

# 송신 상관된 레일리 채널에서 프리코더를 갖는 MIMO MMSE 수신기의 성능 분석

김 원 섭\*

## Performance Analysis of Precoded MIMO MMSE Receivers in Transmit-Correlated Rayleigh Channels

Wonsop Kim\*

요 약

이 논문에서는 송신 상관된 레일리 페이딩 채널에서 프리코더를 갖는 다중 입출력 안테나 시스템이 고려된다. 특히 최소평균제곱오차 수신기를 적용한 다중 입출력 안테나 시스템을 대상으로 한다. 임의 행렬 이론에 기초하여, 신호 대 간섭 및 잡음비의 확률 밀도 함수를 유도하기 위한 정확하고 일반화된 식을 유도한다. 그리하여 적은 수의 송신 및 수신 안테나에 대하여 정확한 폐쇄형 신호 대 간섭 및 잡음비의 확률 밀도 함수 식을 제안한다. 또한, 신호 대 간섭 및 잡음비의 확률 밀도 함수 식에 기초하여 폐쇄형 심볼 오류율 근사식을 제안한다. 제안하는 심볼 오류율 분석결과는 오류 확률을 정확하게 예측하거나, 시스템 디자인을 위한 유용한 툴로서 사용될 수 있을 것으로 예상된다.

**Key Words** : MIMO, MMSE, Precoder, SINR, SER

### ABSTRACT

In this paper, the multiple-input multiple-output (MIMO) system with a precoder is considered in the transmit-correlated Rayleigh channels. We specifically target the MIMO system employing the minimum mean square error receivers. Based on random matrix theory, we first present a direct and generalized formulation for deriving a probability density function (PDF) of the signal-to-interference-plus-noise ratio (SINR). Then, we derive the accurate closed-form SINR PDFs for a small number of transmit and receive antennas. Based on the SINR PDFs, tight closed-form approximations of the symbol error rate (SER) are derived. Our analysis suggests that the SER approximations can be used to accurately estimate the error probabilities or as a useful tool for the system design.

### I. 서 론

다중 입출력 (multiple-input multiple-output, MIMO) 시스템은 모바일 통신뿐만 아니라 유도무기 점검 등 다양한 무선통신 방법으로 연구가 진행되어 왔다. MIMO 기법은 데이터 전송률을 높이는 것을 목적으로 하는 공간 다중화 (spatial

multiplexing, SM) 기법과 데이터 신뢰도를 높이는 것을 목적으로 하는 전송 다양성 (transmit diversity) 기법으로 나눌 수 있다<sup>[1]</sup>. 본 논문에서는 최소평균제곱오차 (minimum mean square error, MMSE) 수신기를 갖는 SM 시스템을 대상으로 한다<sup>[2]</sup>.

모바일 통신 및 유도무기 점검을 위한 MIMO

\* 주저자 : 국방과학연구소 정밀유도기술센터, topsop@add.re.kr, 정희원  
논문번호 : KICS2013-01-011, 접수일자 : 2013년 1월 9일, 최종논문접수일자 : 2013년 7월 9일

MMSE 수신기의 송신 신호는 프리코더 (precoder) 를 이용하여 최적화될 수 있다<sup>3,7</sup>. 기존 연구결과에서는 송신 및 수신단에서 완벽한 채널 정보 (channel state information, CSI) 를 가정하였다<sup>3,4</sup>. 최근에는 송신 (transmit, Tx) 및 수신 (receive, Rx) 상관 행렬 (correlation matrices) 이 송신단에만 이용 가능하다고 가정하였고, 최적의 프리코더의 좌측 고유벡터 (eigenvector)는 Tx 상관 행렬의 고유벡터와 일치한다고 연구되었다<sup>5-7</sup>.

