

보로노이 셀에서 리만 적분을 이용한 임펄스 잡음 환경에서 동작하는 회전 변환 QPSK 기법의 성능 해석

최 병 조*

Performance Analysis of a Rotation-Transform Aided QPSK over Impulsive Noise Using Rieman Integral over Voronoi Cell

Byoungjo Choi*

요 약

임펄스 잡음에 강인한 2차 회전변환 기법을 적용한 QPSK 시스템에서 최대우도 복호기의 비트오율 성능을 정확하게 분석하였다. 이 분석 방법은 보로노이 셀에서 2차원 가우시안 Q-함수의 리만 적분을 응용한 것이다. 일반적인 2차 회전변환 기법에 대하여 보로노이 셀의 다양한 특징을 기하학적 방법으로 분석하여 정리하였다. 이러한 분석 결과를 이용하여 비트오율을 최소화하는 회전변환 파라미터를 도출하였으며, 기존의 근사적인 성능 해석 방법과의 차이도 고찰하였다.

Key Words : Voronoi, Maximum Likelihood, Rotation Transform, Impulsive Noise, Rieman Integral

ABSTRACT

An exact performance analysis of an ML detector for a 2-dimensional rotation-transform aided QPSK system operating over an impulsive noise environment is presented using Rieman integrals of a two-dimensional Gaussian Q-function over Voronoi cells. A set of interesting features of the Voronoi cells is also characterised systematically. An optimum rotation angle yielding the minimum BER is also studied. The differences between the proposed exact method and the previous approximate analysis method are investigated in terms of the corresponding BERs and the derived optimum angles.

I. 서 론

다양한 환경에서 동작하는 통신 시스템이 겪는 잡음은 많은 경우 임펄스 잡음에 해당한다^{[1][3]}. 이러한 임펄스 잡음은 전파 통신에서는 번개 등의 기상 현상, 자동차 엔진 및 가전제품에서 발생하는 전자파, 셀룰러 네트워크의 다중사용자 간섭 신호 등에 의하여 발생하며, 수중 음파 통신에서는 급격한 수류 변화, 빙산 등의 붕괴음 등에 기인한다^[3-5]. 이러한 임펄스 잡음의 통계적 특성은 서로 다른 분산을

갖는 무한개의 가우시안 분포의 합으로 표현할 수 있다는 것이 알려져 있다^[3]. 또한 많은 경우 처음 N 개의 가우시안 분포로 근사화 될 수 있다는 것이 알려져 있으며, 특히 $N=2$ 인 경우의 임펄스 잡음 모델은 관측되는 임펄스 잡음과의 유사성 및 개념적 단순성, 분석의 용이성 때문에 많은 문헌에서 사용돼 왔다^[4,6,12,15].

한편, 이러한 임펄스 잡음에 강인한 통신 시스템을 설계하고자 하는 시도도 꾸준히 이루어져 왔다^[1,4,7]. 1963년 Lang은 회전변환을 적용하여^[1] 임

* 본 연구는 인천대학교 2007년도 자체연구비 지원을 통해 수행되었습니다.

• 주저자 : 인천대학교 임베디드시스템공학과 무선통신연구실, bjc97r@incheon.ac.kr, 종신회원
논문번호 : KICS2013-02-101, 접수일자 : 2013년 2월 20일, 최종논문접수일자 : 2013년 3월 11일

펄스 잡음 환경에서 다이버시티 이득을 얻고자 하였다. 또한 임펄스 잡음 환경에서 강인하게 동작하는 CDMA 시스템의 특성이 분석되었고⁴⁾, 단일 반송파 및 다중 반송파를 이용한 QAM 시스템이 임펄스 잡음 환경에서 어떠한 성능을 갖는지도 분석되었다^{5,6)}. 기본적으로 임펄스 잡음 환경에서 동작하는 CDMA 및 다중반송파 시스템은 Lang이 제안한 회전변환¹¹⁾ 행렬로 각각 WHT (Walsh-Hadamard Transform) 및 DFT (Discrete Fourier Transform) 행렬을 이용하는 경우와 동일하다. 이러한 BER 성능 분석들은 간단한 선형 수신기를 가정하여 이루어졌다.

이러한 회전변환 행렬은 Lang의 제안 이후 33년 만인 1996년 Boutros와 Viterbo 등에 의해 신호 공간 다이버시티 (SSD; Signal Space Diversity)라는 이름으로 레일레이 페이딩에 강인한 시스템을 설계하기 위해 널리 사용되게 된다⁹⁾. 또한 2003년부터 회전변환 행렬은 시공간부호화 기법에 적용되어 골든 부호 등의 이름으로 널리 알려졌다. 원래 Lang이 의도했던 임펄스 잡음에 강인한 시스템을 설계하기 위한 회전변환 행렬이 페이딩 채널에서도 유용하게 사용되고 있는 것은, 2004년 Häring과 Vinck가¹²⁾ 관찰한 것과 같이 완벽한 채널 정보를 가정할 때 레일레이 페이딩 채널과 임펄스 잡음 채널이 등가적이기 때문이다.

회전변환 행렬을 적용한 시스템 및 다양한 시공간부호화를 적용한 시스템, 협동 시공간부호화 기법들을 적용한 시스템들의 BER 성능 분석은 복호 기법으로 최대우도 (ML; Maximum Likelihood) 기법을 적용하더라도 대부분 유니온 바운드 (union bound)를 적용한 심벌-쌍 오류확률 (pair-wise symbol error probability)을 이용하여 근사적으로 이루어져왔다⁸⁾. 그 이유는 첫째로 ML 기법의 정확한 BER 분석은 보로노이 셀의 비선형 특성 때문에 매우 복잡하기 때문이다. 둘째로는 높은 SNR 영역에서 기존의 근사적인 분석방법이 실제 모의실험 결과와 거의 유사하기 때문이다.

이러한 근사적인 BER 성능 해석 방법이 널리 사용되고 있음에도 불구하고, 정확한 BER 해석이 필요한 이유는 학문적 호기심을 충족시키기 위한 것 외에도 여러 가지 실용적 이유가 있다. 우선 낮은 SNR 영역에서 기존의 근사적 BER 성능 해석 방법이 실제 값과 상당한 오차를 나타내기 때문에 이 영역에서는 정확한 BER 결과를 얻기 위해 상당한 시간이 소요되는 모의실험 결과에 의존해야 하

는 현실적 이유가 있다. 또한 다양한 통신 시스템에서 BER 성능을 최적화하기 위한 시스템 파라미터를 도출할 경우 근사적 BER 해석에 기반한 최적의 파라미터가 실제 시스템에서도 최적이라는 보장이 없다. 또한, 최근 여러 가지 채널 부호화 기법들에 대하여 모의실험 없이 채널 BER을 이용하여 복호 BER을 얻을 수 있는 기법들이 연구되고 있어, 정확한 채널 BER을 얻는 것이 매우 중요해졌기 때문이다.

지금까지 회전변환 및 시공간부호화 기법과 관련하여 문헌상에 발표된 정확한 BER 해석은 매우 드물고 제한적이다¹²⁾¹⁴⁾. 본 논문은 일반적인 2차 실수 회전변환 행렬을 적용한 QPSK 시스템을 ML 기법으로 복호하는 경우에 보로노이 셀의¹²⁾ 특징을 분석하여 정확한 BER 성능 해석에 필요한 파라미터를 체계적으로 도출하였다. 이러한 파라미터를 이용하여 정확한 BER 및 기존의 유니온 바운드에 기반한 근사적 BER을 모두 도출하여 비교하였고, 주어진 임펄스 잡음 파라미터에 대하여 BER을 최소화하는 최적의 회전 각도를 고찰하였다.

이 논문의 나머지 부분은 다음과 같이 구성되어 있다. 제 II절에서는 페이딩 채널과 임펄스 잡음을 통합적으로 고려하는 시스템 모델을 도출한다. 제 III절에서는 정확한 BER 해석을 위한 보로노이 셀의 여러 특징들을 체계적으로 고찰한다. 제 IV절에서는 보로노이 영역에서의 리만 적분을 이용하여 정확한 BER을 표현하고, 임펄스 잡음 채널에 대하여 정확한 평균 BER 결과 및 기존 기법을 이용한 근사 BER 결과를 비교한다. 마지막으로 V절에서 결론을 제시한다.

II. 시스템 모델

2.1. 수신 신호 모델

송신기는 QPSK 변조된 2×1 심벌 벡터 s 에 다음과 같은 회전 변환을 적용하여 송신 부호 심벌 벡터 x 를 구한다^{11,9)}.

$$R = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (1)$$

위 식에서 c 는 $\cos(\theta)$ 를, s 는 $\sin(\theta)$ 를 나타낸다. 두 송신 심벌이 독립적인 레일레이 페이딩 채널을 통과하여 임펄스 잡음 환경에서 수신되는 경우, 2×1 수신 심벌 벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{y} = \sqrt{\rho} \mathbf{H} \mathbf{R} \mathbf{s} + \boldsymbol{\eta} \quad (2)$$

이 때, 두 송신 심벌은 시공간부호화 기법을 적용하는 경우 서로 다른 안테나를 통해 전송되며, 신호공간 다이버시티 기법을 적용하는 경우 충분히 긴 인터리버를 이용하여 서로 다른 시간에 전송될 수도 있다. 이 외에도 주파수-공간 부호화 기법을 적용하는 경우 서로 독립적인 페이딩을 겪는 부반송파를 통해 전송될 수도 있다. 식 (2)에서 2×2 차원의 페이딩 행렬 \mathbf{H} 는 대각 행렬 (diagonal matrix)로 크기 및 위상을 나타내는 두 대각 행렬의 곱으로 다음과 같이 분리하여 표현할 수 있다.

