

# 다중 사용자 다이버시티가 있는 선형 수신기 기반의 공간 분할 다중접속 시스템의 최대 전송률 분석

준회원 안 민 기\*, 정회원 박 석 환\*\*, 종신회원 이 인 규\*

## Achievable Throughput of SDMA System with Linear Receivers

Minki Ahn\* Associate Member, Seok-Hwan Park\*\* Regular Member, Inkyu Lee\* Lifelong Member

### 요 약

본 논문은 기본적으로 공간 분할 다중 접속 시스템을 다룬다. 기지국 및 모바일 사용자들은 각각 같은 개수의 안테나를 사용하는 시스템을 가정한다. 모든 수신단에서 최소 자승 오류율 수신기를 사용한다는 가정 하에, 기지국의 각 송신 안테나에 대해 최대 신호 대 간섭 잡음비를 겪게 되는 사용자들을 선택하도록 한다. 이러한 환경에서 우리가 얻을 수 있는 평균적인 전체 데이터 전송률 성능을 유도한다.

**Key Words** : SDMA, MMSE receiver, scheduling

### ABSTRACT

This paper basically considers a space-division multiple-access (SDMA) systems where all nodes including the base station and mobile stations are equipped with equal number of antennas. In the SDMA system, for each transmit antenna, the user corresponding to the largest signal-to-interference-plus-noise (SINR) is selected to be supported. In this environment with the minimum mean squared error receivers, we analyze the average throughput using the previous works.

### I. 서 론

일반적으로 공간분할 다중 접속 (SDMA: Space-Division Multiple Access) 시스템은 기존의 공간 분할 다중화 (SDM: Space-Division Multiplexing) 시스템에 비해 다중 사용자 다이버시티 이득을 제공한다. 따라서 SDMA 시스템의 전송률 성능을 분석하는 일은 이동통신 시스템 설계에 있어서 매우 중요한 작업이다. 수신단 측에서 zero-forcing (ZF) 수신기를 사용한다는 가정 하에 SDMA 시스템의 전송률 성능이 [1]에서 분석되었다. 하지만, ZF 수신기의 성능은 낮은 신호대잡음비 영역에서 열화된 성능을 보이기 때문에, 잡음의 효과까지 고려한 최소자승 오류(MMSE:

minimum mean-squared-error) 수신기를 사용하는 것이 일반적이다. [2]에서 MMSE 수신기를 사용한 SDM 시스템의 신호대간섭잡음비 (SINR: signal-to-interference-plus-noise ratio)의 확률밀도함수 (pdf: probability density function)가 유도되었다. [5]의 논문에서는 MMSE 수신기를 사용한 SINR의 낮은 SNR에서 근사된 확률밀도함수를 구하였다. 이를 이용하여 [6]에서는 선형 수신기를 사용한 전송률을 분석하였다. 하지만 본 논문에서는 [1]과 [2]의 결과를 이용하여, MMSE 수신기를 사용한 SINR 확률밀도함수를 정확하게 유도하여 SDMA 시스템의 전송률 성능을 분석하였다.

※ This research was supported in part by Seoul R&BD Program (ST090852).

\* 고려대학교 전기전자전파공학부 무선통신 연구실 (amk200@korea.ac.kr, inkyu@korea.ac.kr)

\*\* 국방 과학 연구소 (seokhwan@add.re.kr)

논문번호 : KICS2010-12-609, 접수일자 : 2010년 12월 15일, 최종논문접수일자 : 2011년 6월 23일

## II. 본 론

### 2.1 시스템 모델

본 논문에서는 그림 1과 같이 기지국 및 단말기들이 각각  $N$ 개의 안테나를 사용하고, 셀 내에  $K$ 개의 단말기를 가지고 있고 각각의 채널은 모두 i.i.d 하고 각각의 단말기가 겪는 path loss는 동일하다고 가정한다. 따라서 기지국은 총  $N$ 개의 데이터 심볼들을 전송할 수 있다. 우리는 SDMA 시스템을 고려하기 때문에, 각 개별 심볼은 서로 다른 단말기에 대응할 수 있는 자유도를 갖는다. 따라서, 다중 사용자 다이버시티가 있는 SDMA 시스템의 평균 전송율 성능은 다음 수식으로 표현된다.

$$C(N, K) = \sum_{n=1}^N \left\{ \max_k \log_2(1 + \theta_k^n) \right\} \quad (1)$$

여기서,  $\theta_k^n$ 은 MMSE 수신기를 사용했을 때,  $k$  번째 단말기의  $n$  번째 데이터 심볼에 대한 SINR 값을 표현하는 랜덤변수이다.