상관이 없는 레일리 채널 (uncorrelated Rayleigh channels) 에서 MIMO MMSE 수신기를 위한 신호 대 간섭 및 잡음비 (signal-to-interference-plus-noise ratio, SINR) 의 확률 밀도 함수 (probability density function, PDF) 와 심볼 오류율 (symbol error rate, SER) 이 적은 수의 Tx 및 Rx 안테나 상황에서 유도되었다<sup>2</sup>. 송신 상관된 레일리 채널 (transmit-correlated Rayleigh channels) 에서는 다양성이 결합된 MIMO MMSE 수신기에 대하여 SER이 유도되었다<sup>8</sup>. 그러나 [8]은 SINR PDF에 대해서 다루지 않았다. 또한 송신 상관된 레일리 채널에서 MIMO MMSE 수신기의 SINR PDF가 Gamma 또는 generalized Gamma 분포 (distribution) 로 근사화되는 것으로 연구되었다<sup>9</sup>. 그리하여 위 분포를 이용하여 비트 오류율 (bit error rate, BER) 근사식이 유도되었다<sup>6</sup>. 그러나 이 BER 근사식은 근사화된 SINR PDF 분포를 이용하였기에 정확성이 떨어지는 단점이 있다<sup>6</sup>.

본 논문에서는 모바일 통신 및 유도무기 점검을 위하여 송신 상관된 레일리 채널에서 프리코더를 갖는 MIMO MMSE 수신기를 고려한다. 수신단에는 완벽한 CSI를 가정하며, 송신단에는 Tx 및 Rx 상관 행렬만 이용 가능하다고 가정한다. 임의 행렬 이론 (random matrix theory) 에 기초하여, 근사화된 분포를 이용하지 않고 SINR PDF를 유도하기 위한 정확하고 일반화된 식을 유도한다. 그리하여 적은 수의 Tx 및 Rx 안테나에 대하여 정확한 폐쇄형 (closed-form) SINR PDF를 유도한다. 또한 유도한 SINR PDF 및 Gaussian Q-function 근사식<sup>12</sup>을 이용하여 폐쇄형 SER 근사식을 유도한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 시스템 모델에 대하여 살펴본다. III장에서는 SINR PDF를 유도하기 위한 정확하고 일반화된 식을 유도하고, 적은 수의 Tx 및 Tx 안테나에 대하여 SINR PDF를 유도한다. 또한 모의 실험을 통하여, 제안한 SINR PDF와 기존 식을 비교한다. IV장에서는 폐

쇄형 SER 근사식을 유도하고, 모의 실험을 통하여 제안하는 SER 근사식과 기존 식을 비교한다. 마지막으로 V장에서는 결론을 맺는다.

## II. 시스템 모델

본 장에서는 프리코더를 갖는 MIMO MMSE 수신기의 시스템 모델에 대해서 설명한다.  $N_t$  Tx 및  $N_r$  Rx 안테나 ( $N_r \geq N_t$ ) 를 갖는 point-to-point MIMO 시스템을 가정한다. 또한  $N_t$  송신 스트림 (stream) 은 Gray 코드화된 M-ary quadrature amplitude modulation (M-QAM) 을 이용한다고 가정한다. 그러면  $N_r \times 1$  수신신호 벡터는 다음과 같이 모델링될 수 있다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_w \mathbf{R}_t^{1/2} \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (1)$$

여기에서 채널 행렬은 Tx 상관 행렬  $\mathbf{R}_t$ 과 independent and identically distributed (i.i.d.) complex Gaussian 행렬  $\mathbf{H}_w \sim CN_{N_r, N_t}(\mathbf{0}_{N_r \times N_t}, \mathbf{I}_{N_r} \otimes \mathbf{I}_{N_t})$ 로 이루어져 있고,  $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_{N_t}]^T$ 는  $E[|s_i|^2] = E_s/N_t$ 를 갖는 송신신호 벡터이고, 잡음 벡터  $\mathbf{n} \sim CN_{N_r, 1}(\mathbf{0}_{N_r \times 1}, N_0 \mathbf{I}_{N_r})$  이고,  $\mathbf{F}$  는  $N_t \times N_t$  프리코더 행렬이고, superscript  $T$  는 transposition 을 의미하고,  $E[\cdot]$  는 평균을 의미한다. 프리코더 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다<sup>5,7</sup>.

