

# 일반화된 Triangular QAM의 성능 분석

정회원 조경국, 이재윤, 종신회원 윤동원\*

## Performance Analysis of Generalized Triangular QAM

Kyongkuk Cho, Jaeyoon Lee *Regular Members*, Dongweon Yoon\* *Lifelong Member*

### 요약

Triangular 신호점 배치를 갖는 Triangular QAM이 직교 신호점을 갖는 Square QAM에 비해 좋은 SER 이득이 있다고 알려져 있다. 본 논문에서는 지금까지 연구되어 오고 있는 TQAM에 대한 심벌 오류 성능을 closed-form 형태로 유도한다. 시뮬레이션을 통해 일반화된 TQAM의 유도 수식을 검증한다. 그리고, 주어진 SNR에서 일반화된 TQAM에 대한 최적의 신호점 배치 방안이 제시한다.

**Key Words** : QAM, Signal Constellation, Probability, SER, Modulation

### ABSTRACT

It is known that triangular QAM with triangular signal constellations gets better SER gain than square QAM with rectangular signal constellations. In the paper, we propose an exact and general closed-form expression of the probability of symbol error for generalized TQAM, which has been currently researched. We verify that the simulation is consistent with the derived equation of generalized TQAM. And, we also suggest the optimal signal constellation schemes for generalized TQAM at given SNR values.

### I. 서론

무선 통신 환경에서 효율적인 전송 기법이 연구 발전되어 오고 있다. 일반적으로 고차 변조 기술로는 직교 진폭 변조 (QAM)이 통용되고 있다. 기존의 Square QAM 기법보다 좋은 심벌 오류 확률 (Symbol Error Rate)을 가지며 수신 측면에서 비교적 많이 높지 않은 복잡도를 갖는 Triangular QAM 연구가 제시되었<sup>[1]</sup>, 송신 신호점에 대한 각도 파라미터를 갖는 일반화된  $\Theta$ -QAM 연구가 진행되어 오고 있다<sup>[2]</sup>.

본 연구에서는 수평-수직 비율을 갖는 일반화된 Triangular QAM에 대한 정확한 SER의 수식 유도하고 수신 성능을 비교 분석한다.

### II. 시스템 모델

수평-수직 신호점 배치 비율을 갖는 일반적인 Triangular QAM 신호는 다음과 같은 16 Triangular QAM에 보듯이 몇 가지 파라미터들은 제시하고자 한다. 파라미터  $\phi$ 는 수평( $a$ )-수직( $b$ ) 신호점 사이의 상대적인 배치 비율로 정의한다.

그림 1을 기초로 해서 일반화된 M-ary QAM 심벌,  $S_{m,n}$  ( $m=1,2,\dots,\sqrt{M}$ ,  $n=1,2,\dots,\sqrt{M}$ )의 좌표,  $(x_m, y_m)$ 는 아래 수식으로 표현된다.

$$x_m = \{2(n-1)+1-\sqrt{M}\}2a - [2\text{mod}(m,2)-1]a \quad (1)$$

$$y_m = \{2(m-1)+1-\sqrt{M}\}b \quad (2)$$

\* 본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 NSL 사업으로부터 지원받아 수행되었습니다. (2010- 0015083)

\* 한양대학교 융합전자공학부 (dwyoon@hanyang.ac.kr)

논문번호 : KICS2010-08-415, 접수일자 : 2010년 8월 26일, 최종논문접수일자 : 2010년 10월 15일

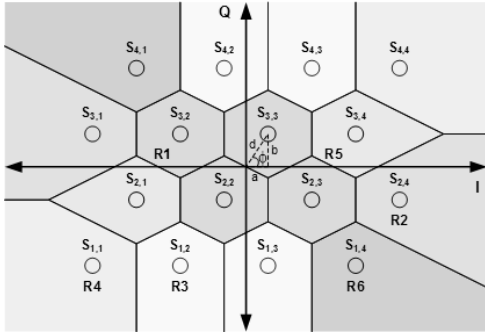


그림 1. 16 QAM의 판정 영역

이 기본으로 해서 M-ary QAM의 평균 심벌 전력  $\bar{E}$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$E_{av} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{\sqrt{M}-1} \sum_{j=0}^{\sqrt{M}-1} s_{i,j}^2 \quad (3)$$

$$= \frac{1}{3} d^2 \{ (3\cos^2(\phi) + 1)M - 1 \}$$

여기에서, 판정 영역은 R1~R6로 구분되어 규정한다. 그림 1에서 보듯이 거리  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$  이고 각도  $\phi$ 는  $\tan^{-1}(b/a)$ 의 관계를 성립한다. 만약  $\phi < \pi/3$  이면, Q(Quadrature) 축보다 I 축으로 넓게 신호점이 배치되고  $\phi > \pi/3$  이면, I 축보다 Q 축으로 넓게 신호점이 된다.  $\phi = \pi/3$  이라면 Equilateral Triangular (정삼각형) QAM 신호와 동일하게 되며 식(3)은 [1, 식(2)(5)]와 같아진다.