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Phi} \quad (3)$$

위 식에서 페이딩 크기에 해당하는 실수 대각 행렬은 $\boldsymbol{\alpha} = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 로 정의되고, 위상을 나타내는 복소 대각 행렬은 $\boldsymbol{\Phi} = \text{diag}\{e^{j\phi_1}, e^{j\phi_2}\}$ 로 정의된다. 페이딩 크기 α_1 과 α_2 는 서로 독립적인 레일레이 분포를 따르며 평균전력은 모두 1이라고 가정한다. 위상 성분 ϕ_1 과 ϕ_2 는 $[0, 2\pi)$ 구간에서 균일 분포를 갖는다고 가정한다. 변조 심벌 \mathbf{s} 의 원소들은 QPSK 성상 집합 $\{\pm 1 \pm j\}$ 가운데서 선택된다. 복소 임펄스 잡음 신호 벡터 $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \ \eta_2]^T$ 의 원소들은 서로 독립적이고 다음과 같은 확률분포를 갖는다고 가정한다^{4,6,14)}.

$$f(\eta) = \frac{(1-p)}{2\pi\sigma_0^2} e^{-\frac{|\eta|^2}{2\sigma_0^2}} + \frac{p}{2\pi\kappa^2\sigma_0^2} e^{-\frac{|\eta|^2}{2\kappa^2\sigma_0^2}} \quad (4)$$

즉, 임펄스 잡음은 p 의 확률로 $2\kappa\sigma_0^2$ 의 분산을 갖거나 $(1-p)$ 의 확률로 $2\sigma_0^2$ 의 분산을 갖는 가우시안 확률변수로 나타낸다. 임펄스 잡음의 특징을 결정짓는 p 와 κ 는 환경에 따라 다르며 보통 $p \ll 1$ 이고 $\kappa \gg 1$ 의 값을 갖는다⁴⁾. 마지막으로 식 (2)에서 ρ 는 신호대잡음비 (SNR; Signal-to-Noise Ratio)를 결정짓는 상수이다. 이 논문에서는 복호기가 완벽한 채널 정보를 알고 있다고 가정한다. 즉, 식 (3)으로 표현된 페이딩 채널 정보와 복소 임펄스 잡음 성분인 η_1 과 η_2 의 분산 $2\kappa_1^2\sigma_0^2$ 및 $2\kappa_2^2\sigma_0^2$ 도 알고 있다고 가정한다. 각각의 κ_n 은 1 또는 κ 값을 갖는다. 참고문헌 [12]도 동일한 가정을 하였다.

2.2. ML 복호기

식 (2)에 나타난 임펄스 잡음 신호 $\boldsymbol{\eta}$ 는 실수 부

분과 허수 부분이 독립적이고 동일한 분포를 갖는 가우시안 확률변수의 합으로 구성되어 있기 때문에 위상 회전을 적용하여도 그 통계적 특성이 바뀌지 않는다. 따라서 수신 심벌에 $\boldsymbol{\Phi}^H$ 를 곱하여 페이딩에 의한 위상 회전을 보정하면 다음과 같다.

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{\Phi}^H \mathbf{y} = \sqrt{\rho} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{R} \mathbf{s} + \boldsymbol{\eta}' \quad (5)$$

위 식에서 $\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\Phi}^H \boldsymbol{\eta}$ 이다. 한편, 심벌 벡터 \mathbf{s} 의 실수부 및 허수부를 각각 \mathbf{s}_R 및 \mathbf{s}_I 라고 하면, 식 (5)에서 $\boldsymbol{\alpha}$ 와 \mathbf{R} 이 실수 이므로 실수부 및 허수부로 구분하여 전체 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_R &= \sqrt{\rho} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}_R + \boldsymbol{\eta}'_R \\ \mathbf{y}'_I &= \sqrt{\rho} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}_I + \boldsymbol{\eta}'_I \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서 회전 변환에 의한 부호 심벌 벡터 \mathbf{x} 의 실수부 \mathbf{x}_R 및 허수부 \mathbf{x}_I 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{R} \mathbf{s}_R, \quad \mathbf{x}_I = \mathbf{R} \mathbf{s}_I \quad (7)$$

송신 심벌 벡터 \mathbf{s} 의 실수부 및 허수부가 서로 독립적이므로 식 (6)을 이용하여 독립적으로 각각 동일한 ML 복호 기법을 적용할 수 있다. 따라서 식 (6)에서 실수 부분만을 고려하여 분석하기로 한다.

식 (6)에서 $\boldsymbol{\alpha}$ 는 실수 대각 행렬이므로 식 (6)의 실수부는 다음과 같이 두 수식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} y'_{1R} &= \sqrt{\rho} \alpha_1 x_{1R} + \eta'_{1R} \\ y'_{2R} &= \sqrt{\rho} \alpha_2 x_{2R} + \eta'_{2R} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 사용된 첨자 1과 2는 식 (6)에 나타난 벡터의 첫 번째 및 두 번째 원소를 나타낸다. 이제 식 (8)에서 실수 임펄스 잡음 성분 η'_{1R} 과 η'_{2R} 은 각각 $\kappa_1^2\sigma_0^2$ 및 $\kappa_2^2\sigma_0^2$ 의 분산을 갖는 가우시안 분포를 갖는다. 이제 식 (8)을 이용하면, \mathbf{s}_R 을 위한 ML 복호 심벌 $\hat{\mathbf{s}}_R$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{s}}_R = \arg \min M(\mathbf{y}'_R, \tilde{\mathbf{s}}_R) \quad (9)$$

위 식에서 ML 평가함수(metric) $M(\cdot)$ 은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$M = \frac{|y'_{1R} - \sqrt{\rho} \alpha_1 \tilde{x}_{1R}|^2}{\kappa_1^2 \sigma_0^2} + \frac{|y'_{2R} - \sqrt{\rho} \alpha_2 \tilde{x}_{2R}|^2}{\kappa_2^2 \sigma_0^2} \quad (10)$$

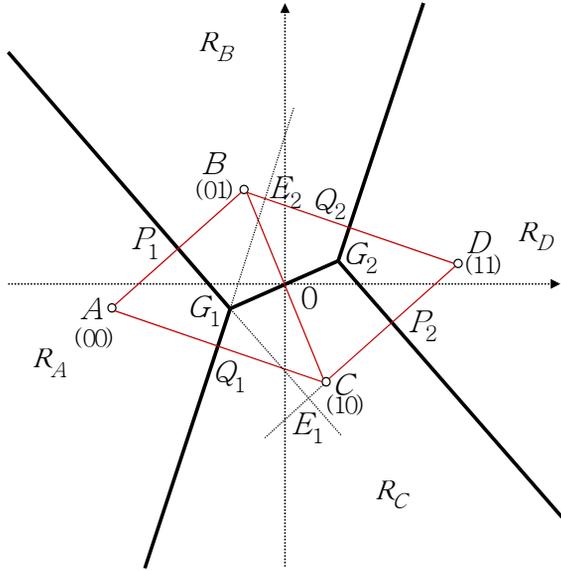


그림 1. 보로노이 셀, case 3, $\zeta^{-1} < \lambda_2/\lambda_1 < 1$
 Fig. 1. Voronoi cell, case 3, $\zeta^{-1} < \lambda_2/\lambda_1 < 1$

즉, ML 복호 기법은 식 (10)의 값이 최소가 되는 \tilde{x}_{1R} 및 \tilde{x}_{2R} 에 해당하는 \tilde{s}_{1R} 및 \tilde{s}_{2R} 을 찾게 된다. 한편, 식 (10)은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$M = \left| \frac{y'_{1R}}{\kappa_1\sigma_0} - \frac{\sqrt{\rho}\alpha_1}{\kappa_1\sigma_0} \tilde{x}_{1R} \right|^2 + \left| \frac{y'_{2R}}{\kappa_2\sigma_0} - \frac{\sqrt{\rho}\alpha_2}{\kappa_2\sigma_0} \tilde{x}_{2R} \right|^2 \quad (11)$$

위 식은 식 (8)의 y'_{1R} 및 y'_{2R} 을 각각 $\kappa_1\sigma_0$ 및 $\kappa_2\sigma_0$ 로 나누어 얻은 다음 식을 분산이 1인 독립적 가우시안 잡음 환경에서 ML 기법으로 복호하는 경우와 동일하다.

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda_1 x_{1R} + n_1 \\ z_2 &= \lambda_2 x_{2R} + n_2 \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)에서 $i=1,2$ 에 대하여 $z_i = y'_{iR}/(\kappa_i\sigma_0)$ 이며, $\lambda_i = \sqrt{\rho}\alpha_i/(\kappa_i\sigma_0)$ 이고, n_1 과 n_2 는 서로 독립적이며 평균이 0이고 분산이 1인 표준 가우시안 확률변수이다. 식 (12)의 z_1 을 x -축으로, z_2 를 y -축으로 나타내면, 식 (9)에 제시된 ML 복호 기법은 2차원 평면의 한 점 (z_1, z_2) 로부터 거리가 가장 가까운 $(\lambda_1 x_{1R}, \lambda_2 x_{2R})$ 을 찾는 기법과 동일하다. 이것은 또 수신된 심벌로부터 얻어지는 한 점 (z_1, z_2) 이 어떤 보로노이 셀에 속하는지 찾는 기법이라고 볼 수 있다.

2.3. 보로노이 셀

참고문헌 [2]의 2장은 n -차원 실수 공간의 유한 점 집합 P 의 어떤 한 점 P_i 에 해당하는 보로노이 셀을 다음과 같이 정의하고 있다.

$$V(P_i) = \{x \in R^n : |x - P_i| \leq |x - P_j| \forall j\} \quad (13)$$

보로노이 셀은 여러 학문분야에서 널리 쓰이고 있는 개념으로^{[2][13]} 통신 시스템에서는 ML 복호 영역을 나타내기 위해 사용되어왔다. 그림 1은 식 (12)에 해당하는 보로노이 셀의 한 예를 나타낸 것이다. 식 (12)에서 x_{1R} 과 x_{2R} 은 식 (1)과 식 (7)으로부터 각각 $cs_{1R} + ss_{2R}$ 과 $-ss_{1R} + cs_{2R}$ 로 나타낼 수 있고, s_{1R} 과 s_{2R} 은 ± 1 의 값을 갖기 때문에, 식 (12)에서 잡음이 없는 경우에 해당하는 좌표값들은 그림 1에서 점 A, B, C, D 에 해당한다. 각 점에 해당하는 보로노이 셀은 그림에서 R_A, R_B, R_C, R_D 로 나타내었다. ML 복호기의 비트 복호 오류는 그림 1에서 어느 한 점으로 나타내어지는 수신 심벌이 송신 비트에 해당하는 보로노이 셀들을 벗어나는 경우에 발생한다. 예를 들어 그림 1에서 실수부의 LSB (Least Significant Bit)에 해당하는 비트 0이 ML 복호기에 의해 오류 없이 복호되기 위해서는 수신 심벌이 보로노이 셀 R_A 또는 R_C 에 위치하여야 한다. 따라서 실수부의 LSB에 해당하는 비트의 BER은 다음과 같이 보로노이 셀 영역에서의 리만적분으로 나타낼 수 있다.

$$P_{b,1R} = \iint_{R_B, R_D} f(n_1, n_2) dn_1 dn_2 \quad (14)$$

식 (14)로 표현되는 BER을 계산하기 위해서는 그림 1에 나타낸 것과 같은 보로노이 셀의 여러 성질들을 자세하게 파악할 필요가 있다.