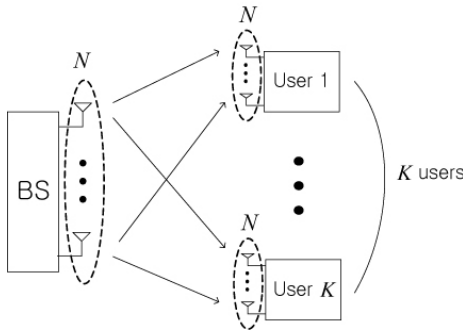


그림 1. SDMA 시스템 모델

### 2.2 전송율 성능 분석

성능 분석의 용이함을 위해, [2]의 논문에서 서술한 실제적인 안테나 개수 환경인  $N=4$ 까지 분석 가능하지만 이 논문에서는  $N=2$ 을 가정하기로 한다. 수식 (1)은 다음 형태로 전개될 수 있다.

$$\begin{aligned} C(N, K) &= E \left[ \sum_{n=1}^2 \left\{ \max_k \log_2(1 + \theta_k^n) \right\} \right] \\ &= NE \left[ \max_k \log_2(1 + \theta_k^n) \right] \\ &= N \int_0^\infty \log_2(1 + \gamma) f_{\theta_{k,K}^n}(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $f_{\theta_{k,K}^n}(\gamma)$ 는  $\max_k \theta_k^n$ 의 pdf를 의미한다. [4]의

결과를 이용하면,  $f_{\theta_{k,K}^n}(\gamma)$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f_{\theta_{k,K}^n}(\gamma) = K F_{\theta_k^n}(\gamma)^{K-1} f_{\theta_k^n}(\gamma) \quad (3)$$

여기서,  $f_{\theta_k^n}(\gamma)$ 와  $F_{\theta_k^n}(\gamma)$ 는 각각  $\theta_k^n$ 의 pdf와 누적분포함수 (CDF: cumulative distribution function)을 의미한다. 실제적인 안테나 개수 환경에서 ( $N=2,4$ ), pdf  $f_{\theta_k^n}(\gamma)$ 의 수식이 다음과 같이 정확히 유도되어 있다.

$$f_{\theta_k^n}(\gamma) = se^{-s\gamma} \begin{bmatrix} 1 + s - \frac{1}{(\gamma+1)^2} \\ -\frac{s}{\gamma+1} \end{bmatrix} \quad \text{for } N=2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} f_{\theta_k^n}(\gamma) &= se^{-s\gamma} \begin{bmatrix} 1 + 3s + 1.5s^2 + \frac{s^3}{6} \\ \frac{s^2 + 6s + 6}{2(\gamma+1)^4} \\ \frac{s^3 - 36s - 48}{6(\gamma+1)^3} \\ \frac{s^2 + 6s - 12}{2(\gamma+1)^2} \\ \frac{s^3 + 8s^2 + 12s}{2(\gamma+1)} \end{bmatrix} \quad \text{for } N=4 \end{aligned} \quad (5)$$

위 식에서  $s = \sigma^2$ .

$N=2$ 을 가정하면, 위의 pdf로부터 CDF  $F_{\theta_k^n}(\gamma)$  역시 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{\theta_k^n}(\gamma) &= \int_0^\gamma f_{\theta_k^n}(x) dx \\ &= \int_0^\gamma \left[ se^{-sx} + s^2 e^{-sx} - \frac{se^{-sx}}{(x+1)^2} - \frac{s^2 e^{-sx}}{x+1} \right] dx \\ &= 1 - (s+1)e^{-s\gamma} + se^s \frac{e^{-s(\gamma+1)}}{\gamma+1} \end{aligned} \quad (6)$$

적분을 푸는 과정에서 다음 공식을 이용하였다<sup>[3]</sup>.

