

MAXFLAT FIR 필터의 일반적이고 간편한 설계를 위한 새로운 기술

종신회원 전 준 현*

A New Technique for the General and Simple Design of MAXFLAT FIR filters

Joonhyeon Jeon* *Lifelong Member*

요 약

본 논문에서는 요구되어진 차단주파수를 갖는 MAXFLAT FIR 필터 설계를 위하여 일반적이고 뚜렷한 방식을 제안하였다. 제안된 기술은 요구된 차단주파수를 갖는 필터계수를 계산에 의해 직접 구할 수 있는 임의의 차단주파수를 갖는 임펄스응답의 일반 공식과 필터의 평탄 차수를 결정하기 위하여 논리적으로도 분명한 공식을 제공한다. 또한 실험 결과 제안된 기술이 요구된 차단주파수를 갖는 MAXFLAT(maximally flat) FIR 필터 설계에 있어서 계산적으로 효율적이고 정확한 방식이라는 것이 입증되었다.

Key Words : MAXFLAT FIR Filter, FIR Filter, Nonrecursive Filter, Digital Filter

ABSTRACT

In this paper, a general and explicit technique is presented for determining the filter coefficients of maximally flat (MAXFLAT) FIR filter with the magnitude response exactly passing through a prescribed cutoff point. This technique is based on a general formula (i.e. impulse response) with an arbitrary cutoff point and permits direct computation of the coefficients of this filter type with a specified cutoff point. The technique provides an explicit method for choosing the order of flatness of the filter with the specified cutoff point. Also, in the paper, it is shown to give a computationally efficient and accurate solution to the design of the filters with the desired cutoff point.

I. 서 론

비선형 및 선형 위상을 갖는 MAXFLAT (maximally flat) FIR 필터 설계는 필터계수를 구하기 위하여 폐쇄형 함수(closed-form function)를 사용한다는 장점이 있다^[1-9]. 이 가운데 선형위상을 갖는 MAXFLAT FIR 필터 설계는 필터 차수 $2N$ 이 주어질 때 폐쇄형 함수의 주파수 응답(진폭 응답-차단주파수, 통과대역과 정지대역의 평탄 및 천이대역 기울기 등)은 평

탄차수(order of flatness) K 에 의하여 결정된다^{[5]-[9]}. 따라서 이러한 MAXFLAT FIR 필터 설계에서 원하는 주파수응답을 갖는 필터계수를 얻기 위해 가장 중요한 것은 주어진 필터차수와 차단주파수에 대해 K 를 정확하게 결정하는 것이다. 그럼에도 불구하고 대부분의 방법들은 다양한 폐쇄형 함수들을 제시 하였으나 근사화된 K 를 구하는 실험적인 관계식(empirical relation)들을 사용하였다^{[4],[6],[7]}. 이 경우 설계된 필터의 진폭응답은 절대로 원하는 차단주파수를 통과

※ 본 논문은 2008년도 동국대학교 연구년 지원에 의하여 이루어졌음.

* 동국대학교 서울캠퍼스 공과대학 컴퓨터정보통신공학부 정보통신공학전공 부교수(memory@dgu.edu)

논문번호 : KICS2010-01-040, 접수일자 : 2010년 1월 27일, 최종논문접수일자 : 2010년 4월 2일

하지 않으며, 차단주파수 오차뿐만 아니라 심각한 진폭응답 오류를 발생시킨다. Herrmann^[4]이 K 를 결정하기 위하여 실험적인 관계식을 발표한 이래 많은 설계방식들이 그의 공식을 사용하거나 K 결정의 정확도를 높이기 위한 노력들이 계속되었다^{[6],[7]}. 예로서 Thajchayapong^등^[6]은 Herrmann이 구한 K 의 주변 차수(adjacent order) 2개를 구하여 Miller^[5]가 제안한 q 평면 함수에서 정확한 차단주파수를 갖도록 하는 방법을 제시하였으나, 평탄차수를 선택을 위한 뚜렷한 관계식을 제시하지 않아 통과대역(passband)과 정지대역(stopband)에서 진폭왜곡(magnitude distortion)이 발생하는 문제를 갖고 있다. 또한 RAJAGOPAL^등^[7]은 Herrmann이 사용한 경험적 관계식에 대한 이론적 분석을 제공하였으나 문제 해결 방법은 제시하지 않았다. 이와 같이 현재까지 발표된 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식들은 폐쇄형 함수를 성공적으로 발표한 반면 필터계수를 정확하게 구하기 위한 K 의 결정에 대한 문제가 남아있음을 알 수가 있다. 더욱이 앞서 설명한 대부분의 방식들이 필터계수를 구할 때, 주어진 필터차수와 차단주파수에 대해 K 를 결정하고 정의되어진 폐쇄형 함수를 전달함수(transfer function)로 변환하여 임펄스함수를 구하는 복잡한 설계과정을 필요로 한다. 즉, 필터계수를 직접 구하는 임펄스 응답의 일반해(general formula)를 제시하지 못하였다. 또한 최근에 발표한 논문^{[8],[9]}에서도 폐쇄형 전달함수를 이용한 유사한 방법을 제시하였으나 K 의 결정시 이론적인 분석이 이루어지지 않았으며, 직접적인 공식 유도도 구해진 일반해가 필터차수가 증가할 때 필터계수의 오류가 발생하는 문제점이 발견되었다.