III. 보로노이 셀의 성질

3.1. 파라미터 정의

식 (13)에 나타낸 보로노이 셀의 정의를 이용하면 그림 1에서 G_1 은 점 A, B, C 로부터 같은 거리에 있어야 한다. 마찬가지로 G_2 는 점 B, C, D 로부터 같은 거리에 있어야 한다. 구체적으로 다음과 같이 G_1 및 G_2 를 정의한다. 본 논문에서는 문맥에 따라 어떤 점과 그 점의 좌표를 동일한 심벌을 이용하여

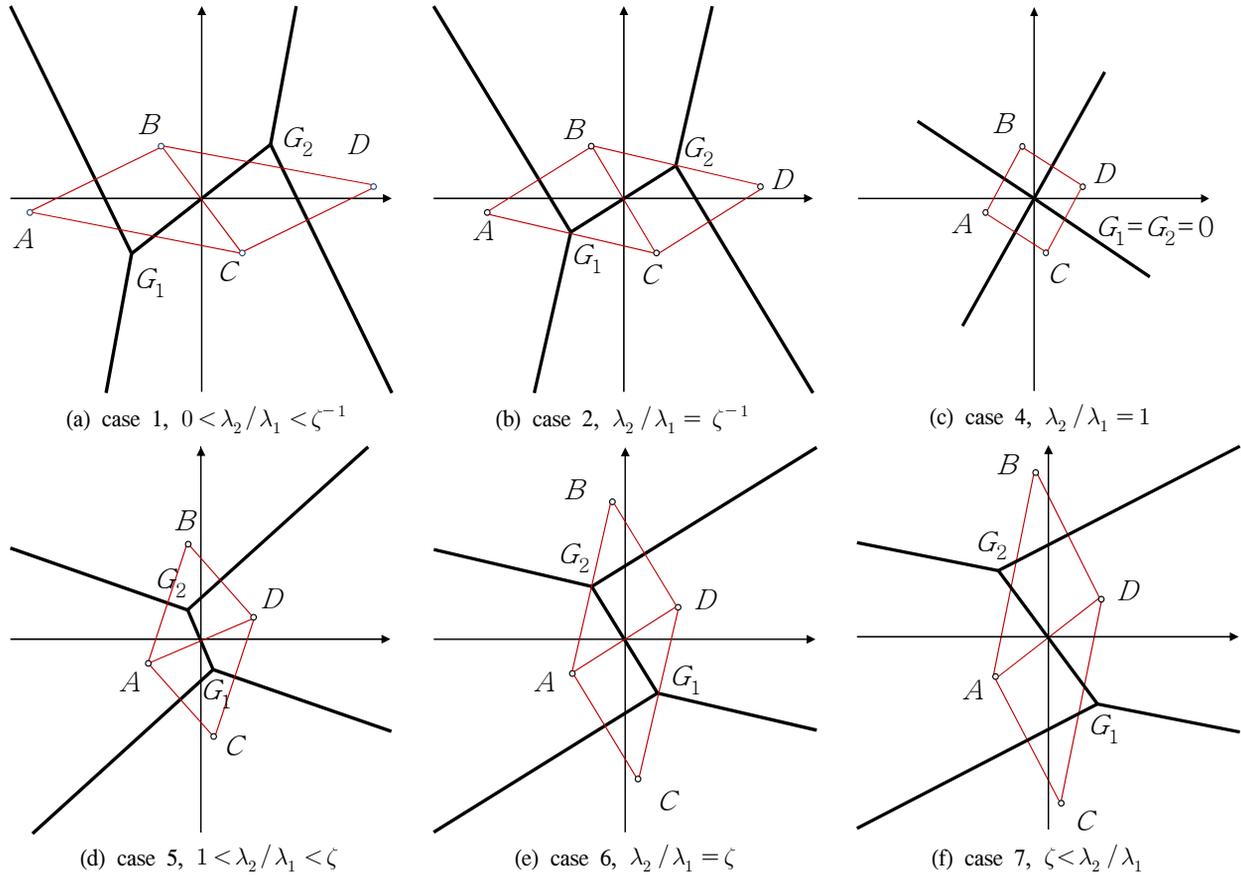


그림 2. 가능한 보로노이 셀의 형태 및 G_1, G_2 의 위치, $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$
 Fig. 2. Various Voronoi cells and the locations of G_1, G_2 , $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$

나타내었다.

[정의1a] 점 G_1 은 $\lambda_1 > \lambda_2$ 인 경우 $\triangle ABC$ 의 외심이며, $\lambda_1 < \lambda_2$ 인 경우 $\triangle ACD$ 의 외심 (circum-centre)이고, $\lambda_1 = \lambda_2$ 인 경우는 원점으로 정의한다.

[정의1b] 점 G_2 은 $\lambda_1 > \lambda_2$ 인 경우 $\triangle BCD$ 의 외심이며, $\lambda_1 < \lambda_2$ 인 경우 $\triangle ABD$ 의 외심이고, $\lambda_1 = \lambda_2$ 인 경우는 원점으로 정의한다.

위 정의와 사각형 $ABDC$ 가 평행사변형임을 이용하면 $G_2 = -G_1$ 의 관계가 있음을 쉽게 알 수 있다.

[정의 2] 점 P_1 과 P_2 는 각각 \overline{AB} 와 \overline{CD} 의 중점이며, 점 Q_1 과 Q_2 는 각각 \overline{AC} 와 \overline{BD} 의 중점이다.

역시, $P_2 = -P_1$, $Q_2 = -Q_1$ 의 관계가 성립한다.

[정의 3] 길이 d_{11} 과 d_{12} 는 각각 $|A - P_1|$ 과 $|A - Q_1|$ 으로 정의한다.

[정의 4] 점 E_1 은 P_1 에서 \overline{AB} 에 수직으로 그은 선분과 \overline{CD} 또는 그 연장선과 만나는 점이며, 점

E_2 는 Q_1 에서 \overline{AC} 에 수직으로 그은 선분과 \overline{BD} 또는 그 연장선과 만나는 점이다.

[정의 5] 길이 d_{21} 과 d_{22} 는 각각 $d|E_1 - P_2|$ 와 $d|Q_2 - E_2|$ 로 정의한다. 이 때 $d|A - B|$ 는 \overline{AB} 의 길이 및 $\text{sgn}(A_x - B_x)$ 의 부호를 갖는 함수로 정의한다. 한편 A_x 는 점 A 의 x 좌표를 나타내고, $\text{sgn}(\cdot)$ 함수는 입력 값의 부호를 나타낸다.

[정의 6] 길이 d_{31} 은 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 인 경우 $d|P_1 - G_1|$, $\lambda_1 < \lambda_2$ 인 경우 $d|P_1 - G_2|$ 로 정의하고, d_{32} 는 $d|G_1 - Q_1|$ 로 정의한다.

[정의 7] 각 ϕ_1 은 $\angle \overline{G_1 G_2}$ 로 정의한다.

[정의 8] 각 ϕ_{21} 은 보로노이 셀 R_A 와 R_B 사이의 경계선이 수평선과 이루는 각이며, 각 ϕ_{22} 는 보로노이 셀 R_A 와 R_C 의 경계선이 수평선과 이루는 각을 나타낸다.

[정의 9] 각 ϕ_{31} 은 $\overline{G_1 G_2}$ 와, G_1 에서 보로노이 셀 R_A 와 R_B 사이의 경계선에 수직인 선분이 이루는 각이며, 각 ϕ_{32} 는 $\overline{G_1 G_2}$ 와, G_1 에서 보로노이 셀

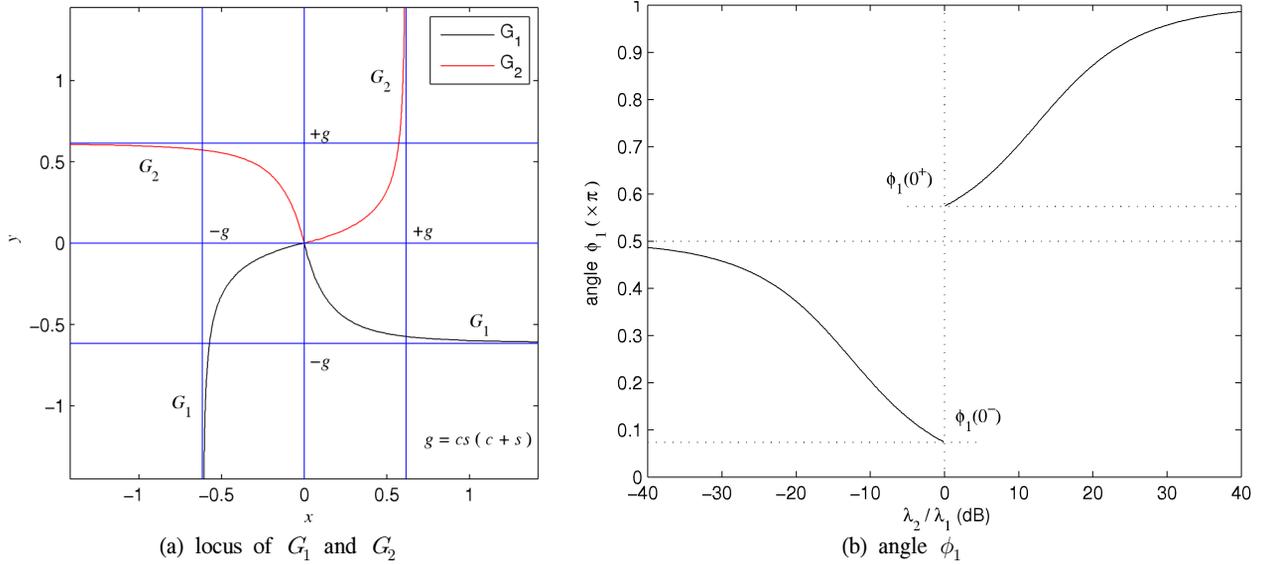


그림 3. 보로노이 셀의 꼭지점 G_1, G_2 의 위치 및 각도, $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$
 Fig. 3. Location and angle of vortices of Voronoi cells, G_1 and G_2 , $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$

R_A 와 R_C 사이의 경계선에 수직인 선분이 이루는 각을 나타낸다.

$$\zeta = \sqrt{\frac{c}{s} \frac{c+s}{c-s}} \quad (17)$$

3.2. 파라미터의 성질

이제, 앞에서 정의한 점들의 좌표 및 길이, 각도를 고찰해보자. 식 (1)에 적용된 회전각 θ 의 범위는 $-\pi/4 < \theta < \pi/4$ 를 가정하였고, 그림에서는 $\theta = 0.5 \tan^{-1}(2)$ 를 적용하였다⁹⁾. 대부분의 경우 간단한 기하학적 성질을 이용하여 분석하였으므로 자세한 증명은 생략하기로 한다. 모든 해석 결과들은 수치적 방법으로 검증되었다.