$\phi \leq \pi/4$ 의 Triangular QAM은 상응하는  $\phi \geq \pi/4$  Triangular QAM의  $\pi/2$  회전된 신호점과 유사하게 된다. 하지만, 전체적인 신호점들이 I 축에 넓게 배치됨에 따라 전력 효율성이 떨어진다.

AWGN 잡음이 존재하는 상황에서 수신 신호,  $r(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (4)$$

여기에서  $s(t)$ 는 송신 신호이고,  $n(t)$ 는 평균 0이며  $N_0/2$  양측 전력 스펙트럼 밀도를 갖는 AWGN이다. 따라서, 수신 신호의 SNR (신호 대 잡음비),  $\gamma$ ,는  $E_{av}/N_0$ 로 정의한다.

### III. 오류 확률

M-ary QAM의 모든 송신 신호에 대해 동일한

확률 분포의 가정에서 일반화된 M-ary Triangular QAM에 대한 판정 영역은 다음과 같이 4가지 판정 영역으로 분류/정의할 수 있다.

그림에서 보는 바와 같이 총 4개의 판정 영역으로 축소되며 각각은 판정영역 R1, R2', R3', R4'으로 정의한다. 여기에서 R2'/R3'/R4'은 그림 1에서 정의한 R2/R3/R4의 변형된 판정 영역이다.

M-ary QAM 신호의 평균 오류 확률,  $P_E$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_E = 1 - \frac{1}{M} P_D \quad (5)$$

여기에서  $P_D$ 는 평균 탐지 확률이며 다음과 같은 수식으로 표현된다.

$$P_D = (\sqrt{M}-1)^2 \int_{R_1} f(r) dr + (\sqrt{M}-2) \int_{R_2} f(r) dr + 2(\sqrt{M}-1) \int_{R_3} f(r) dr + 2 \int_{R_4} f(r) dr \quad (6)$$

여기에서  $f(r)$ 은 수신 신호  $r$ 에 대한 확률 밀도 함수이며,  $\int_R f(r) dr$ 은 탐지 영역  $R$ 에 해당하는 탐지 확률 값이 된다.

식 (6)를 식 (5)에 대입하면 평균 SNR  $\gamma = E_{av}/N_0$  기준의 일반화된 M-ary Triangular QAM의 평균 오류 심벌 확률,  $P_{E,t}$ ,은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_{E,t} = \frac{M - \sqrt{M} - 1}{M} + \frac{2(2M - 4\sqrt{M} + 3)}{M} Q(k) + \frac{2(M - \sqrt{M})}{M} Q(2\cos(\phi)k) - \frac{2(\sqrt{M}-1)^2}{M} P_1 - \frac{2(\sqrt{M}-2)}{M} P_2 \quad (7)$$

$$P_1 = 2Q(0, 0; \cos(2\phi)) + Q(0, 0; \cos(4\phi)) + 4Q(-k, 0; -\cos(\phi)) + 2Q(-2\cos(\phi)k, 0; \cos(2\phi)) \quad (8)$$

$$P_2 = Q(k, 0; -\sin(\phi)) - Q(k, -2\sin(\phi)k; -\sin(\phi)) \quad (9)$$

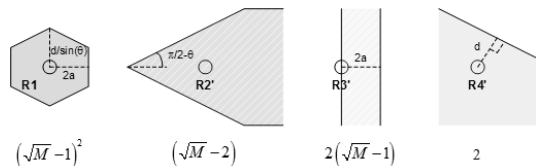


그림 2. 분류된 판정 영역

여기에서  $k = \sqrt{\frac{6\gamma}{(3\cos^2(\phi)+1)M-1}}$ ,  $Q(x_1)$ 는 1-D Gaussian Q-function이고  $Q(x_1, y_1; \rho)$ 는 2-D joint Gaussian Q-function으로 정의하며 다음과 같이 표현된다<sup>[3]</sup>.

$$Q(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (10)$$

$$Q(x_1, y_1; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{x_1}^{\infty} \int_{y_1}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2-2xy\rho}{2(1-\rho^2)}\right) dy dx \quad (11)$$

일반적으로 AWGN 환경에서 Square M-ary QAM 신호의 심벌 오류 확률,  $P_{E,s}$ [4, 식(5.2-79)]은 다음과 같다.

$$P_{E,s} = \frac{4(\sqrt{M}-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{3\gamma}{M-1}}\right) - \frac{4(\sqrt{M}-1)^2}{M} Q^2\left(\sqrt{\frac{3\gamma}{M-1}}\right) \quad (12)$$

#### IV. 성능 분석

$\phi = \pi/3$ ,  $M=16, 64, 256$  Equilateral Triangular QAM에 대한 시뮬레이션 결과와 유도 수식 (7)의 성능 비교는 다음과 같다. 기존의 Square QAM에 비해 개선된 SER을 갖는 것을 볼 수 있다. 본 그래프들은 [1, Fig. 3, Fig. 4]와 동일함을 볼 수 있다. SER  $10^{-3}$ 을 기준으로 Triangular QAM이 Square QAM에 비해 대략 0.4~0.5 dB 정도 성능이득이 있음을 볼 수 있다.