본 논문에서는 MAXFLAT FIR 필터 설계를 위해 일반화된 폐쇄형 주파수함수(Generalized closed-form frequency function: G-function)를 기반으로 하는 새로운 방법을 제안하였다. 여기서 G함수는 진폭응답이 항상 임의의 차단주파수 ω_c 를 항상 통과하도록 차단주파수 인자(factor) $f(\omega_c)$ 를 가지고 있다. 제안된 방법에서는 $f(\omega_c)$ 사용을 통하여 주어진 필터차수와 요구된 차단주파수에 대하여 K 의 최대 값을 결정하는 확실한 해법을 제시하였다. 또한 제안 방식에서는 필터계수를 직접적으로 구할 수가 있는 필터계수(임펄스 응답)의 일반해를 사용하였는데, 이는 G함수를 임펄스응답으로 변환함으로써 유도되었다. 실험결과 본 논문에서 제안하는 방식은 사용하였을 때, 기존의 방식들에 비하여 매우 정확

한 주파수 응답을 갖는 MAXFLAT FIR 필터를 설계할 수가 있었으며, 또한 필터계수를 임펄스응답 일반식으로부터 직접구할 수가 있어 계산 효율을 크게 향상 시킬 수 있음을 알 수가 있었다.

제2장에서는 기존의 MAXFLAT FIR 필터 설계방식들에 대한 분석과 문제점을 설명하였으며, 제3장에서는 본 논문에서 주장하고자 하는 MAXFLAT FIR 필터 계수를 구하기 위한 일반화된 공식과 평탄차수 결정 방법을 제안하였다. 제4장에서는 새로운 필터 설계 기술에 의해 구현된 필터들에 대한 성능을 분석하였으며, 끝으로 제5장에서는 결론을 맺었다.

II. 기존의 MAXFLAT FIR 필터 설계 방식 분석

2.1 폐쇄형 다항식

일반적으로 실계수가 대칭이고 제로위상을 갖는 $2N$ 의 필터 차수의 저역통과 FIR 필터의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{2N} h_n z^{-N+n} \quad (1)$$

여기서 $h_n = h_{2N-n}$ 이다. 이 필터의 주파수응답은 $z = e^{jw}$ 을 대입하므로써 다음과 같이 표현된다.

$$H(e^{jw}) = h_N + 2 \sum_{n=1}^N h_{N-n} \cos(nw) \quad (2)$$

이때 저역통과 FIR 필터가 통과대역 과 저지대역에서 MAXFLAT한 진폭응답(magnitude response)을 갖기 위해서는 필터의 진폭응답 함수 $H(w)$ 가 다음과 같은 조건들을 만족해야 한다.

$$[H(e^{jw})]_{w=0} = 1 \quad (3a)$$

$$\left[\frac{\partial^k H(e^{jw})}{\partial w^k} \right]_{w=0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2L+1 \quad (3b)$$

$$\left[\frac{\partial^k H(e^{jw})}{\partial w^k} \right]_{w=0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2K-1 \quad (3c)$$

여기서 L 과 K 는 $w = 0$ 과 $w = \pm \pi$ 에서 $H(e^{jw})$ 의 평탄 정도를 나타내는 파라메타로서 다음과 같다.

$$N = L + K - 1 \quad (4)$$

변환 식을 대입하면

식(3)의 조건들을 고려하였을 때, Herrmann^[4]은 식(2)에서 $\cos w = 1 - 2x$ 의 변환을 통하여 Hermite 보간 다항식(interpolation polynomial)을 기반으로 하는 다음과 같은 폐쇄형 다항식을 제안하였다

$$\Omega^2 = \frac{x}{1-x} \quad (11)$$

이 되며, 식(11)을 식(9)에 적용하였을 때 Miller의 다항식 $\Omega_{N,K}(x)$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$P_{N,K}(x) = (1-x)^K \sum_{j=0}^{N-K} d_j x^j, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5)$$

$$\Omega_{N,K}(x) = \sum_{j=0}^{N-K} \binom{N}{j} x^j (1-x)^{N-j} \quad (12)$$

여기서

식(12)을 $x=1$ 에서의 평탄차수 K 을 갖는 항을 추가하고 식을 간단히 정리하면

$$d_j = \binom{K-1+j}{j} = \frac{(K-1+j)!}{(K-1)! j!} \quad (6)$$

Miller^[5]는 아래의 식(7)에서 나타낸 바와 같이 z 평면을 q 평면으로 등각사상(conformal mapping)함으로써

$$\begin{aligned} \Omega_{N,K}(x) &= (1-x)^K \sum_{j=0}^{N-K} \binom{N}{j} x^j (1-x)^{N-K-j} \\ &= (1-x)^K \sum_{j=0}^{N-K} d_j x^j \end{aligned} \quad (13)$$

$$z^{-1} = \frac{1-q}{1+q}, \quad q = \sum + j\Omega \quad (7)$$

식(1)로 표현되는 디지털 전달함수를 아래의 고전적인 아날로그 MAXFLAT FIR 필터의 전달 함수로 변환하여 필터를 설계하였다.

와 같이 되어 Herrmann이 제안한 식(5)와 동일한 폐쇄형 다항식을 얻을 수가 있음을 알 수가 있다. 즉, Miller는 Herrmann과 동일한 폐쇄형 다항식을 사용하였다는 것을 알 수가 있다.

RAJAGOPAL^[7]은 다음과 같이 표현되는 Bernstein 다항식($0 \leq x \leq 1$)에서

$$H_a(q) = \frac{1}{(1-q^2)^N} \sum_{j=0}^{N-K} \binom{N}{j} (-q^2)^j \quad (8)$$

$$B_N(f;x) = \sum_{j=0}^N f\left(\frac{j}{N}\right) \binom{N}{j} x^j (1-x)^{N-j} \quad (14)$$

식(8)에 $q=j\Omega$ 을 대입하면 주파수응답 $H_a(j\Omega)$ 는

K 에 따른 $f(x)$ 함수를 다음과 같이 정의하므로써

$$H_a(j\Omega) = \frac{1}{(1+\Omega^2)^N} \sum_{j=0}^{N-K} \binom{N}{j} \Omega^{2j} \quad (9)$$

$$f\left(\frac{j}{N}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq N-K \\ 0, & N-K+1 \leq j \leq N \end{cases} \quad (15)$$

로 표현된다. 식(9)로부터 원하는 주파수 응답을 갖는 K 가 구해지면, Miller^[5]는 식(6)의 역 등각사상을 통하여 식(8)을 z 평면의 전달함수로 변환하여 필터계수를 구하였다. 이때 q 평면에서의 주파수 Ω 는 아래와 같은 관계식을 이용하여 z 평면에서의 w 로 표현될 수가 있다.