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = Ei(ax) \quad (7)$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x^2} dx = -\frac{e^{ax}}{x} + aEi(ax) \quad (8)$$

여기서  $Ei(x)$ 는 지수적분 함수로 다음 수식으로 정의된다.

$$Ei(x) = C + \ln(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}, \quad x < 0 \quad (9)$$

이제 우리는  $f_{\theta_k}(\gamma)$ 와  $F_{\theta_k}(\gamma)$ 를 모두 알기 때문에,  $f_{\theta_{k,K}}(\gamma)$ 을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f_{\theta_{k,K}}(\gamma) = K \cdot \left( 1 - (s+1)e^{-s\gamma} + se^s \frac{e^{-s(\gamma+1)}}{\gamma+1} \right)^{K-1} \times \left( se^{-s\gamma} + s^2 e^{-s\gamma} - \frac{se^{-sx}}{(\gamma+1)^2} - \frac{s^2 e^{-sx}}{\gamma+1} \right) \quad (10)$$

위의 수식에 multinomial series 정리를 적용하면, 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$f_{\theta_{k,K}}(\gamma) = K! \sum_{k_1=0}^{K-1} \sum_{k_2=0}^{K-1-k_1} \frac{(-s-1)^{k_1}}{k_1!k_2!(K-1-k_1-k_2)!} s e^s \times \left( (s+1) \frac{e^{-s(k_1+k_2+1)(\gamma+1)}}{(\gamma+1)^{k_2}} - \frac{e^{-s(k_1+k_2+1)(\gamma+1)}}{(\gamma+1)^{k_2+2}} \right) \left( -s \frac{e^{-s(k_1+k_2+1)(\gamma+1)}}{(\gamma+1)^{k_2+1}} \right) \quad (11)$$

위의 pdf를 식 (2)에 삽입한 뒤, 전개하면, 우리는 다음의 평균 전송율 성능을 유도할 수 있다.

$$C(N,K) = N \cdot \int_0^\infty \log_2(1+\gamma) f_{\theta_{k,K}}(\gamma) d\gamma = \frac{NK!}{\ln 2} \sum_{k_1=0}^{K-1} \sum_{k_2=0}^{K-1-k_1} \frac{(-s-1)^{k_1} s^{k_2} e^{(k_1+k_2)s}}{k_1!k_2!(K-1-k_1-k_2)!} s e^s \times \left\{ (1+s) \int_0^\infty \frac{e^{-s(k_1+k_2+1)(\gamma+1)}}{(\gamma+1)^{k_2}} \ln(1+\gamma) d\gamma \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{e^{-s(k_1+k_2+1)(\gamma+1)}}{(\gamma+1)^{k_2+2}} \ln(1+\gamma) d\gamma \right. \\ \left. - s \int_0^\infty \frac{e^{-s(k_1+k_2+1)(\gamma+1)}}{(\gamma+1)^{k_2+1}} \ln(1+\gamma) d\gamma \right\} \quad (12)$$

위 수식은 서로 다른 형태의 단일 적분을 여러 차례 요구하기 때문에, 더욱 간단한 형태의 적분으로 전환하기 위해  $\gamma+1=x$ 의 치환 과정을 적용하면 다음 수식이 얻어진다.

$$C(N,K) = \frac{NK!}{\ln 2} \sum_{k_1=0}^{K-1} \sum_{k_2=0}^{K-1-k_1} \frac{(-s-1)^{k_1} s^{k_2} e^{(k_1+k_2)s}}{k_1!k_2!(K-1-k_1-k_2)!} s e^s \times \left\{ (1+s) \int_1^\infty \frac{x^{-k_2}}{x^{-s(k_1+k_2+1)x}} \ln x dx \right. \\ \left. - \int_1^\infty \frac{x^{-k_2+2}}{x^{-s(k_1+k_2+1)x}} \ln x dx \right. \\ \left. - s \int_1^\infty \frac{x^{-k_2+1}}{x^{-s(k_1+k_2+1)x}} \ln x dx \right\} \quad (13)$$

위 수식에서 우리가 수행해야 할 단일 적분의 개수는 그림 2에서 상단의 그래프와 같이  $K$ 에 대해서 지수적으로 증가하게 된다.

(13)을 계산하기 위해 필요한 적분의 개수가 너무 많기 때문에, 더욱 간단하게 변환해 줄 필요가 있다. 우선 다음 함수를 정의하도록 한다.

$$\phi(a,n) = \int_1^\infty \frac{e^{ax}}{x^n} \ln x dx \quad (a < 0, \text{ and } n(\geq 0) \in \mathbb{Z}) \quad (14)$$

위 식에서  $Z$ 는 정수 집합이다. 위 함수를 이용하여, 평균 전송율 (13)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C(N,K) = N \cdot \int_0^\infty \log_2(1+\gamma) f_{\theta_{k,K}}(\gamma) d\gamma = \frac{NK!}{\ln 2} \sum_{k_1=0}^{K-1} \sum_{k_2=0}^{K-1-k_1} \frac{(-s-1)^{k_1} s^{k_2} e^{(k_1+k_2)s}}{k_1!k_2!(K-1-k_1-k_2)!} s e^s \times \left\{ (1+s)\phi(-s(k_1+k_2+1), k_2) - \phi(-s(k_1+k_2+1), k_2+2) - s\phi(-s(k_1+k_2+1), k_2+1) \right\} \quad (15)$$