주어진 수신 신호의 SNR에 대해  $\phi$ 의 값에 따라

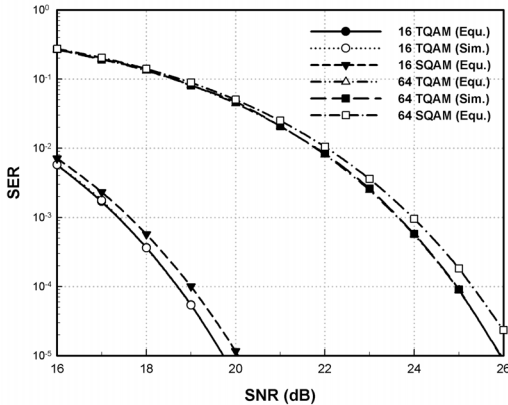


그림 3. M=16, 64, 256에서 SER 성능

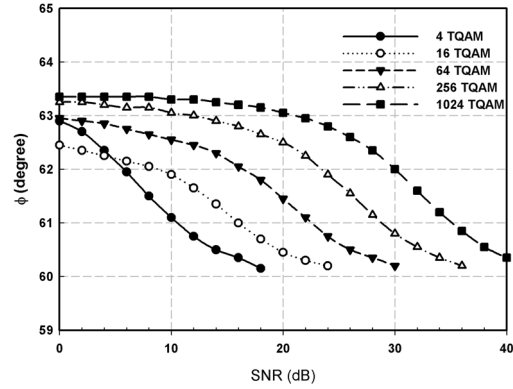


그림 4.  $\phi$ 에 따른 SER 성능

Triangular QAM의 SER 변화 추이는 다음 그래프에서 볼 수 있다.

상대적으로 낮은 수신 SNR을 갖는 통신 환경에서는  $\phi$ (약 63도) 값을 변화로 해서 좀 더 좋은 SER 성능을 얻을 수 있음을 볼 수 있다. 하지만, SER  $10^{-3}$  이하의 좋은 통신 환경에서는  $\phi$  값을  $\pi/3$ 으로 하는 것이 적절함을 볼 수 있다.

#### V. 결론

본 논문에서 Triangular QAM의 심벌 오류 확률을 널리 알려진 1-D, 2-D Q-function으로 구성된 closed-form 수식으로 유도하였다. 본론에서 성능 분석한 Triangular QAM은 Square QAM에 비해 보다 나은 심벌 오류 확률을 볼 수 있었다. 판정 영역 R1은 육각형 구조를 형성하며 전체 판정 영역 M 가운데  $(\sqrt{M}-1)^2$ 으로 대다수를 차지한다. 그 이외의 영역 R2'~R4'은 M이 커짐에 따라 상대적으로 적은 수이다. 기존의 Square QAM에서는 다수의 판정 영역은 정사각형 구조를 갖는데 비해 Triangular QAM( $\phi = \pi/3$ )에서는 정육각형이 된다. 다수의 판정 영역이 정사각형이 아니라 정육각형이 됨으로 해서 동일 수신 성능 대비 보다 낮은 SNR로 만족시킬 수 있다.

I/Q 신호 배치도에서 행/열 별로 일련의 신호 배치가 되지 않음으로 보다 면밀한 비트 오류 확률 (BER)의 분석이 요구되고 있다.

#### 참고 문헌

[1] S. J. Park, "Triangular quadrature amplitude

<p>modulation,” <i>IEEE Commun. Lett.</i>, Vol.11, pp.292-294, Apr., 2007.</p>	<p>조 경 국 (Kyongkuk Cho) 한국통신학회논문지 제32권 제7호</p>	<p>정회원</p>
<p>[2] K. N. Pappi, A. S. Lioumpas, and G. K. Karagiannidis, “<math>\Theta</math>-QAM: A Parametric Quadrature Amplitude Modulation Family and its Performance in AWGN and Fading Channels,” <i>IEEE Trans. Commun.</i>, Vol.58, No.4, Apr., 2010.</p>	<p>이 재 윤 (Jaeyoon Lee) 한국통신학회논문지 제31권 제3C호</p>	<p>정회원</p>
<p>[3] M. Abramowitz and I.A. Stegun, <i>Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables</i>, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series: U.S. Department of Commerce, 1982.</p>	<p>윤 동 원 (Dongweon Yoon) 한국통신학회논문지 제31권 제9C호</p>	<p>종신회원</p>
<p>[4] J. G. Proakis, <i>Digital Communications -4th ed.</i>, McGraw-Hill, 2000.</p>		