식(14)와 같이 MAXFLAT FIR 필터의 전달함수를 얻기 위한 다음과 같은 다항식을 얻었다.

$$B_{N,K}(f;x) = \sum_{j=0}^{N-K} \binom{N}{j} x^j (1-x)^{N-j} \quad (16)$$

$$\Omega^2 = \tan^2 \frac{w}{2} = \frac{1 - \cos w}{1 + \cos w} \quad (10)$$

위의 식(16)은 식(12)와 같으며, 따라서 앞서 Miller 다항식에서 설명된 바와 같이 $x=1$ 에서의 평탄차수 K 을 갖는 식(5)와 동일한 폐쇄형 다항식으로 표현될 수 있음을 알 수가 있다. 즉, RAJAGOPAL^[7]은

따라서 식(10)에 Herrmann이 사용한 $\cos w = 1 - 2x$

필터 설계를 위하여 Herrmann^[4]과 동일한 폐쇄형 다항식을 사용하였다는 것을 알 수가 있다.

2.2 평탄차수 결정

앞 절에서 설명된 바와 같이 Herrmann^[4]의 Hermite 다항식, Miller^[5]의 등각사상 방식, RAJAGOPAL 등^[7]의 Bernstein 다항식은 동일한 식(5)의 폐쇄형 다항식을 갖는다. 따라서 이들 방식으로 표현되는 전달함수의 주파수 응답 또한 식(5)의 폐쇄형 다항식으로부터 구한 아래의 주파수응답 함수 $H_0(e^{jw})$, $-\pi \leq w \leq \pi$ 로 표현할 수가 있다.

$$H_0(e^{jw}) = \left(\cos \frac{w}{2} \right)^{2K} \sum_{j=0}^{N-K} d_j \left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2j} \quad (17)$$

식(17)에서 주어진 N 에 대하여 $H_0(e^{jw})$ 의 진폭 응답특성은 평탄차수 K 에 의하여 결정됨을 알 수가 있다. 그러나 필터차수 $2N$ 에 대하여 N 개의 서로 다른 진폭응답을 나타내는 N 개 필터가 존재한다. 따라서 N 개의 다른 진폭응답들 중에서 원하는 차단주파수 $w = w_c$ 을 만족하는 K 을 결정해야 한다. Herrmann^[4]은 식(5)의 다항식을 이용하여 주어진 차단주파수 x_c (이때 $w_c = \arccos(1 - 2x_c)$ 이 된다)를 갖는 필터의 K 값을 결정하기 위하여 다음과 같은 경험적인 관계식을 사용하였다.

$$K = N - \text{int}(Nx_c + 0.5), \quad 0 \leq x_c \leq 1 \quad (18)$$

그림 1은 식(18)에서 $x_c = 0.3$ (이것은 $w_c = 0.369\pi$ 에 해당된다)일 때 주어진 N 에 대하여 구해진 K 에 따른 $H_0(e^{jw})$ 의 실제 차단주파수 응답 특성들을 나타

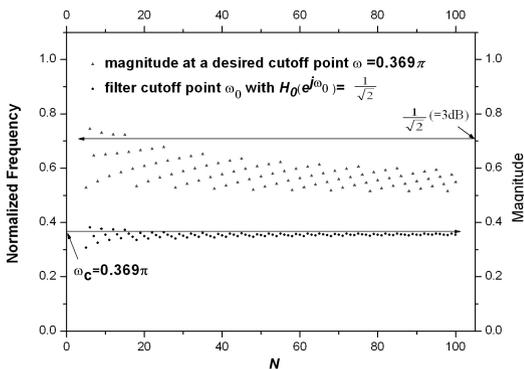


그림 1. 식(18)에 의한 $H_0(e^{jw})$ 의 실제 차단주파수 응답특성

낸 것이다. 그림에서 나타낸 바와 같이 실제 필터 차단 주파수가 요구되어진 $w_c = 0.369\pi$ 와 많은 차이가 있고 $w = 0.369\pi$ 에서의 진폭응답이 $H_0(0.369\pi) \approx 1/\sqrt{2}$ 임을 알 수가 있다.

또한 그림 2는 주어진 (N, K) 에 대한 주파수 응답특성을 나타낸 것으로 앞서 설명된 바와 같이 평탄한 진폭응답을 얻을 수 있는 반면 차단주파수 오차가 있음을 알 수가 있다.

이와 같이 부정확한 K 결정에 따른 필터 차단주파수 오차를 극복하기 위하여 Thajchayapong 등^[6]은 Miller^[5]가 제시한 q 평면의 함수 식(9)에 추가의 항과 식(18)로 구해진 K 의 두 개 주변 값인 $K_1, K_2 (= K_1 - 1)$ 을 제공하는 다음 식을 사용하였다.

$$H_a(j\Omega) = \frac{1}{(1 + \Omega^2)^N} \left\{ \sum_{j=0}^{N-K_1} \binom{N}{j} \Omega^{2j} + C_{N-K_2} \Omega^{2(N-K_2)} \right\}, \quad 0 \leq C_{N-K_2} \leq \binom{N}{N-K_2} \quad (19)$$

여기서 C_{N-K_2} 는 필터의 진폭응답이 K_1 과 K_2 사이의 값을 갖으며, 차단주파수 조건인 $H_a(j\Omega_c) = 1/\sqrt{2}$ 에 의하여 아래와 같이 주어진다.