우선 식 (1), (7), (12)를 참고하여 A, B, C, D 의 좌표를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= [-\lambda_1 b, -\lambda_2 a], & B &= [-\lambda_1 a, \lambda_2 b] \\ C &= [\lambda_1 a, -\lambda_2 b], & D &= [\lambda_1 b, \lambda_2 a] \end{aligned} \quad (15)$$

위 식에서 $a = c - s$ 를, $b = c + s$ 를 나타낸다. 식 (15)와 [정의 1a]로부터 G_1 의 좌표는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$G_1 = cs(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) [(c + q_1 s) / \lambda_1, (q_1 c - s) / \lambda_2] \quad (16)$$

식 (16)에서 $q_1 = \text{sgn}(\lambda_1 - \lambda_2)$ 로 정의한다. 그림 1과 그림 2는 λ_2 / λ_1 이 갖는 서로 다른 7가지 경우에 대하여 보로노이 셀과 G_1 및 G_2 의 위치를 나타낸 것이다. 그림 2에서 ζ 는 다음과 같이 정의된다.

그림 2의 (c)에 나타난 경우와 같이 $\lambda_1 = \lambda_2$ 인 경우는 $G_1 = G_2 = 0$ 이 되므로 보로노이 셀은 간단한 사분면으로 나타내어진다. 한편 그림 2의 (b)와 (e)에 나타난 case 2 및 case 6의 경우는 G_1 이 각각 Q_1 및 P_2 와 일치하게 되며, G_1 과 G_2 를 외심으로 갖는 삼각형들은 직각 이등변 삼각형이 된다. 그림 2의 (a)와 (f)에 나타난 case 1 및 case 7과 같이 λ_1 또는 λ_2 가 다른 값보다 매우 큰 경우는 그림에 나타난 삼각형들의 외심 G_1 과 G_2 가 삼각형의 바깥쪽에 위치하게 된다.

식 (12)의 λ_1 과 λ_2 가 보로노이 셀에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ 로 고정시키고, $r_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$ 를 변화시키면서 보로노이 셀의 여러 파라미터를 고찰하여 보았다. 그림 3의 (a)는 r_λ 를 -40dB~40dB로 변화시켰을 때 G_1 과 G_2 가 그리는 궤적을 나타낸 것이다. 비율 r_λ 가 -40dB에서 0dB로 증가할 때 G_1 은 $[-g, -\infty]$ 로부터 위쪽으로 올라와 원점에 도달하게 된다. 또 비율 r_λ 가 0dB에서 40dB로 증가하면 G_1 은 원점에서 아래 오른쪽으로 출발하여 $[\infty, -g]$ 로 방향으로 이동한다. 한편, G_2 는 G_1 의 원점 대칭이므로 G_1 의 반대 방향으로 이동한다.

원점을 통과하는 보로노이 셀의 경계선이 수평선

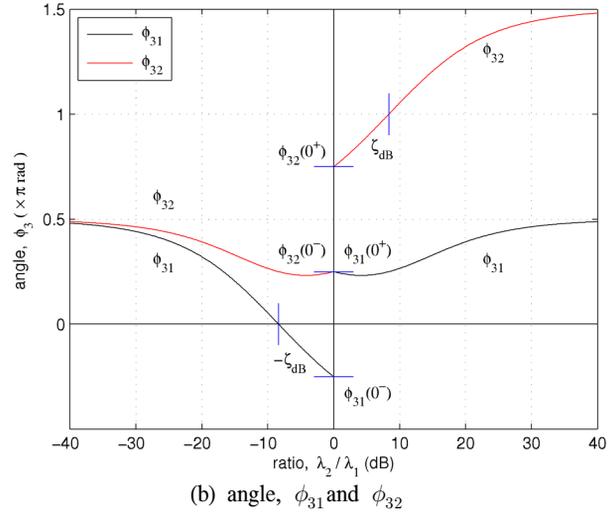
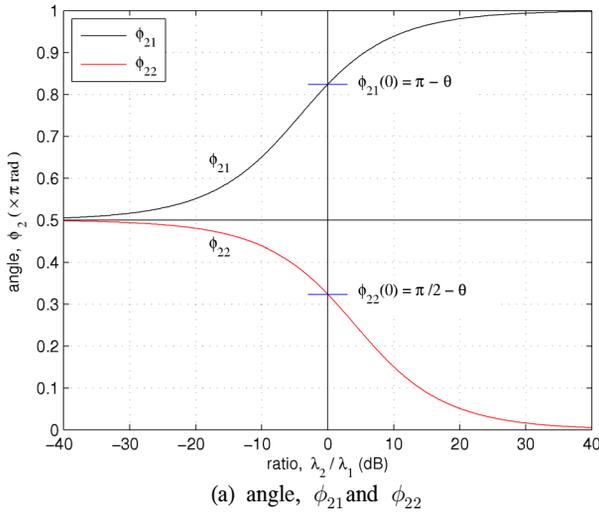


그림 4. 보로노이 셀의 경계선이 이루는 각 ϕ_2 및 경계선과 수직인 선분과 $\overline{G_1 G_2}$ 가 이루는 각 ϕ_3 , $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$
 Fig. 4. Voronoi cell boundary related angles, ϕ_2 and ϕ_3 , $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$

과 이루는 각은 [정의 7]에서 ϕ_1 으로 정의하였고 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{c - q_1 s}{q_1 c + s} \right) \quad (18)$$

그림 3의 (b)는 r_λ 를 -40dB~40dB로 변화시키며 ϕ_1 을 구하여 나타낸 것이다. 그림에서 $\phi_1(0^+)$ 는 $\tan^{-1}\{(c+s)/(-c+s)\}$ 값으로 주어지고 $\phi_1(0^-)$ 는 $\tan^{-1}\{(c-s)/(c+s)\}$ 로 주어진다.

다음과 같이 q_{21} 및 q_{22} 를 정의하자.

$$\begin{aligned} q_{21} &= \text{sgn}(\lambda_1 \zeta - \lambda_2) \\ q_{22} &= \text{sgn}(\lambda_1 - \zeta \lambda_2) \end{aligned} \quad (19)$$

그러면 [정의 8]의 ϕ_{21} 및 ϕ_{22} 를 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_{21} &= \tan^{-1} \left\{ \frac{q_{21} \lambda_2 s + q_1 q_{21} c s (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (q_1 c - s) / \lambda_2}{-q_{21} \lambda_1 c + q_1 q_{21} c s (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (c + q_1 s) / \lambda_1} \right\} \\ \phi_{22} &= \tan^{-1} \left\{ \frac{q_{22} \lambda_2 c + q_{22} c s (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (q_1 c - s) / \lambda_2}{-q_{22} \lambda_1 s + q_1 q_{22} c s (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (c + q_1 s) / \lambda_1} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

그림 4의 (a)는 r_λ 를 -40dB에서 40dB로 변화시키며 ϕ_{21} 과 ϕ_{22} 를 구하여 나타낸 것이다. $\lambda_1 = \lambda_2$ 인 경우, 즉 $r_\lambda = 0$ dB인 경우에는 식 (20)이 단순화되어 $\phi_{21} = \pi - \theta$, $\phi_{22} = \pi/2 - \theta$ 의 값을 갖게 된다.

이와 같은 사실은 그림 2의 (c)에서 보로노이 셀의 경계선이 서로 직교하는 것을 관찰함으로써 확인할 수 있다.

식 (18)과 식 (20)에 나타낸 ϕ_1 및 ϕ_{21}, ϕ_{22} 를 이용하여 [정의 9]의 ϕ_{31}, ϕ_{32} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_{31} &= \frac{\pi}{2} + \phi_1 - \phi_{21} \\ \phi_{32} &= \frac{\pi}{2} + \phi_1 - \phi_{22} \end{aligned} \quad (21)$$

그림 4의 (b)는 r_λ 를 변화시키며 ϕ_{31} 과 ϕ_{32} 를 구하여 나타낸 것이다. 그림에서 $r_\lambda = 0$ dB 근처의 한계 값 $\phi_{31}(0^+)$ 와 $\phi_{32}(0^-)$ 는 모두 $\phi_1(0^+) + \theta - \pi/2$ 로 주어지며, $\phi_{31}(0^-) = \phi_1(0^-) + \theta - \pi/2$ 의 값을 갖고, $\phi_{32}(0^+) = \phi_1(0^+) + \theta$ 의 값을 갖는다.

식 (21)로 나타낸 ϕ_{31} 과 ϕ_{32} 를 이용하여 [정의 5]의 d_{21} 과 d_{22} 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} d_{21} &= -q_1 |G_1 - G_2| \cos(\phi_{31}) \\ d_{22} &= |G_1 - G_2| \cos(\phi_{32}) \end{aligned} \quad (22)$$

위 식에서 $\overline{G_1 G_2}$ 의 길이는 다음과 같이 표현된다.

$$\overline{G_1 G_2} = 2cs |\lambda_1^2 - \lambda_2^2| \sqrt{\frac{(c + q_1 s)^2}{\lambda_1^2} + \frac{(c - q_1 s)^2}{\lambda_2^2}} \quad (23)$$

한편, [정의 3]의 d_{11} 과 d_{12} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

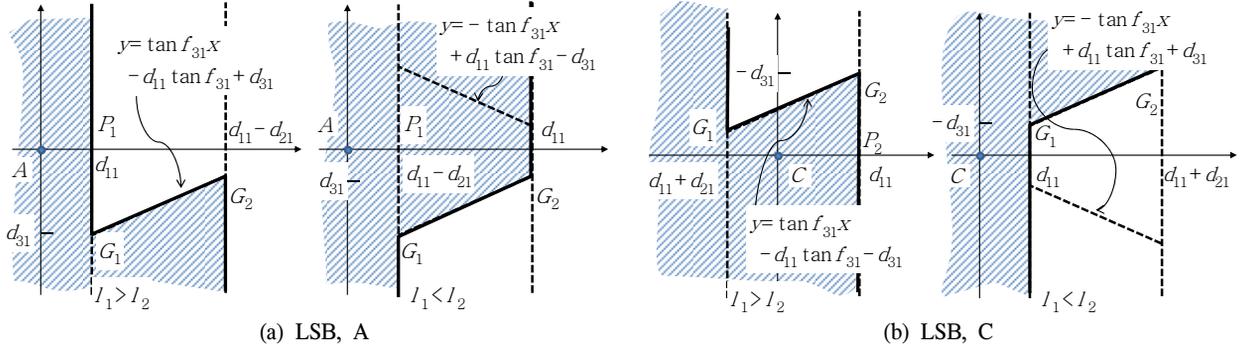


그림 5. 첫 번째 비트의 비트 오류 해석에 필요한 보로노이 셀에서의 리만 적분을 위한 영역
Fig. 5. Riemann integration area over Voronoi cell for the BER analysis of the first bit

$$\begin{aligned} d_{11} &= \sqrt{\lambda_1^2 s^2 + \lambda_2^2 c^2} \\ d_{12} &= \sqrt{\lambda_1^2 c^2 + \lambda_2^2 s^2} \end{aligned} \quad (24)$$

