(t)=\phi[a(t),b(t)]$, $q(t)=\phi[c(t),d(t)]$로 정의된 4진 수열이라 하자. 이 때, $p(t)$와 $q(t)$간의 상관함수 $R_{p,q}(\tau)$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}R_{p,q}(\tau)=&\ \frac{1}{2}\{R_{a,c}(\tau)+R_{b,d}(\tau)\}\\ &+\frac{\omega_4}{2}\{R_{a,d}(\tau)-R_{b,c}(\tau)\}.\end{aligned}$$

□

역 Gray 사상과 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 이진 수열로부터 다음 정리와 같은 우수한 상관 특성을 갖는 4진 수열을 생성할 수 있다.

정리 2. 양의 정수 N에 대해, $b(t)$를 주기가 N인 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 이진 수열이라 하자. 이 때, 다음과 같이 정의되는 수열 $q(t)$는 주기가 N이고 동기점 이외의 위상에서 자기 상관함수의 최대 크기가 3인 4진 수열이다.

$$q(t)=\phi[b(t)\oplus\delta(t),b(t)]$$

단, $\oplus$는 이진 XOR연산이고, $\delta(t)$는 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$\delta(t)=\begin{cases}1, \text{for } t=0\\ 0, \text{otherwise.}\end{cases}$$

증명) (1)에 의해 다음의 식이 성립함은 자명하다.

$$\omega_4^{q(t)}=\frac{1+\omega_4}{2}(-1)^{b(t)\oplus\delta(t)}+\frac{1-\omega_4}{2}(-1)^{b(t)}$$

$q(t)$의 자기 상관함수를 $R_q(\tau)$, $b(t)$의 자기 상관함수를 $R_b(\tau)$라 하면, 위 식과 사전정리 1에 의해 다음의 식 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}R_q(\tau)=&\sum_{t=0}^{N-1}\omega_4^{q(t)-q(t+\tau)}\\ =&\ \frac{1}{2}\{R_{b\oplus\delta}(\tau)+R_b(\tau)\}\\ &+\frac{\omega_4}{2}\{R_{b\oplus\delta,b}(\tau)-R_{b,b\oplus\delta}(\tau)\}.\end{aligned}$$

$\delta(t)$의 정의에 의해 위 식의 $R_{b\oplus\delta}(\tau)$와 $R_{b\oplus\delta,b}(\tau)$, $R_{b,b\oplus\delta}(\tau)$는 다음과 같이 정리 된다.

$$\begin{aligned}
R_{b\oplus\delta}(\tau) &= \sum_{t=0}^{N-1}(-1)^{\{b(t)\oplus\delta(t)\}+\{b(t+\tau)\oplus\delta(t+\tau)\}}\\
&= \sum_{t=0}^{N-1}(-1)^{b(t)+b(t+\tau)}\\
&\quad -(-1)^{b(0)+b(\tau)}-(-1)^{b(-\tau)+b(0)}\\
&\quad +(-1)^{b(0)\oplus 1+b(\tau)}+(-1)^{b(-\tau)+b(0)\oplus 1}\\
&= \sum_{t=0}^{N-1}(-1)^{b(t)+b(t+\tau)}\\
&\quad -2\left\{(-1)^{b(0)+b(\tau)}+(-1)^{b(-\tau)+b(0)}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{b\oplus\delta,b}(\tau) &= \sum_{t=0}^{N-1}(-1)^{\{b(t)\oplus\delta(t)\}+\{b(t+\tau)\}}\\
&= \sum_{t=0}^{N-1}(-1)^{b(t)+b(t+\tau)}\\
&\quad -(-1)^{b(0)+b(\tau)}+(-1)^{b(0)\oplus 1+b(\tau)}\\
&= \sum_{t=0}^{N-1}(-1)^{b(t)+b(t+\tau)}\\
&\quad -2\times(-1)^{b(0)+b(\tau)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{b,b\oplus\delta}(\tau) &= \sum_{t=0}^{N-1}(-1)^{\{b(t)\}+\{b(t+\tau)\oplus\delta(t+\tau)\}}\\
&= \sum_{t=0}^{N-1}(-1)^{b(t)+b(t+\tau)}\\
&\quad -(-1)^{b(-\tau)+b(0)}+(-1)^{b(-\tau)+b(0)\oplus 1}\\
&= \sum_{t=0}^{N-1}(-1)^{b(t)+b(t+\tau)}\\
&\quad -2\times(-1)^{b(-\tau)+b(0)}.
\end{aligned}$$