$$C_{N-K_2} = \frac{1}{\Omega_c^{2(N-K_2)}} \left\{ \frac{(1 + \Omega_c^2)^N}{\sqrt{2}} - \sum_{j=0}^{N-K_1} \binom{N}{j} \Omega_c^{2j} \right\} \quad (20)$$

Thajchayapong 등^[6]이 제안한 위의 방식은 설계된 필터에서 정확한 차단주파수를 만족하는 진폭응답을 얻을 수가 있다. 그럼에도 불구하고 이 방식은 Miller^[5]가 제안한 q 평면의 등각사상 이нал로그 변

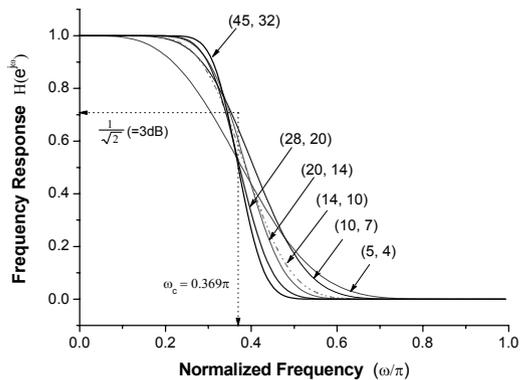


그림 2. (N, K) 에 따른 $H_0(e^{jw})$ 응답 특성

환 함수의 응용으로 Herrmann^[4]의 Hermite 다항식이나 RAJAGOPAL^등[7]의 Bernstein 다항식으로서의 응용이 불가하다. 또한 필터 계수를 얻기 위한 전달 함수, 즉 식(17)과 같이 주파수 응답이 표현되는 일반적인 방법을 제시하지 않아 매우 복잡한 계산을 해야 하는 단점이 있고 C_{N-K_c} 의 선택에 대한 어떠한 논리적인 방법도 제시되지 않았다.

III. 제안 방식

3.1 임의의 차단주파수를 갖는 폐쇄형 주파수 응답 함수

요구된 차단주파수를 갖는 제로위상의 MAXFLAT FIR 저역통과 필터를 정확하고 안정적으로 얻기 위해서는 먼저 임의의 차단주파수 w_c 을 갖는 일반화된 폐쇄형 주파수 응답 함수가 반드시 필요하다. 따라서 본 논문에서는 이러한 함수를 얻기 위하여 식(17)에서 $(\sin w/2)^{2(N-K)}$ 의 계수 d_{N-K} 대신 새로운 차단 파라미터(cutoff parameter) $\Omega_{N-K,K}$ 을 사용하여 일반화된 폐쇄형 주파수 응답 함수를 다음과 같이 정의하기로 하자.

$$H(e^{jw}) = \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{2K} \times \left\{ \sum_{j=0}^{N-K-1} d_j \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{2j} + \Omega_{N-K,K} \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{2(N-K)} \right\} \quad (21)$$

여기서 $\Omega_{N-K,K}$ 는 $H(e^{jw})$ 가 항상 요구된 차단주파수를 만족하도록 하는 가중요소(weighting factor)로서 $w = w_c$ 일 때 다음과 같은 조건을 이용하여

$$\left[H(e^{jw}) \right]_{w=w_c} = 1/\sqrt{2} \quad (22)$$

아래의 식(23)과 같이 w_c 의 파라메타로 표현된다.

$$\Omega_{N-K,K} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{w_c}{2}\right)^{-2K} - \sum_{j=0}^{N-K-1} d_j \left(\sin \frac{w_c}{2}\right)^{2j}}{\left(\sin \frac{w_c}{2}\right)^{2(N-K)}} \quad (23)$$

이때 식(21)의 $H(e^{jw})$ 는 $\Omega_{N-K,K}$ 에 의하여 $N-K$ 와 K 에 관계없이 $w = w_c$ 에서 $-3dB (= 1/\sqrt{2})$ 값을 항상 만족함을 알 수가 있다. 또한 $\Omega_{N-K,K} = d_{N-K}$ 의 경우 식(21)은 식(17)과 동일함을 알 수가 있다.

3.2 임의의 차단주파수를 갖는 임펄스응답 공식

제로위상을 갖는 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 설계를 위하여 사용된 Herrmann^[4]의 Hermite 다항식, Miller^[5]의 등각사상 변환 함수와 RAJAGOPAL^등[7]의 Bernstein 다항식의 주파수응답함수인 식(17)의 $H_0(e^{jw})$ 와 본 논문에서 제안한 식(21)의 $H(e^{jw})$ 을 함께 나타낼 수 있는 일반화된 폐쇄형 전달함수는 다음과 같이 정의된다^[9].

$$H(z) = \left(\frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2}\right)^{2K} \left\{ \sum_{j=0}^{2M} g_j z^{-M+j} \right\} \quad (24)$$

여기서 $M = N - K$ 이며, $g_j = g_{2M-j}$ 이다. 이때 식(24)을 식(1)과 같이 표현하기 위하여 정리하면

$$H(z) = \frac{1}{2^{2K}} \sum_{i=0}^{2K} \sum_{j=0}^{2M} \binom{2K}{i} g_j z^{-N+(i+j)} \\ = \frac{1}{2^{2K}} \sum_{n=0}^{2N} \sum_{j=0}^{2M} \binom{2K}{n+j-2M} g_{2M-j} z^{-N+n} \quad (25)$$

이며, $2M \leq n+j \leq 2N$ 범위를 갖는다. 식(1)과 식(25)로부터 $h_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ 을 $g_j, j = 0, 1, \dots, M$ 의 관계식으로 표현하면 다음과 같다(부록A).