마지막으로, [정의 6]의 d_{31} 과 d_{32} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} d_{31} &= -q_{21} \sqrt{(\lambda_1 c + q_1 G_{1,x})^2 + (\lambda_2 s - q_1 G_{1,y})^2} \\ d_{32} &= q_{22} \sqrt{(\lambda_1 s + q_1 G_{1,x})^2 + (\lambda_2 c + q_1 G_{1,y})^2} \end{aligned} \quad (25)$$

IV. 비트 오류 해석

4.1. 리만 적분 및 비트 오류

제 III절에서 구한 보로노이 셀의 파라미터를 이용하여 BER 해석을 하기 위해서는 그림 1과 2에 나타낸 보로노이 셀을 회전시켜 그림 5와 같이 나타내는 것이 편리하다. 그림 1을 관찰해보면 첫 번째 비트(LSB)가 0인 영역은 보로노이 셀 R_A 와 R_C 의 합집합으로 나타내어진다 것을 알 수 있다. 따라서 첫 번째 비트의 BER 분석을 위하여 보로노이 셀 다이어그램을 $\phi_{21} - \pi/2$ 만큼 시계 방향으로 회전시켜 그림 5와 같은 새로운 보로노이 셀 다이어그램을 얻는다. 식 (12)에서 두 가우시안 확률 변수는 서로 독립적이고 평균이 0이며 분산이 1인 표준 분포를 갖기 때문에 그림 1과 2에 나타낸 2차원 보로노이 셀 다이어그램에서 원점에 대칭인 특성(circular symmetric)을 갖는다. 따라서 보로노이 셀 다이어그램을 회전시킨 그림 5의 x -축 및 y -축에서도 동일한 분포를 갖는다. 한편, 그림 5에서 빗금친 영역은 비트 오류가 발생하지 않는 영역을 나타내고 있다.

그림 5의 (a) 왼쪽에 나타낸 것과 같이 $\lambda_1 > \lambda_2$

인 경우 A 를 기준으로 한 첫 번째 비트의 BER P_{1Aa} 는 다음과 같은 리만 적분으로 표현된다.

$$\begin{aligned} P_{1Aa} &= \int_{d_{11}}^{d_{11}-d_{21}} dx \int_{y=mx+n}^{\infty} f(x,y) dy \\ &+ \int_{d_{11}-d_{21}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx \end{aligned} \quad (26)$$

위 식에서 G_1 과 G_2 를 연결하는 직선의 방정식은 [정의 9]에 의하여 기울기는 ϕ_{31} 이고 점 $[d_{11}, d_{31}]$ 을 지나므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ &= \tan \phi_{31} x - d_{11} \tan \phi_{31} + d_{31} \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)에서 m 은 기울기이고 n 은 y -절편에 해당한다. 식 (26)에서 $f(x,y)$ 는 2차원 표준 가우시안 분포로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x,y) = f(x)f(y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \quad (28)$$

식 (28)에서 $f(x)$ 및 $f(y)$ 는 평균 0과 분산 1을 갖는 표준 가우시안 확률분포 함수이다. 한편, 그림 5의 (a) 오른쪽에 나타낸 것과 같이 $\lambda_1 < \lambda_2$ 인 경우 A 를 기준으로 한 첫 번째 비트의 BER P_{1Ab} 는 다음과 같은 리만 적분으로 표현된다.

$$\begin{aligned} P_{1Ab} &= \int_{d_{11}-d_{21}}^{d_{11}} dx \int_{-\infty}^{y=mx+n} f(x,y) dy \\ &+ \int_{d_{11}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx \end{aligned} \quad (29)$$

식 (28)이 x -축에 대하여 대칭인 것을 고려하면

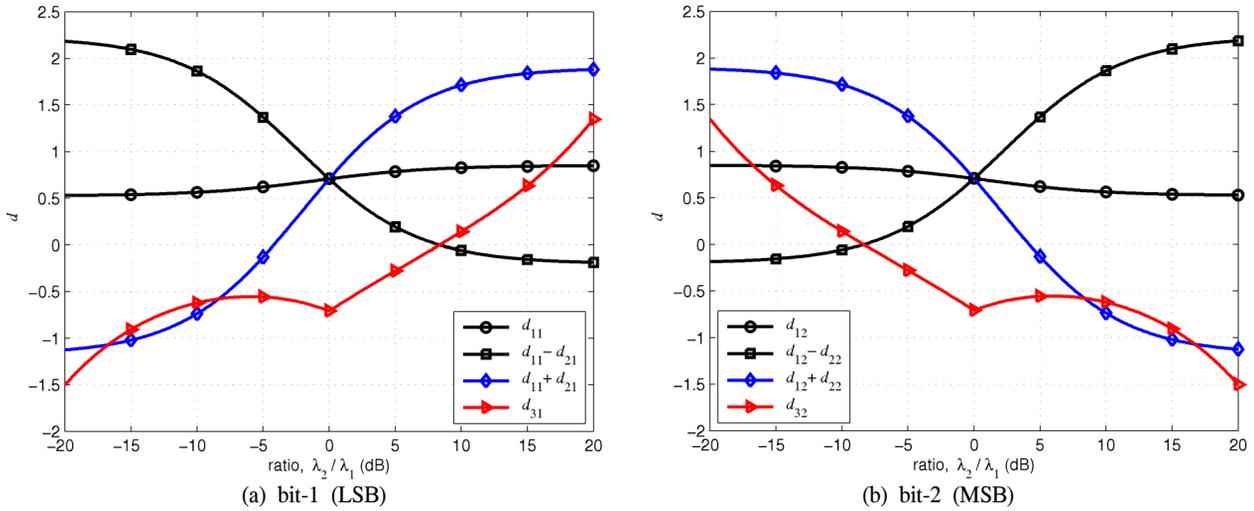


그림 6. λ_1 과 λ_2 의 비율에 따른 리만 적분을 위한 거리 파라미터, $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$
 Fig. 6. A set of distances for Riemann integral as functions of the ratio of λ_1 and λ_2 , $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$

식 (29)의 오른쪽에 나타난 첫 번째 적분은, 그림 5의 (a) 오른쪽에 나타난 것과 같이, 직선 $\overline{G_1G_2}$ 를 x -축에 대하여 대칭인 새로운 직선을 이용한 식으로 표현할 수 있으며, 식 (29)를 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$P_{1Ab} = \int_{d_{11}-d_{21}}^{d_{11}} dx \int_{y=-mx-n}^{\infty} f(x,y) dy + \int_{d_{11}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx \quad (30)$$

식 (26)과 식 (30)을 통합하여 나타내기 위하여 다음과 같이 상수들을 정의하자.

$$\begin{aligned} m_{1A} &= q_1 \tan \phi_{31} \\ n_{1A} &= -q_1 (d_{11} \tan \phi_{31} - d_{31}) \\ d_{1A} &= \max(d_{11}, d_{11} - d_{21}) \end{aligned} \quad (31)$$

식 (31)을 이용하면 모든 λ_1 과 λ_2 에 대하여 A 를 기준으로 한 첫 번째 비트의 BER을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_{1A} = q_1 \int_{d_{11}}^{d_{11}-d_{21}} dx \int_{y=m_{1A}x+n_{1A}}^{\infty} f(x,y) dy + \int_{d_{1A}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx \quad (32)$$

식 (32)에서 q_1 은 앞서 II절에서 $q_1 = \text{sgn}(\lambda_1 - \lambda_2)$ 로 정의하였다. 식 (32)는 다음과 같이 가우시안 Q-

함수를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$P_{1A} = q_1 \int_{d_{11}}^{d_{11}-d_{21}} Q(m_{1A}x + n_{1A}) f(x) dx + Q(d_{1A}) \quad (33)$$

그림 5의 (b)에 나타난 C 를 기준으로 한 첫 번째 비트의 BER도 같은 방법을 적용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_{1C} = q_1 \int_{d_{11}+d_{21}}^{d_{11}} Q(m_{1C}x + n_{1C}) f(x) dx + Q(d_{1C}) \quad (34)$$

식 (34)에서 상수들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} m_{1C} &= q_1 \tan \phi_{31} \\ n_{1C} &= -q_1 (d_{11} \tan \phi_{31} + d_{31}) \\ d_{1C} &= \max(d_{11}, d_{11} + d_{21}) \end{aligned} \quad (35)$$

식 (33)과 식 (34)를 이용하면 첫 번째 비트의 BER $P_{b,1}$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_{b,1} = \Pr(b_2 = 0) P_{1A} + \Pr(b_2 = 1) P_{1C} \quad (36)$$

식 (36)에서 b_2 는 두 번째 비트(MSB)를 나타내며 송신기에서 전송하는 b_2 의 확률이 다른 일반적인 경우를 가정하였다. 만약 같은 확률로 b_2 가 전송된다면 식 (34)는 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