이진 수열 $b(t)$가 이상적인 자기 상관 특성을 가지므로 $\sum(-1)^{b(t)+b(t+\tau)}=-1$임은 자명하다. 그러므로 4진 수열 $q(t)$의 자기 상관함수 $R_q(\tau)$는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
R_q(\tau) = -1-&\left\{(-1)^{b(0)+b(\tau)}+(-1)^{b(-\tau)+b(0)}\right\}\\
&j\left\{(-1)^{b(-\tau)+b(0)}-(-1)^{b(0)+b(\tau)}\right\}.
\end{aligned}$$

그러므로 $R_q(\tau)$값은 다음과 같이 $b(0)+b(\tau)$와 $b(0)+b(-\tau)$ 에 의해 결정되는 것이 자명하다.

$$R_q(\tau)=\begin{cases}
-3, & \text{for } b(0)+b(\tau)=0 \\ & \text{and } b(0)+b(-\tau)=0\\
1, & \text{for } b(0)+b(\tau)=1 \\ & \text{and } b(0)+b(-\tau)=1\\
-1+2j, & \text{for } b(0)+b(\tau)=1 \\ & \text{and } b(0)+b(-\tau)=0\\
-1-2j, & \text{for } b(0)+b(\tau)=0 \\ & \text{and } b(0)+b(-\tau)=1.
\end{cases}$$

□

이상적인 자기 상관 특성을 갖는 m-수열을 이용하여 다음과 같이 정리 2의 예제를 만들 수 있다.

예제 3. 주기가 15인 m-수열 $m(t)$는 다음과 같이 주어진다.

$$m(t)=0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1,1$$

이를 정리 2의 생성법에 적용하면 다음과 같이 4진 수열 $q(t)$를 얻을 수 있다.

$$q(t)=3,0,0,2,0,0,2,2,0,2,0,2,2,2,2$$

이 때, $q(t)$의 자기 상관 함수 $R_q(\tau)$는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
R_q(\tau) = &\ 15,-1-2j,-1-2j,1,-1-2j,\\
&-3,1,-1+2j,-1-2j,1,\\
&-3,-1+2j,1,-1+2j,-1+2j
\end{aligned}$$

□

정리 2에서 생성한 4진 수열 $q(t)$의 문자합은 다음 따름정리와 같이 주어진다.

따름정리 4. 정리 2에서 생성한 4진 수열 $q(t)$의 문자합은 다음과 같이 주어진다.

$$\sum_{t=0}^{N-1}\omega_4^{q(t)}=\begin{cases}-2+j, & \text{for } b(0)=0\\ -j, & \text{for } b(0)=1.\end{cases}$$

증명) $q'(t)=\phi[b(t),b(t)]$로 정의하면 다음이 성립함은 자명하다.

$$\sum_{t=0}^{N-1}\omega_4^{q'(t)}=-1.$$

또한 $q(t)$와 $q'(t)$ 간에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$q(t)=\begin{cases}q'(0)+1, & \text{for } t=0\\ q'(t), & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$q'(0)$의 정의로부터 $\omega_4^{q'(0)}=(-1)^{b(0)}$임은 자명하므로 $q(t)$의 문자합이 다음과 같음은 자명하다.

$$\sum_{t=0}^{N-1}\omega_4^{q(t)}=\begin{cases}-2+j, & \text{for } b(0)=0\\ -j, & \text{for } b(0)=1.\end{cases}$$

□

Ⅲ. 결 론

본 논문에서는 이상적인 자기상관 특성을 갖는 이진 수열과 역 Gray 사상을 이용하여 좋은 상관 특성

을 갖는 4진 수열을 생성하는 방법을 제시하였다. 새로 제안된 생성법을 통해 이상적인 자기 상관 특성을 갖는 이진 수열이 존재하는 경우 항상 동일한 주기의 우수한 자기 상관 특성을 갖는 4진 수열을 만들 수 있다. 4진 수열은 QAM등에 별도의 변형 없이 바로 적용이 가능하므로 이진 수열과 같이 QAM등에 적용하기 위한 변형에서 오는 성능의 열화가 없다는 장점이 있어 새로 제안된 4진 수열의 자기 상관 특성이 생성에 사용된 이진 수열보다 조금 증가하더라도 실용적인 면에서는 그 활용도가 더 크다 할 수 있다. 또한 균형성이 좋지는 않으나 문자합이 0에 가까운 값을 가지므로 이를 보완할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] H. Dieter Luke, H. D. Schotten, and H. Hadinejad-Mahram, “Binary and quadriphase sequences with optimal autocorrelation properties: A Survey,” *IEEE Trans. Inform. Theory,* Vol.49, No.12, pp.3271-3282, Dec. 2003.