$$h_n = \frac{1}{2^{2K}} \sum_{j=0}^M \delta_j \left\{ \binom{2K}{n-j} + \binom{2K}{n+j-2M} \right\} g_j \quad (26)$$

여기서 $j \neq M$ 일 때 $\delta_j = 1$ 이고 $\delta_M = 1/2$ 이다. 따라서 식(26)의 임펄스 응답 $h_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ 을 얻기 위해서는 먼저 $g_j, j = 0, 1, \dots, M$ 의 일반해(general solution)를 구해야 한다. $g_j, j = 0, 1, \dots, M$ 는 식(21)의 $H(e^{jw})$ 의 사인제곱지수 $\sin^{2j}(w/2)$ 급수의 합을 아래의 삼각함수의 파워 변환 공식^[10]을 사용하여

$$\left(\sin \frac{w}{2}\right)^{2j} = \frac{1}{2^{2j}} \left\{ \binom{2j}{j} + 2 \sum_{v=1}^j (-1)^v \binom{2j}{j-v} \cos(vw) \right\} \quad (27)$$

코사인 $\cos(jw)$ 급수의 합으로 표현하므로 써 얻어진다.

$$H(e^{jw}) = \left(\cos \frac{w}{2}\right)^{2K} \left\{ g_{M+} + \sum_{j=1}^M g_{M-j} \cos(jw) \right\} \quad (28)$$

여기서 $g_j (= g_{2M-j}, j = 0, 1, 2, \dots, M)$ 는

$$g_j = (-1)^{M-j} \sum_{v=1}^j \frac{d_{M-v}}{2^{2(M-v)}} \binom{2M-2v}{j-v} + \Omega_{MK} \frac{(-1)^{M-j}}{2^{2M}} \binom{2M}{j} \quad (29)$$

이다(부록 A). 따라서 식(29)의 결과 식을 식(26)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수가 있다

$$h_n = \sum_{j=1}^M \sum_{v=1}^j \frac{(-1)^{M-j} c_j}{2^{2(N-v)}} d_{M-v} \times \left\{ \binom{2K}{n-j} + \binom{2K}{n+j-2M} \right\} \binom{2M-2v}{j-v} + \frac{\Omega_{MK}}{2^{2N}} \sum_{j=0}^M (-1)^{M-j} c_j \times \left\{ \binom{2K}{n-j} + \binom{2K}{n+j-2M} \right\} \binom{2M}{j} \quad (30)$$

여기서 $c_j = 1, j = 0, 1, \dots, M-1$ 이고 $c_M = 1/2$ 이다. 식(30)의 $h_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ 은 식(23)의 Ω_{MK} 에 의한 임의의 차단주파수를 갖는 임펄스응답의 일반해로서 만일 w_c 와 $M (= N - K)$ 그리고 K 가 주어진다면 손쉽게 필터계수를 직접 구할 수가 있다. 그러나 식(30)에 의해 구해진 필터 계수들의 주파수응답 $H(e^{jw})$ 는 항상 요구된 차단주파수 응답을 만족함에도 불구하고 주어진 $M (= N - K)$ 과 K 에 따라 평탄 진폭응답을 갖는 필터들뿐만 아니라 통과대역 또는 정지대역에서 진폭왜곡이 나타는 필터들도 무수히 존재함을 식(21)을 통하여 알 수가 있다. 따라서 다음 절에서는 원하는 평탄 진폭응답을 갖는 필터를 선택하기 위해 K 를 결정하는 방식을 새롭게 제안하고자 한다.

3.3 평탄차수 K 결정을 위한 방법

앞서 설명된 바와 같이 Herrmann^[4] 방식은 비록 식(18)과 같은 경험적 관계식들을 사용하여 K 를 결정하는 문제를 갖고 있으나 그가 제안한 Hermite 다항식 기반의 폐쇄형 주파수응답 $H(e^{jw})$ 은 주어진 N 과 K 에 대하여 항상 MAXFLAT 진폭응답을 갖는다. 따라서 본 연구에서는 제안한 $H(e^{jw})$ 함수의 K 를 결정하기 위하여 이러한 Herrmann의 식(17)에 나타낸 $H_0(e^{jw})$ 함수의 진폭응답을 이용하였다. 만약 주어진 $M (= N - K)$ 과 K 에 대하여 식(17)의 $H_0(e^{jw})$ 가 $w = w_c$ 에서 정확히 요구된 차단주파수

응답을 갖는다고 가정하면, $H(e^{jw})$ 의 진폭응답은 항상 다음 조건을 만족한다.

$$|H(e^{jw})| \leq |H_0(e^{jw})|, 0 \leq w \leq w_c \quad (31)$$

또는

$$|H_0(e^{jw})|^2 - |H(e^{jw})|^2 \geq 0, 0 \leq w \leq w_c \quad (32)$$

식(32)에 식(17)과 식(21)의 결과식을 대입하면 정리하면 다음과 같은 부등식을 얻게 된다.

$$\left\{ 2 \sum_{j=0}^{M-1} d_j \left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2j} + (d_M + \Omega_{MK}) \left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2M} \right\} \times \left\{ (d_M - \Omega_{MK}) \left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2M} \right\} \geq 0 \quad (33)$$

위 부등식에서 사인제곱지수 $\sin^{2j}(w/2)$ 급수의 합은 항상 양의 값을 갖고 $\sin^{2M}(w/2) \geq 0$ 이므로 $M = N - K$ 을 대입한 식(33)은 아래와 같이 간단히 정리된다.