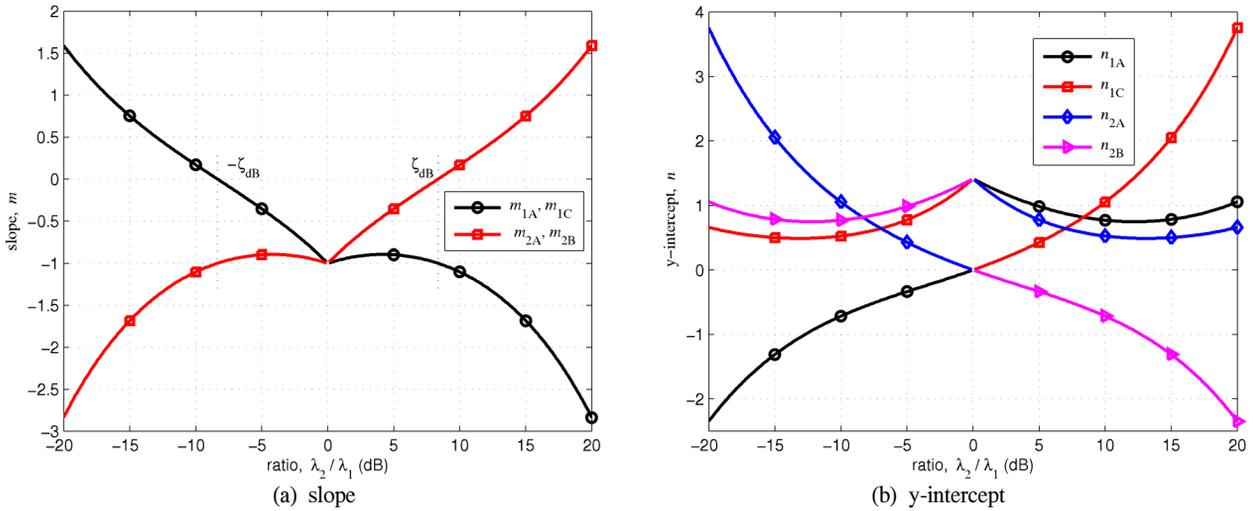


그림 7. λ_1 과 λ_2 의 비율에 따른 리만 적분 경계선의 기울기 및 y -절편, $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$
 Fig. 7. The slopes and y -intercepts of Riemann integral boundary lines for the various values of λ_2/λ_1 , $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$

$$P_{b,1} = \frac{1}{2}(P_{1A} + P_{1C}) \quad (37)$$

두 번째 비트의 BER도 그림 1과 그림 2에 나타난 보로노이 셀 다이어그램을 $\pi/2 - \phi_{22}$ 만큼 반시계 방향으로 회전시켜 그림 5와 비슷한 적분 영역을 점 A와 점 B를 기준으로 고찰함으로써 구할 수 있다. 점 A를 기준으로 하여 두 번째 비트의 BER을 구하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_{2A} = q_1 \int_{d_{12}}^{d_{12}+d_{22}} Q(m_{2A}x + n_{2A})f(x) dx + Q(d_{2A}) \quad (38)$$

여기서 상수들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} m_{2A} &= -q_1 \tan \phi_{32} \\ n_{2A} &= q_1(d_{12} \tan \phi_{32} + d_{32}) \\ d_{2A} &= \max(d_{12}, d_{12} + d_{22}) \end{aligned} \quad (39)$$

또 점 B를 기준으로 하여 두 번째 비트의 BER을 구하면 다음과 같다.

$$P_{2B} = q_1 \int_{d_{12}-d_{22}}^{d_{12}} Q(m_{2B}x + n_{2B})f(x) dx + Q(d_{2B}) \quad (40)$$

사용된 상수들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} m_{2B} &= -q_1 \tan \phi_{32} \\ n_{2B} &= q_1(d_{12} \tan \phi_{32} - d_{32}) \\ d_{2B} &= \max(d_{12}, d_{12} - d_{22}) \end{aligned} \quad (41)$$

그림 7은 식 (31), (35), (39) 및 (41)에 나타난 직선의 기울기 및 y -절편 값들을 다양한 λ_2/λ_1 을 적용하여 구한 후 나타낸 것이다.

식 (38)과 식 (40)을 이용하면 두 번째 비트의 BER $P_{b,2}$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_{b,2} = \Pr(b_1 = 0)P_{2A} + \Pr(b_1 = 1)P_{2B} \quad (42)$$

또, 같은 확률로 b_1 이 전송되는 경우는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_{b,2} = \frac{1}{2}(P_{2A} + P_{2B}) \quad (43)$$

이 경우 전체 평균 BER은 다음과 같이 표현된다.

$$P_b(\gamma; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4}(P_{1A} + P_{1C} + P_{2A} + P_{2B}) \quad (44)$$

식 (44)에서는 평균 BER P_b 가 SNR $\gamma = \rho/\sigma_0^2$ 과 λ_1 및 λ_2 에 의존적이라는 것을 나타내기 위하여 $P_b(\gamma; \lambda_1, \lambda_2)$ 로 나타내었다.

한편, 식 (33), (34), (38), (40)은 다음 적분 계산을 필요로 한다.

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta; m, n) &= \int_{\alpha}^{\beta} Q(mx + n)f(x) dx \\ &= I_1(\beta; m, n) - I_1(\alpha; m, n) \end{aligned} \quad (45)$$

식 (45)에서 $I_1(\alpha; m, n)$ 은 다음과 같이 정의된다.

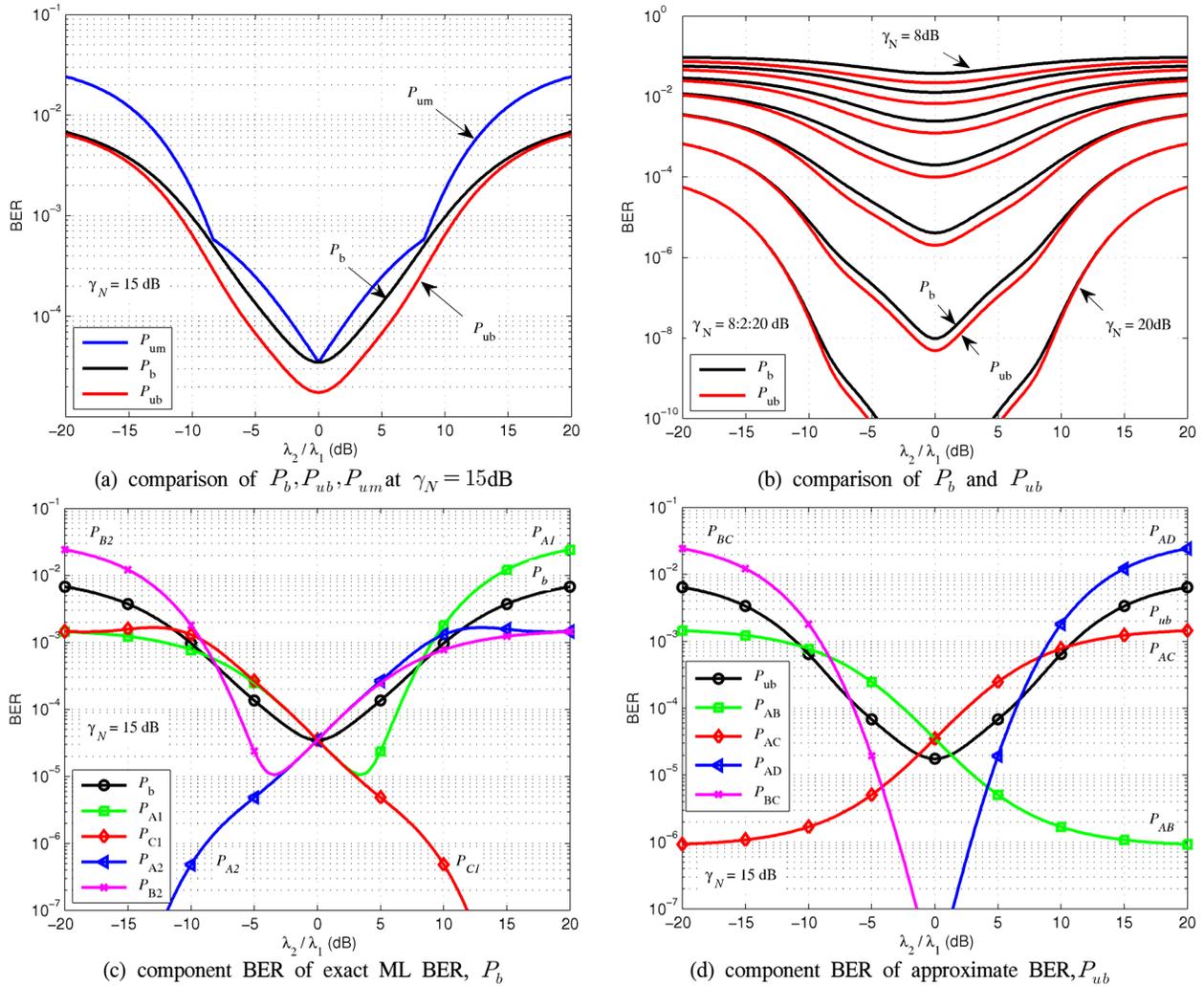


그림 8. λ_1 과 λ_2 의 비율에 따른 정확한 ML BER P_b 및 기존의 근사 BER P_{ub} , $\theta = 0.5 \times \tan^{-1}(2)$
 Fig. 8. The BER comparisons of the exact ML BER P_b and the approximate BER P_{ub} for the various values of λ_2/λ_1

$$I_1(\alpha; m, n) = \int_0^\alpha Q(mx+n) f(x) dx \quad (46)$$

식 (46)에 나타난 적분 $I_1(\alpha; m, n)$ 의 일반적 해는 알려져 있지 않지만 수치해석 방법으로 쉽게 적분할 수 있다. 또 다음과 같이 가우시안 Q -함수를 나타내면^[10] 적분 범위를 고정시킬 수도 있다.

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sin^2\theta}\right) d\theta, x > 0 \quad (47)$$

식 (47)을 식 (46)에 대입하고 부록의 (A.4)식을 이용하여 정리하면 다음 표현식을 얻을 수 있다.

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sigma e^{-\frac{n^2}{2(m^2 + \sin^2\theta)}} \left\{ Q\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\mu + \alpha}{\sigma}\right) \right\} d\theta \quad (48)$$

위 식에서 $\sigma^2 = \sin^2\theta/(m^2 + \sin^2\theta)$ 를 나타내고, $\mu = mn/(m^2 + \sin^2\theta)$ 를 나타낸다. 식 (47)을 이용할 때 주의하여야 할 것은, 식 (47)이 $x > 0$ 인 경우에만 성립하기 때문에, $x < 0$ 인 경우 $Q(x)$ 대신 $1 - Q(-x)$ 값으로 변형하여 적용하여야 한다는 것이다.

또한 다음과 같은 가우시안 Q -함수의 근사식^[11]을 이용하면 해석적 결과식도 얻을 수 있다.

$$Q(x) \approx \frac{1}{12} e^{-x^2/2} + \frac{1}{4} e^{-2x^2/3} \quad (49)$$

식 (49)를 식 (46)에 대입하고 부록의 (A.4)식을 이용하여 간단하게 정리하면, $I_1(\alpha; m, n)$ 을 다음과 같은 해석적 근사식으로 표현할 수 있다.