이제 우리는 위 식을 계산하기 위한 단일 적분의 개수를 최소화하도록 한다. 함수  $\phi(a,n)$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

- 1) For  $n=0$ 

$$\phi(a,0) = \int_1^\infty e^{ax} \ln x dx = \frac{1}{a} Ei(a) \quad (16)$$
- 2) For  $n=1$ 

$$\phi(a,1) = \int_1^\infty x^{-1} e^{ax} \ln x dx = \frac{1}{2} [e^{ax} (\ln x)^2]_1^\infty - \frac{a}{2} \int_1^\infty e^{ax} (\ln x)^2 dx \quad (17)$$

$$= -\frac{a}{2} \int_1^\infty e^{ax} (\ln x)^2 dx = -\frac{a}{2} \Omega(a)$$

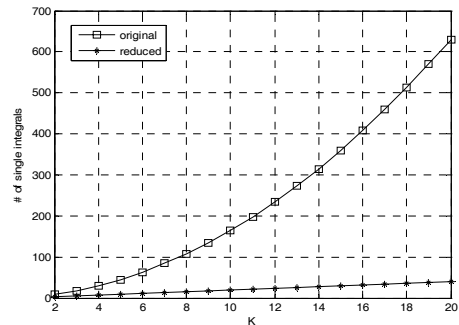


그림 2. 수식 (13)을 계산하기 위해 필요한 기존의 단일 적분의 개수와 줄어든 필요 적분의 개수

위 식에서 함수  $\Omega(a)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Omega(a) = \int_1^{\infty} e^{ax} (\ln x)^2 dx \quad (18)$$

3) For  $n \geq 2$

$n=1$ 인 경우와 마찬가지로,  $\phi(a,n)$ 을 부분 적분을 이용해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(a,n) &= -\frac{1}{-n+1} \int_1^{\infty} x^{-n} e^{ax} dx \\ &\quad - \frac{a}{-n+1} \phi(a,n-1) \\ &= \frac{1}{-n+1} \left[ \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} E_1(a) - \right. \\ &\quad \left. e^a \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^{k-1}}{(n-1)!} \right] \\ &\quad - \frac{a}{-n+1} \phi(a,n-1) \end{aligned} \quad (19)$$

$\phi(a,n)$ 와  $\phi(a,n-1)$ 의 관계식을 얻었기 때문에,  $n=2,3,4,\dots$  순으로 차례로 정리하면 일반적인  $n$ 에 대해서  $\phi(a,n)$ 을 다음과 같이  $\Omega(a)$ 의 함수로 정리할 수 있다.

$$\phi(a,n) = \begin{cases} \frac{1}{a} E_1(a), & \text{if } n=0 \\ \sum_{i=2}^n (-1)^{n-i} \left( \prod_{j=2}^{i-1} \frac{1}{j} \right) a^{n-i} \times \\ \left( \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} E_1(a) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{a^{k-1}}{(i-1)!} e^a \right) + \\ \frac{(-1)^n a^n}{2} \left( \prod_{j=2}^n \frac{1}{j+1} \right) \Omega(a), & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \quad (20)$$

결과적으로 우리는 평균 전송률  $C(N,K)$ 을 단일 적분  $\Omega(a)$ 만을 이용해 표현할 수 있으므로,  $2K$ 개의 단일 적분만을 수행하는 것으로 충분한 형태로 전환하였다. 수식 (3)과 비교했을 때, 필요한 적분의 개수를 그림 II에서 하단의 그래프를 보면 확연히 줄인 것을 알 수 있다.

마지막으로  $\Omega(a)$ 을 계산하기 위한 적분 범위를 줄이도록 한다. 수식 (4)를 이용해  $\Omega(a)$ 을 계산하려면 적분 범위를 1부터  $\infty$ 로 잡아야 하므로 수치적인 문제가 발생할 수 있다. [3]의 결과들을 이용하여  $\Omega(a)$ 을 다음 수식으로 간단히 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Omega(a) &= \int_1^{\infty} e^{ax} (\ln x)^2 dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{ax} (\ln x)^2 dx - \int_0^1 e^{ax} (\ln x)^2 dx \\ &= \frac{1}{-a} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + (C + \ln(-a))^2 \right\} - \int_0^1 e^{ax} (\ln x)^2 dx \end{aligned} \quad (21)$$

위 식에서  $C$ 는 오일러의 상수로 다음과 같이 정의된다.

$$C = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=1}^s \frac{1}{m} - \ln s \right) = 0.577215\dots$$

$\Omega(a)$ 를 계산하기 위해 필요한 적분 범위를  $(0, \infty)$ 로부터  $(0,1)$ 로 줄인 효과를 거두었다.