$$d_{N-K} - \Omega_{N-K,K} \geq 0 \quad (34)$$

여기서 d_{N-K} 와 $\Omega_{N-K,K}$ 는 식(6)과 식(23)에 의해 주어지며, $d_{N-K} > 0, \Omega_{N-K,K} > 0$ 이므로 식(34)는

$$0 < \frac{\Omega_{N-K,K}}{d_{N-K}} \leq 1 \quad (35)$$

로 표현될 수가 있다. 여기서 식(35)는 $N - K$ 이 주어질 때 $H(e^{jw})$ 이 평탄 진폭응답을 갖는 조건으로 이때 구해진 K 값 가운데 MAXFLAT 진폭응답을 갖는 최대 K 값인 K_{max} 는 일 때 선택되어진다.

$$0 < \left(\frac{\Omega_{N-K,K}}{d_{N-K}} \right)_{max} \leq 1 \quad (36)$$

IV. 설계 및 분석

본 장에서는 제안된 설계방식을 사용하여 MAXFLAT

표 1. $w_c = 0.369\pi$ 과 $N - K = 3$ 일 때 (N, K) 와 $\Omega_{3,K}$

parameters	K					
	3	4	5	6	7	8
N	6	7	8	9	10	11
$\Omega_{3,K}$	-14.017	-5.739	13.230	48.900	109.858	208.368
ε	-1.402	-0.287	0.378	0.873	1.308	1.736
δ_p	0	0	0	0	0.0018	0.021
δ_s	-0.002	-0	0	0	0	0

FIR 저역통과 필터들을 구현하였을 때 필터계수와 진폭응답 특성을 나타내었으며, 이를 바탕으로 설계의 타당성을 입증하고자 한다. 또한 본장의 마지막에는 제안 방식의 고역통과 필터 설계 확장에 대하여도 언급하였다. 표 1은 $w_c = 0.369\pi$ 와 $N - K = 3$ 조건하에서 K에 따른 $\frac{\Omega_{3,K}}{d_{3,K}} (= \varepsilon)$ 을 구하여 식(35) 조건에 적용한 결과를 나타낸 것이다. 표 1에서 δ_p 와 δ_s 는 주어진 (N, K) 와 $\Omega_{3,K}$ 에 대하여 식(21)의 진폭응답의 통과대역과 정지대역에서 발생한 리플(ripple)의 피크(peak) 값을 나타낸 것이다. 또한 그림 3은 표 1을 바탕으로 얻어진 (N, K) 와 $\Omega_{3,K}$ 을 식(21)에 적용한 주파수 응답들을 나타낸 것이다. 그림에서 나타낸 바와 같이 주어진 $N - K = 3$ 에 대해 필터가 MAXFLAT 진폭응답을 갖는 조건은 $(N, K_{max}) = (9, 6)$ 임을 알 수가 있다. 결과로서 표 2는 표 1에서 결정된 $(N, K_{max}) = (9, 6)$ 와 $\Omega_{3,6}$ 을 식(29)와 식(30) 적용하여 직접 구해진 필터계수들을 나타낸 것이다. 표 3은 $w_c = 0.369\pi$ 일 때 $N - K$ 값에 따른 (N, K_{max}) 와 $\left(\frac{\Omega_{N-K,K}}{d_{N-K,K}}\right)_{max} (= \varepsilon_{max})$ 을 구

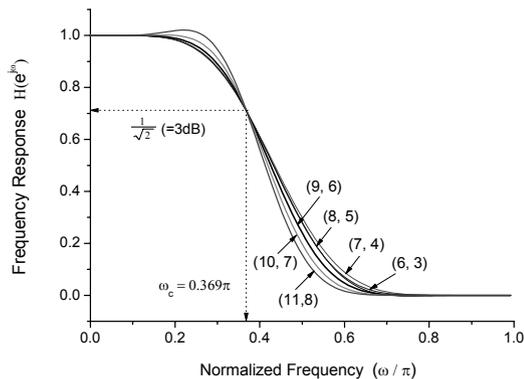


그림 3. 표 1의 (N, K) 에 따른 $H(e^{j\omega})$ 응답 특성

표 2. $w_c = 0.369\pi$ 과 $(9, 6)$ 일 때 필터 계수

n	g_n	h_n
0	-0.7640674	-0.0001865
1	5.8969045	-0.0007988
2	-18.2110111	0.0005184
3	27.1563482	0.0072571
4		0.0060654
5		-0.0275665
6		-0.0506914
7		0.0577330
8		0.2942941
9		0.4267504

표 3. $w_c = 0.369\pi$ 일 때 $N - K$ 에 따른 (N, K_{max}) 와 $\Omega_{N-K, K_{max}}$

parameter	N - K					
	2	4	5	7	10	15
K_{max}	4	8	10	14	20	31
N	6	12	15	21	30	46
$\Omega_{N-K, K_{max}}$	8.278	294.56	1.791 E03	6.681 E04	1.509 E07	3.199 E11
ε_{max}	0.828	0.893	0.894	0.862	0.753	0.928

한 것이며, 그림 4은 이때의 진폭응답을 나타낸 것이다.

결론적으로 실험결과로부터 제안된 기술은 MAXFLAT FIR 저역통과 필터 설계에서 차단주파수 부정확성을 해결하였을 뿐만 아니라 필터계수를 구하기 위한 계산적으로 효율이 뛰어난 일반해를 제공하였음이 입증되었다.