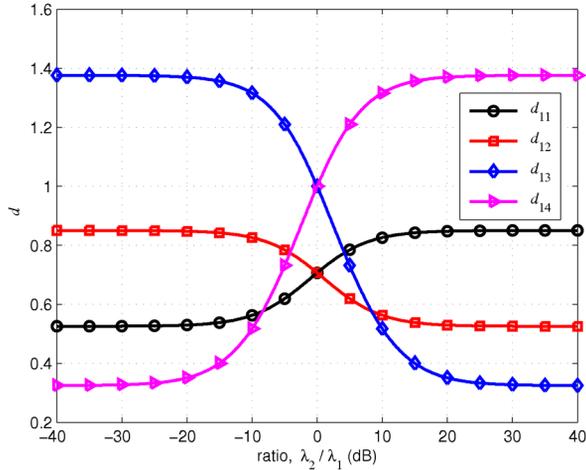


그림 9. 근사 BER을 구하기 위한 거리 인자
Fig. 9. Distance parameters for the union bound BER

$$I_1 \approx \frac{1}{12} I_2(\alpha; m, n) + \frac{1}{4} I_2\left(\alpha; \frac{2}{\sqrt{3}}m, \frac{2}{\sqrt{3}}n\right) \quad (50)$$

식 (50)에서 I_2 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_2 = \sigma e^{-n^2\sigma^2/2} \left\{ Q\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\alpha + \mu}{\sigma}\right) \right\} \quad (51)$$

식 (51)에서는 σ^2 과 μ 가 각각 $\sigma^2 = 1/(1+m^2)$ 과 $\mu = mn/(1+m^2)$ 으로 정의된다. 식 (50)은 $\alpha \gg 0$ 일 때 정확도가 높다.

그림 8은 식 (44)에서 구한 평균 BER을 다양한 λ_2/λ_1 비율 및 정규화 된 SNR $\gamma_N = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ 에 대하여 나타낸 것이다. 이 때 식 (46)의 계산은 사다리꼴 수치 적분 방법을 적용하였다.

4.2. 유니온 바운드를 이용한 비트 오류

기존의 BER 성능 분석 방법은 유니온 바운드를 이용한 심벌 쌍 오류 확률에 기초하고 있다. 그림 1에서 실제로는 심벌 A가 전송되었으나 수신기에서 심벌 B로 복호될 심벌 쌍 오류 확률 (pair-wise symbol error probability) P_{AB} 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$P_{AB} \leq Q(d_{11}) \quad (52)$$

한편, $P_{CD} = P_{AB}$ 이다. 다른 모든 심벌 쌍 오류 확률도 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} P_{AC} = P_{BD} &\leq Q(d_{12}) \\ P_{AD} &\leq Q(d_{13}), P_{BC} \leq Q(d_{14}) \end{aligned} \quad (53)$$

식 (52)와 (53)에서 d_{11} 과 d_{12} 는 식 (24)로 주어지고, d_{13} 와 d_{14} 는 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} d_{13} &= \overline{AD}/2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2cs(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \\ d_{14} &= \overline{BC}/2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2cs(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \end{aligned} \quad (54)$$

그레이 기법을 이용한 비트-심벌 매핑을 가정하고 심벌 쌍 오류 확률로부터 비트 오류 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P_{ub}(\gamma; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4} (P_{AB} + P_{AC} + P_{AD} + P_{BC}) \quad (55)$$

또한, $d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}$ 가운데 최소값을 기반으로 오류 확률을 구하면 다음과 같다.

$$P_{um}(\gamma; \lambda_1, \lambda_2) = Q(\min\{d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}\}) \quad (56)$$

그림 9는 $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ 로 고정하고 λ_2/λ_1 비율을 -40dB ~ 40dB로 변화시키며 식 (55)와 식 (56)으로 주어지는 P_{ub} 와 P_{um} 을 구하기 위한 거리 인자들을 나타낸 것이다. 그림 9를 관찰해 보면 d_{13} 와 d_{14} 는 $\lambda_1 = \lambda_2$ 일 때 1의 같은 값을 갖고, d_{11} 과 d_{14} 는 그림 2의 (b)에 해당하는 $\lambda_1 = \zeta\lambda_2$ 일 때, 또 d_{12} 와 d_{13} 는 그림 2의 (e)에 해당하는 $\lambda_2 = \zeta\lambda_1$ 일 때 같은 값을 갖는다. 식 (56)의 P_{um} 은 그림 9의 거리들 가운데 가장 밑의 최소값을 이용하게 된다.

그림 8의 (a)는 식 (55)에서 구한 심벌 쌍 오류 확률에 기초한 BER P_{ub} 와 식 (56)에서 구한 최소 거리 기반의 BER P_{um} , 그리고 식 (44)에서 구한 정확한 BER을 정규화 된 SNR 값이 $\gamma_N = 15$ dB일 때 다양한 λ_2/λ_1 값에 대하여 나타낸 것이다. 그림 8의 (a)를 관찰해 보면 정확한 BER P_b 는 다음과 같이 P_{ub} 와 P_{um} 에 의하여 바운드 된다는 것을 알 수 있다.

$$P_{ub} \leq P_b \leq P_{um} \quad (57)$$

그림 8의 (b)는 γ_N 을 8dB부터 2dB 간격으로 20dB까지 변경시키며 P_b 와 P_{ub} 를 구하여 나타낸

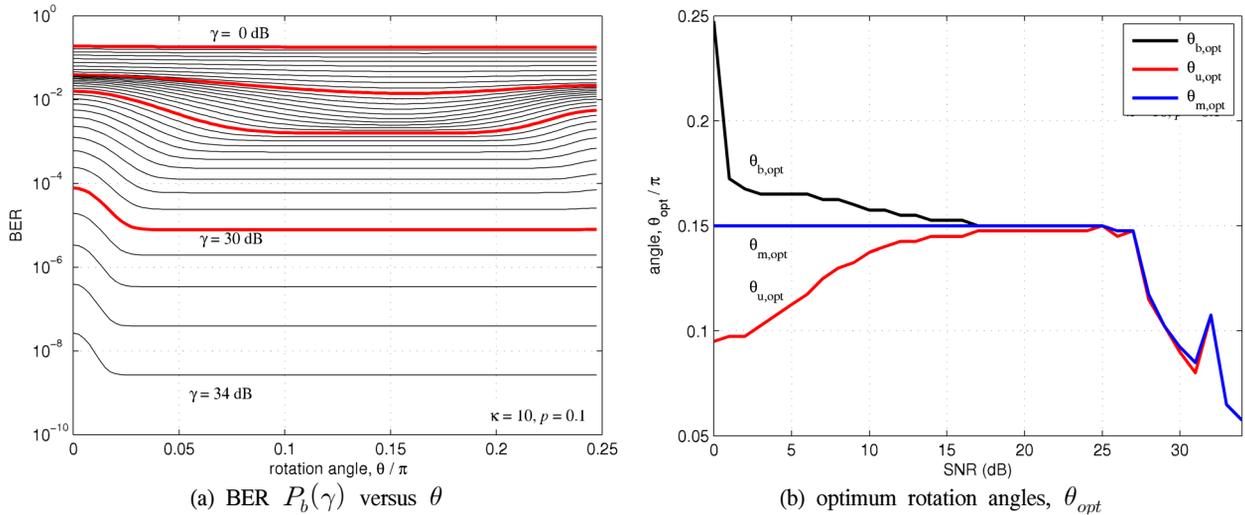


그림 10. 임펄스 잡음 환경에서 동작하는 회전변환 QPSK 기법의 ML BER 및 최적 회전각, $\kappa = 10, p = 0.1$
 Fig. 10. BER and optimum angles of rotation-transform aided QPSK over impulsive noise, $\kappa = 10, p = 0.1$

것이다. 가로축인 λ_2/λ_1 의 비율이 $-10\text{dB} \sim 10\text{dB}$ 인 경우 γ_N 이 높은 값을 갖더라도 정확한 BER P_b 와 근사 BER P_{ub} 값의 차이가 지속된다는 것을 알 수 있다. 다만, γ_N 값이 높은 경우에는 2dB 변화에 해당하는 BER 값의 변화가 상대적으로 크기 때문에, P_b 와 P_{ub} 의 차이가 두드러지게 보이지 않는 경향이 있다. 그림 8의 (c)와 (d)는 각각 식 (44)과 식 (55)에 나타난 요소 BER 들의 변화 추이를 고찰하여 본 것이다. 이러한 요소 BER들의 대칭 관계는 보로노이 셀의 모양 및 리만 적분 영역이 서로 대칭인 것과 관련이 있다.

4.3. 임펄스 잡음 환경에서의 비트 오류

식 (12)에 나타난 ML 복호 신호 모델에서 λ_1 과 λ_2 는 다음과 같이 각각 정의되었다.

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\rho} \alpha_1}{\kappa_1 \sigma_0}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{\rho} \alpha_2}{\kappa_2 \sigma_0} \quad (58)$$

앞서 II절의 2.1에서 고찰한 것과 같이 본 논문에 적용된 임펄스 잡음 모델은 p 의 확률로 $\kappa_i = \kappa$ 값을 갖고, $1-p$ 의 확률로 1의 값을 갖는다. 여기서는 레일레이 페이딩이 없다고 가정하고, 즉 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ 으로 설정하고, 해당 시스템이 순수하게 임펄스 잡음 환경에서 동작하는 경우 평균 BER을 구하여 고찰하기로 한다.

식 (44)를 이용하여 임펄스 잡음 환경에서 동작하는 회전변환 QPSK를 적용한 ML 복호기의 평균

BER P_b 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$P_b(\gamma) = (1-p)^2 P_b(\gamma; \lambda_0, \lambda_0) + p^2 P_b(\gamma; \lambda_\kappa, \lambda_\kappa) + 2p(1-p) P_b(\gamma; \lambda_0, \lambda_\kappa) \quad (59)$$

위 식에서 λ_0 는 $1-p$ 의 확률로 임펄스 성분의 영향을 받지 않는 경우로 $\lambda_0 = \sqrt{\rho}/\sigma_0$ 로 나타낼 수 있다. 또, λ_κ 는 p 의 확률로 임펄스 성분의 영향을 받은 경우로 $\lambda_\kappa = \sqrt{\rho}/(\kappa\sigma_0)$ 로 나타낼 수 있다. 식 (59)에 나타난 평균 BER $P_b(\gamma)$ 는 SNR γ 뿐만 아니라 회전각 θ 의 함수이기도 하다.