### III. 실험결과

이 절에서는 본 논문에서 유도한 전송률 수식을 실험 결과와 비교해 보도록 한다. 그림 3은 실험을 통해 얻은 SDMA 시스템의 전송률 성능을 앞 절에서 유도한 전송률 수식과 비교한 그래프이다. 이 실험은 기지국 및 단말기들이 각각 2개의 안테나( $N=2$ )일 때, Monte-Carlo Simulation을 수행하였고, 모든 단말기는 동일한 path loss를 가정하였으며, 각 유저들의 채널 분포는 i.i.d 한 Rayleigh fading을 고려하였다. 실험 결과를 보면, 단말기의 수  $K$ 에 무관하게 유도한 수식이 정확하다는 사실을 확인할 수 있다.

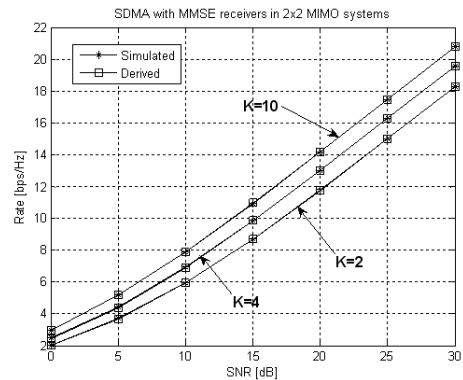


그림 3. SNR 대비 평균 전송률 성능

### IV. 결론

본 논문에서는 스케줄링된 SDMA 시스템의 평균 전송률 성능을 유도하였다. 실험 결과와 비교했을 때,

본 논문에서 유도한 결과가 단말기의 수에 관계 없이 매우 정확함을 확인할 수 있다.

참고 문헌

[1] C.-K. Sung, S.-H. Moon, J. Choi and I. Lee, "Performance Analysis of Multiuser MIMO Systems with ZF Receivers," *proc. IEEE VTC '07 Spring*, April 2007.

[2] N. Kim, Y. Lee and H. Park, "Performance Analysis of MIMO System with Linear MMSE Receiver," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 7(11), pp.4474-4478, Nov. 2008.

[3] I.S.GradshTEyn and I.M.Razhik, "Table of Integrals, Series, and Products," Academic Press, 6th ed., 2000.

[4] H. A. David and H. N. Nagaraja, "Order Statistics," WILEY, 3th ed., 2003.

[5] H. Gao, P. J. Smith, M. V. Clark, "Theoretical reliability of MMSE linear diversity combining in Rayleigh-fading additive interference channels," *IEEE Transactions on Communications*, 46(5), pp.666-672, May. 1998.

[6] R. H. Y. Louie, M. R. Mckay, and, I. B. Collings, "Maximum sum-rate of MIMO multiuser scheduling with linear receivers," *IEEE Transactions on Communications*, 57(11), pp.3500-3510, Nov. 2009.

박 석 환 (Seok-Hwan Park)

정회원



2005년 2월 고려대학교 전기전  
자전파공학부 졸업  
2007년 2월 고려대학교 전자전  
기공학과 석사  
2011년 2월 고려대학교 전자전  
기공학과 박사  
2011년 3월~현재 국방 과학연  
구소 선임연구원

<관심분야> Signal processing and coding theory for wireless communication, information theory

이 인 규 (Inkyu Lee)

종신회원



1990년 2월 서울대학교 제어계  
측공학과 졸업  
1992년 2월 스탠포드대학교 전  
자공학과 석사  
1995년 2월 스탠포드대학교 전  
자공학과 박사  
2002년 9월~현재 고려대학교  
전기전자전파공학부 정교수

<관심분야> Digital communication, signal processing and coding technique applied to wireless communication

안 민 기 (Minki Ahn)

준회원



2010년 2월 고려대학교 전기전  
자전파공학부 졸업  
2010년 3월~현재 고려대학교  
전자전기공학과 석사과정  
<관심분야> multi-user MIMO,  
Random Matrix Theory