[2] J. F. Dillon and H. Dobbertin, “New cyclic dierence sets with Singer parameters,” F*inite Fields and Their Applications 10,* pp.342-389, 2004.

[3] B. Gordon, W. H. Mills, and L. R. Welch, “Some new dierence sets,” *Canadian J. Math.,* Vol.14, No.4, pp.614-625, 1962.

[4] J.-S. No, H. Chung, and M. S. Yun, “Binary pseudorandom sequences of period 2^n-1 with ideal autocorrelation generated by the polynomial $z^d+(z+1)^d$,” *IEEE Trans. Inform. Theory,* Vol.44, No.3, pp.1278-1282, May 1998.

[5] H. D. Schotten, “New optimum ternary complementary sets and almost quadriphase, perfect sequences,” *in Proc. Int. Conf. Neural Networks and Signal Processing ’95, Nanjing, China,* Dec. 1995, pp.1106-1109.

[6] H. D. Schotten, “Optimum complementary sets and quadriphase sequences derived from q-ary m-sequences,” *in Proc. IEEE Int. Symp. Inform. Theory ’97, Ulm, Germany,* 1997, p. 485

[7] S. M. Krone and D. V. Sarwate,“Quadriphase sequences for spread spectrum multiple access communication,” *IEEE Trans. Inform. Theory,* Vol.IT-30, No.3, pp.520-529, May 1984.

[8] C. E. Lee, “Perfect q-ary sequences from multiplicative characters over $GF(p)$,” *Electron. Lett.,* Vol.28, pp.833-835, 1992.

[9] V. M. Sidel’nikov, “Some k-valued pseudo-random sequences and nearly equidistant codes,” *Probl. Inf. Transm.,* Vol.5, No.1, pp.12-16, 1969.

[10] A. Lempel, M. Cohn, and W. L. Eastman, “A class of binary sequences with optimal autocorrelation properties,” *IEEE Trans. Inform. Theory,* Vol.23, pp.38-42, Jan. 1977.

[11] C. Ding, T. Helleseth, and H. Martinsen “New families of binary sequnces with optimal three-level autocorrelation,” *IEEE Trans. Inform. Theory,* Vol.47, pp.428-433, Jan. 2001.

[12] J.-S. No, H. Chung, H.-Y. Song, K. Yang, J.-D. Lee, and T. Helleseth, “New construction for binary sequences of period pm 1 with optimal autocorrelation using $(z+1)^d+az^d+b$,” *IEEE Trans. Inform. Theory,* Vol.47, No.4, pp.1638-1644, May 2001.

[13] 노종선, 정하봉, 송홍엽, 양경철, 이정도, “최적의 자기상관 특성을 갖는 주기 p^m-1인 이진 시퀀스의 생성,” 한국통신학회논문지(B), 제25권, 6B호, pp.1136-1142, 2000년 6월.

장 지 웅 (Ji-Woong Jang) 정회원

2000년 2월 서울대학교 전기공학부 공학사
2002년 2월 서울대학교 전기컴퓨터공학부 석사
2006년 2월 서울대학교 전기컴퓨터공학부 박사
2006년 3월~2008년 6월 삼성전자 책임연구원
2008년 8월~현재 UCSD(postdoc)
<관심분야> 시퀀스, 오류정정부호, 디지털통신, cross-layer coding

김 상 효 (Sang-Hyo Kim) 종신회원

1998년 2월 서울대학교 전기공학부 학사
2000년 2월 서울대학교 전기공학부 석사
2004년 2월 서울대학교 전기·컴퓨터공학부 박사
2004년 3월~2006년 7월 삼성전자, 책임연구원
2006년 8월~2007년 8월: 박사후 연구원(USC)
2007년 9월~현재 성균관대학교 정보통신공학부 조교수
<관심분야> 오류정정부호, 다중 안테나 시스템, 시퀀스, 협력 통신

임 대 운 (Dae-Woon Lim) 정회원

1994년 2월 한국과학기술원 전기및전자공학과 학사
1997년 2월 한국과학기술원 전기및전자공학과 석사
2006년 8월 서울대학교 전기·컴퓨터공학부 박사
1995년 9월~2002년 8월 LS산전(주) 중앙 연구소 선임 연구원
2006년 9월~현재 동국대학교 IT학부 조교수
<관심분야> OFDM, 부호 이론, 시공간 부호