그림 10과 11은 $\kappa = 10, p = 0.1$ 의 파라미터를 적용하여 BER을 분석한 것이다. 이 파라미터는 임펄스 잡음 환경에서 동작하는 통신 시스템을 고찰한 여러 문헌에서 사용되어왔다^{[4][15]}. 그림 10의 (a)는 SNR γ 를 0dB에서 1dB단위로 34dB까지 변경 시키며 회전각 $0 \leq \theta \leq \pi/4$ 에 대하여 식 (59)에 나타난 평균 BER $P_b(\gamma)$ 를 구하여 나타낸 것이다. 그림에서 굵은 선으로 나타낸 BER 곡선은 각각 SNR γ 값이 0dB, 10dB, 20dB, 30dB인 경우에 해당한다. 그림 10의 (a)를 관찰해보면 SNR γ 값이 증가함에 따라 넓은 범위의 θ 에서 거의 가장 낮은 BER을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그림 10의 (b)는 SNR γ 값에 따른 최적의 회전각 θ_{opt} 를 나타낸 것이다. 유니온 바운드와 최소 거리를 이용한 BER을 적용하였을 때 얻을 수 있는 최적의 회전각도 함께 구하여 그림 10의 (b)에 나타내었다. 그림 10의 (b)를 관찰해보면 SNR γ 값이 17dB 이상인 경우 서로

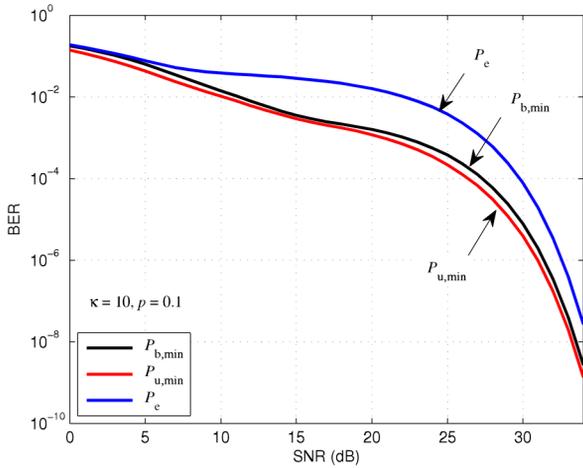


그림 11. 최적 회전각을 적용한 ML BER, $\kappa = 10, p = 0.1$
 Fig. 11. BER with optimum angles, $\kappa = 10, p = 0.1$

다른 세 가지 방법으로 구한 최적의 회전각이 거의 일치하는 것을 알 수 있다. 그림 10의 (b)에서 관찰할 수 있는 중요한 사실 가운데 하나는 SNR γ 값이 0dB~15dB의 범위에 있는 경우 근사적 BER 해석에 근거한 최적의 회전각($\theta_{m,opt}$, 또는 $\theta_{u,opt}$)이 갖는 경향성이 실제 BER 해석에 근거한 최적의 회전각($\theta_{b,opt}$)이 갖는 경향성과 다르다는 것이다. 따라서 근사적 BER 해석을 근거로 어떤 파라미터를 최적화 할 때 그 경향성에 대한 고찰은 매우 신중하여야 한다는 것을 알 수 있다.

그림 11은 회전 변환을 적용하지 않은 경우의 BER P_e 와, 최적의 회전각을 적용하여 얻은 정확한 BER $P_{b,min}$, 그리고 최적의 회전각을 적용하였을 때 유니온 바운드를 이용하여 얻은 근사 BER $P_{u,min}$ 을 함께 나타낸 것이다. 회전 변환을 적용하지 않은 경우의 BER $P_e(\gamma)$ 는 참고문헌 [6]에서 분석되었으며 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$P_e(\gamma) = (1-p)^2 Q(\sqrt{\gamma}) + p^2 Q(\sqrt{\gamma}/\kappa) + p(1-p)\{Q(\sqrt{\gamma}) + Q(\sqrt{\gamma}/\kappa)\} \quad (60)$$

그림 11에서 관찰할 수 있는 것과 같이 최적 회전 변환을 적용하고 ML 복호기를 사용하는 기법은 회전 변환을 적용하지 않은 기법과 비교하여 10^{-2} BER 영역에서는 약 10dB, 그리고 10^{-3} BER 영역에서는 약 3dB 정도의 SNR 이득을 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다. 한편, 식 (59)로 표현되는 ML BER $P_b(\gamma)$ 를 계산할 때 $\theta = 0$ 으로 설정하게 되면 식 (60)과 동일한 BER 결과를 얻을 수 있었다.

그림 11에서 유니온 바운드를 이용한 BER $P_{u,min}$ 은 모든 SNR 영역에서 실제 BER $P_{b,min}$ 보다 조금 낮은 값을 나타내는 것을 관찰할 수 있다. 동일한 BER을 얻기 위한 SNR 값의 관점에서 근사적인 BER $P_{u,min}$ 과 실제 BER $P_{b,min}$ 을 관찰해 보면, SNR 범위가 0dB~10dB일 때, 또 20dB~30dB일 때 그 SNR 차이가 두드러지게 나타나는 것을 관찰할 수 있다. 이러한 현상은 식 (59)의 오른쪽에 나타난 첫 번째 및 두 번째 요소 BER이 각각 이 구간에서 전체 BER에 가장 큰 영향을 끼치는 동시에, 그림 8의 (b)에서 관찰할 수 있는 것과 같이 이 구간이 근사 BER과 실제 BER의 차이가 두드러지게 나타나는 이른바 ‘낮은 SNR’ 영역에 해당되기 때문이다.

V. 결론

본 논문에서는 임펄스 잡음 환경에서 동작하는 회전변환 QPSK 변조 시스템에서 ML 복호기를 사용하는 경우 정확한 BER을 해석하기 위한 방법론을 체계적으로 제시하였다. 제시한 방법론은 2차원 공간에서 보로노이 셀의 특징을 분석하고, 리만 적분을 이용한 요소 BER 값들을 유도한 후, 임펄스 잡음 인자를 적용하여 평균 BER을 구하는 단계로 구성되어 있다. 이러한 BER 해석 결과를 이용하여 임펄스 잡음 인자의 영향, 회전변환 각의 영향을 용이하게 고찰할 수 있었고, BER을 최소로 하는 최적의 회전변환 각도 구할 수 있었다. 최적의 회전각을 적용한 2차 회전변환 QPSK 시스템은 회전각을 적용하지 않은 시스템과 비교하여, 10^{-2} 의 BER에서는 약 10dB, 10^{-3} 의 BER에서는 약 3dB의 SNR 이득을 나타내었다. 한편, 기존의 근사적 BER 해석 기법도 함께 분석하여 그 차이 및 유사성을 고찰하였다. 기존의 심벌 쌍 오류 확률 및 최단거리 기준의 오류 확률에 기반을 둔 근사적 BER 값들은 본 논문에서 유도한 정확한 BER과 각각 약간 낮거나 높은 값을 나타내었다.

부 록

본문의 식 (48)과 식 (50) 및 (51)를 유도하는 과정에서 다음 적분 관계식을 사용하였다. 먼저, 적분 $I_A(\alpha; \mu, \sigma^2)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$I_A(\alpha; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+\mu)^2} dx. \quad (A.1)$$

식 (A.1)에서 $x/\sigma = y$ 로 치환하면,

$$I_A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha/\sigma} \sigma e^{-\frac{1}{2}(y+\mu/\sigma)^2} dy \quad (A.2)$$

를 얻을 수 있다. 또 식 (A.2)에서 $y + \mu/\sigma = x$ 로 다시 치환하면,

$$I_A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu/\sigma}^{(\alpha+\mu)/\sigma} \sigma e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (A.3)$$

로 나타낼 수 있고, 식 (A.3)은 가우시안 Q -함수를 이용하여 최종적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_A = \sigma \left\{ Q\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\alpha + \mu}{\sigma}\right) \right\} \quad (A.4)$$

References

[1] G. R. Lang, "Rotational transformation of signals," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-9, pp. 191-197, Jul. 1963.

[2] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, 3rd ed, Springer, 1998.

[3] A. D. Spaulding and D. Middleton, "Optimum reception in an impulsive interference environment - Part I: coherent detection," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 25, no. 9, pp. 910-923, Sep. 1977.

[4] B. Aazhang and H. V. Poor, "Performance of DS/SSMA commun. in impulsive channels - Part I: linear correlation receivers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 35, no. 11, pp. 1179-1188, Nov. 1987.

[5] H. C. Kim, B. J. Ko and S. J. Cho, "Comprehensive performance analysis and comparison of various digital communication systems in a multipath fading channel with additive mixture of Gaussian and impulse noise: Part-1," *J-KICS*, vol. 14, no. 3, pp.

263-279, Jun. 1989.

[6] M. Ghosh, "Analysis of effect of impulsive noise on multicarrier and single carrier QAM systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 2, pp. 145-147, Feb. 1996.

[7] G. W. Wornell, "Spread-response precoding for communication over fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, no. 2, pp. 488-501, Mar. 1996.

[8] V. Tarokh, N. Seshadri and A. R. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criterion and code construction," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 744-765, Mar. 1998.

[9] J. Boutros and E. Viterbo, "Signal space diversity: a power- and bandwidth -efficient diversity technique for the Rayleigh fading channel," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 44, no. 4, pp. 1453-1467, Jul. 1998.

[10] M. K. Simon and M.-S. Alouini, "A unified approach to the performance analysis of digital communications over generalized fading channels," *Proc. IEEE*, vol. 86, no. 9, pp. 1860-1877, Sep. 1998.

[11] M. Chiani, D. Dardari and M. K. Simon, "New exponential bounds and approximations for the computation of error probability in fading channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 2, no. 4, pp. 840-845, Jul. 2003.

[12] J. Häring and A. J. H. Vinck, "Coding and signal space diversity for a class of fading and impulsive noise channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 50, no. 5, pp. 887-895, May 2004.

[13] S. H. Jang, Y. S. Park, and W. Y. Kim, "Improved Euclidean transform method using Voronoi diagram," *J-KICS*, vol. 29, no. 12C, pp. 1686-1691, Dec. 2004.

[14] M. C. Ju and I. M. Kim, "ML performance analysis of the decode-and-forward protocol in cooperative diversity networks," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 8, no. 7, pp. 3855-3867, Jul. 2009.

[15] V. G. Chavali and C. R. C. M. da Silva, "Maximum-likelihood classification of digital amplitude-phase modulated signals in flat

fading non-gaussian channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 59, no. 8, pp. 145-147, Aug. 2011.

최 병 조 (Byoungjo Choi)



1990년 2월 한국과학기술원 전
기및전자공학과 공학사
1992년 2월 한국과학기술원 전
기및전자공학과 공학석사
2002년 5월 사우스햄튼대학교
전자전산학과 공학박사
1992년 3월~2005년 2월 LG

전자

2005년 3월~현재 인천대학교 임베디드시스템공학
과 전임강사, 조교수, 부교수
<관심분야> 전자공학, 통신공학, 제어공학