MAXFLAT FIR 고역통과 필터 설계로의 응용은 $\overline{H}(z) = H(-z)$ 로부터 간단히 구할 수가 있다. 이때 주파수응답은 식(21)로부터

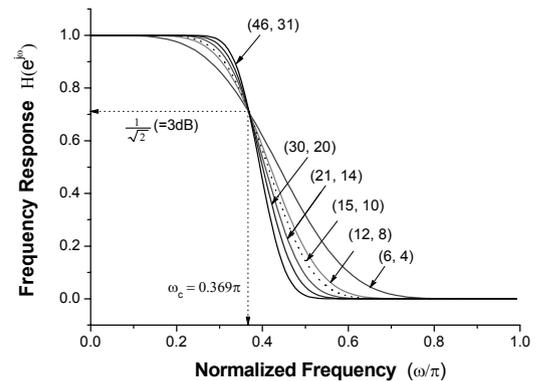


그림 4. 표 3의 (N, K_{max}) 에 따른 $H(e^{j\omega})$ 응답 특성

$$\overline{H}(e^{jw}) = \left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2K} \times \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} d_j \left(\cos \frac{w}{2} \right)^{2j} + \Omega_{N-K,K} \left(\cos \frac{w}{2} \right)^{2M} \right\} \quad (36)$$

이 된다. 식(36)을 만족하는 임펄스 응답 h_n 은 식(30)으로부터

$$\overline{h}_n = (-1)^{-N+n} h_n \quad (37)$$

을 얻을 수가 있으며, 평탄차수 K 결정 조건은 이미 설명된 내용과 같이 유도하면 식(35)와 같다.

V. 결 론

본 논문에서는 먼저 MAXFLAT FIR 필터 설계를 위해 제안되었던 Herrmann^[1]의 Hermite 다항식, Miller^[2]의 등각사상 변환 함수와 RAJAGOPAL 등^[4]의 Bernstein 다항식이 동일한 폐쇄형 전달함수와 주파수응답 함수를 나타냄을 보였다. 또한 이러한 기존 방식들은 필터계수를 직접적이고 간단하게 구할 수 있는 일반해를 제공하지 않았으며, 평탄차수 선택을 위하여 경험적인 관계식을 사용하므로 써 필터 차단주파수가 요구된 차단주파수와 일치하지 않는 문제가 있음을 실험결과로 나타내었다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 본 논문에서는 임의의 차단주파수를 갖는 일반화된 폐쇄형 주파수응답 함수를 도입하였으며, 이를 바탕으로 필터계수를 직접 구할 수 있는 일반해와 최대평탄 차수를 구할 수 있는 논리적이고도 간단한 방법을 제시하였다. 제안된 폐쇄형 주파수응답함수는 기존의 방식들이 사용한 동일한 폐쇄형 전달함수로의 표현이 가능하며, 주파수응답함수가 임의의 차단주파수를 파라메타로 사용하는 일반화된 해를 갖고 있어 모든 방식으로의 응용이 가능하다. 또한 제안된 방식으로 필터를 설계하였을 경우 필터들의 진폭응답이 요구된 차단 주파수를 정확하게 만족할 뿐만 아니라 필터 차수에 따라 다양한 MAXFLAT 진폭응답을 얻을 수 있음을 보였다.

부록 A

식(24)의 폐쇄형 주파수응답 함수 $H(e^{jw})$ 에서 사인제곱지수 $\sin^{2j}(w/2)$ 급수의 합을 아래 식과 같이 $A(e^{jw})$ 라 정의 하였을 때,

$$A(e^{jw}) = \sum_{j=0}^{M-1} d_j \left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2j} + \Omega_{M,K} \left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2M} \quad (A-1)$$

여기서 $M=N-K$ 이다. 이때 $A(e^{jw})$ 는 식(21)에서 정의되고 식(23)의 관계식을 갖는 $g_j, j=0,1,\dots,M$ 계수를 갖는 코사인 $\cos(jw)$ 급수의 합으로 나타낼 수가 있다.

$$A(e^{jw}) = g_M + \sum_{j=1}^M g_{M-j} \cos(jw) \quad (A-2)$$

식(A-2)의 $g_j, j=0,1,\dots,M$ 을 구하기 위하여, 다음의 삼각함수의 파워변환 공식을 식(A-1)에 사용할 경우

$$\left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2j} \equiv \frac{1}{2^{2j}} \left\{ \binom{2j}{j} + 2 \sum_{v=1}^j (-1)^v \binom{2j}{j-v} \cos(vw) \right\} \quad (A-3)$$

$A(e^{jw})$ 는

$$A(e^{jw}) = \sum_{j=0}^{M-1} d_j \left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2j} + \Omega_{M,K} \left(\sin \frac{w}{2} \right)^{2M} = \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} \frac{d_j}{2^{2j}} \binom{2j}{j} + \frac{\Omega_{M,K}}{2^{2M}} \binom{2M}{M} \right\} + 2 \left\{ \sum_{j=1}^{M-1} \frac{d_j}{2^{2j}} \sum_{v=1}^j (-1)^v \binom{2j}{j-v} \cos(vw) + \frac{\Omega_{M,K}}{2^{2M}} \sum_{v=1}^M (-1)^v \binom{2M}{M-v} \cos(vw) \right\} \quad (A-4)$$

되며, 이를 다시 $\cos(jw)$ 항으로 간단히 정리하면

$$A(e^{jw}) = \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} \frac{d_j}{2^{2j}} \binom{2j}{j} + \frac{\Omega_{M,K}}{2^{2M}} \binom{2M}{M} \right\} + 2 \sum_{j=1}^M (-1)^j \left\{ \sum_{v=j}^{M-1} \frac{d_v}{2^{2v}} \binom{2v}{v-j} + \frac{\Omega_{M,K}}{2^{2M}} \binom{2M}{M-j} \right\} \cos(jw) \quad (A-5)$$

이 얻어진다. 식(A-2)와 식(A-5)로부터 다음과 같은 $g_j, j=0,1,\dots,M$ 의 일반 공식(general formula)를 얻을 수가 있다. $g_{M-j}, j=0,1,\dots,M$ 을 정리하면

$$g_{M-j} = (-1)^j \sum_{v=j}^{M-1} \frac{d_v}{2^{2v}} \binom{2v}{v-j} + \Omega_{M,K} \frac{(-1)^j}{2^{2M}} \binom{2M}{M-j} = (-1)^j \sum_{v=1}^{M-j} \frac{d_{M-v}}{2^{2(M-v)}} \binom{2M-2v}{M-j-v} + \Omega_{M,K} \frac{(-1)^j}{2^{2M}} \binom{2M}{M-j} \quad (A-6)$$

또는 $g_j, j = 0, 1, \dots, M$ 을 정리하면

$$g_j = (-1)^{M-j} \sum_{v=M-j}^{M-1} \frac{d_v}{2^{2v}} \binom{2v}{v+j-M} + \Omega_{M,K} \frac{(-1)^{M-j}}{2^{2M}} \binom{2M}{j} \quad (A-7)$$

$$= (-1)^{M-j} \sum_{v=1}^{M-j} \frac{d_{M-v}}{2^{2(M-v)}} \binom{2M-2v}{j-v} + \Omega_{M,K} \frac{(-1)^{M-j}}{2^{2M}} \binom{2M}{j}$$

여기서 $A < B$ 또는 $B < 0$ 일때 $\binom{A}{B} = 0$ 이다. 이때 식 (1)과 식(24)로부터 $h_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ 과 $g_j, j = 0, 1, \dots, 2M$ 의 관계를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$h_n = \frac{1}{2^{2K}} \sum_{j=0}^{2M} \binom{2K}{n+j-2M} g_{2M-j} \quad (A-8)$$

$$= \frac{1}{2^{2K}} \sum_{j=0}^{2M} \binom{2K}{n-j} g_j$$

이때 $g_j = g_{2M-j}, j = 0, 1, \dots, M$ 이므로 식(A-8)은 아래와 같이 $g_j, j = 0, 1, \dots, M$ 으로 표현할 수가 있다.

$$h_n = \frac{1}{2^{2K}} \left\{ \sum_{j=0}^M \binom{2K}{n-j} g_j + \sum_{j=1}^M \binom{2K}{n-M-j} g_{M-j} \right\} \quad (A-9)$$

$$= \frac{1}{2^{2K}} \sum_{j=0}^M c_j \left\{ \binom{2K}{n-j} + \binom{2K}{n+j-2M} \right\} g_j$$

여기서 $c_j = 1, j = 0, 1, \dots, M-1$ 이고 $c_M = 1/2$ 이다. 식(A-7)을 식(A-9)에 대입하면 $h_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ 은

$$h_n = \sum_{j=0}^M \sum_{v=1}^j \frac{(-1)^{M-j} c_j}{2^{2(N-v)}} d_{M-v} \times \left\{ \binom{2K}{n-j} + \binom{2K}{n+j-2M} \right\} \binom{2M-2v}{j-v} \quad (A-10)$$

$$+ \frac{\Omega_{M,K}}{2^{2N}} \sum_{j=0}^M (-1)^{M-j} c_j \times \left\{ \binom{2K}{n-j} + \binom{2K}{n+j-2M} \right\} \binom{2M}{j}$$

이 된다. 이때 얻어진 $h_n, n = 0, 1, \dots, N$ 은 C_K 계수를 포함하고 있어 임의의 차단주파수를 갖는 임펄스 응답의 일반해가 됨을 알 수가 있다.

참고 문헌

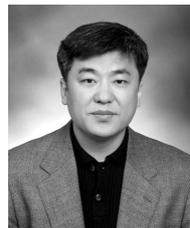
[1] J. L. Sullivan and J. W. Adams, "A new nonlinear optimization algorithm for asymmetric FIR digital filters," in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst. (ISCAS)*, 2, pp.541-544, 1994.
 [2] I. W. Selesnick and C. Sidney Bums,

"Maximally flat low-pass FIR filters with reduced delay," *IEEE Trans. Circuits and Systems II* 45, pp.53-68, 1998.

[3] N. Aikawa and M. Sato. "A design method of low delay lowpass FIR digital filters with maximally flat characteristics in the passband and the transition zero in the stopband," *ISCAS'02*, 1, pp.I-405-08, 2002.
 [4] O. Hemmann. "On the approximation problem in nonrecursive digital filter design." *IEEE Trans Circuit Theory* 18 pp.411-413. 1971.
 [5] J.A. Miller, " Maximally flat nonrecursive digital filters," *Electron. Lett.* Vol.8, pp.157-158, Mar., 1972.
 [6] P. Thajchayapong, M. Puangpool and S. Banjongjit, "Maximally flat f.i.r filters with prescribed cut-off frequency," *Electron. Lett.* Vol.16, pp.514-515, June, 1980.
 [7] L. R. Rajagopal and S. C. Dutta Roy, " Design of Maximally-flat FIR filters using the bernstain Poynomial," *IEEE Trans.on circuits and system*, Vol.cas-34, No.12, pp.1587-1590, Dec., 1987.
 [8] 전준현, "MAXFLAT와 MAXSHCUT 주파수특성을 갖는 선형위상 FIR 필터 설계", 대한전자공학회 논문지, SP.44, No.3, pp.370-377, May, 2007.
 [9] 전준현, "제로위상을 갖는 광대역저역통과 MAXFLAT FIR 필터설계를 위한 새로운 폐쇄형전달함수" 한국통신학회논문지, Vol.32, No.7, pp.658-666, August, 2007.
 [10] L.S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, " Integrals, Series and Products" Academic Press, 1980.

전 준 현 (Joonhyeon Jeon)

중신회원



1984년 동국대학교 전자공학과 학사
 1986년 한국과학기술원 전기 및 전자 공학석사
 1991년 한국과학기술원 전기 및 전자 공학박사
 1991년~1999년 한국통신 인터

넷 연구실장 및 사업부장
 2000년~2001년 한누리투자증권 리서치팀 이사
 2000년~2001년 드림라인 전무
 2001년~현재 동국대학교정보통신공학전공 부교수
 <관심분야> 영상통신, 영상압축, 에너지변환 등