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \Phi^{1/2} \quad (2)$$

여기에서  $N_t \times N_t$  unitary 행렬  $\mathbf{V}$ 는 선형 프리코더 (linear precoder) 이고,  $N_t \times N_t$  대각선 행렬  $\Phi = \text{diag}[p_1, \dots, p_{N_t}]$ 는 송신 스트림의 파워를 결정하고,  $p_k > 0$ 이며,  $\sum_{k=1}^{N_t} p_k = N_t$ 이다. 신호 대 잡음비 (signal-to-noise ratio, SNR) 는  $\bar{\eta} = E_s/N_0$ 로 정의된다.  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_w \mathbf{R}_t^{1/2} \mathbf{V}$ 로 정의하자. 그러면 MMSE 수신기는 다음과 같이 표현된다<sup>12</sup>.

$$\omega_k = \left( \mathbf{H}_k \hat{\Phi}_{kk} \mathbf{H}_k^H + \hat{\sigma}_k^2 \mathbf{I}_{N_r} \right) \mathbf{h}_k \quad (3)$$

여기에서 superscript  $H$  는 conjugation 및 transposition 을 의미하고,  $\hat{\Phi}_{kk} = p_k^{-1} \Phi_{kk}$  이고,

$\hat{\sigma}_k^2 = (p_k \bar{\eta})^{-1} N_t$ 이고,  $\mathbf{h}_k$ 는  $\mathbf{H}$ 의  $k$ 번째 행이고,  $\mathbf{H}_k$ 는  $k$ 번째 행을 제거한  $\mathbf{H}$ 이고,  $\hat{\Phi}_{kk}$ 는  $k$ 번째 행과  $k$ 번째 열을 제거한  $\hat{\Phi}$ 이다. (3) 을 (1)에 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$d = \omega_k^H \mathbf{y} = \omega_k^H \mathbf{h}_k \sqrt{p_k} s_k + \underbrace{\sum_{j \neq k} \omega_k^H \mathbf{h}_j \sqrt{p_j} s_j}_{=\phi_k} + \omega_k^H \mathbf{n} \quad (4)$$

여기에서  $\phi_k$ 는 간섭 및 잡음비 부분으로 정의된다. 그러면,  $k$ 번째 스트림을 위한 SINR  $\gamma_k$ 는 아래와 같이 표현될 수 있다<sup>[12]</sup>.

$$\gamma_k = \mathbf{h}_k^H \left( \mathbf{H}_k \hat{\Phi}_{kk} \mathbf{H}_k^H + \hat{\sigma}_k^2 \mathbf{I}_{N_r} \right)^{-1} \mathbf{h}_k \quad (5)$$

본 논문에서 Tx 상관 행렬은 임의로 정의될 수 있으나, 예로서 exponential correlation model<sup>[13]</sup>을 고려한다. 그러므로  $\mathbf{R}_t$ 의  $(i, j)$  원소는 아래와 같이 주어진다.

$$[\mathbf{R}_t]_{i,j} = \rho^{|i-j|}, \quad \rho \in (0,1) \quad (6)$$

### III. SINR의 분포

$\mathbf{H}$ 의 상관 행렬을  $\mathbf{B} = E[\mathbf{H}^H \mathbf{H}] = \mathbf{V}^H \mathbf{R}_t \mathbf{V}$ 와  $\mathbf{G} = E[\mathbf{H} \mathbf{H}^H] = \mathbf{I}_{N_r}$ 로 정의하자.  $\mathbf{R}_t$ 의 eigenvalue decomposition (EVD)은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H \quad (7)$$

여기에서  $\mathbf{U}$ 는  $N_t \times N_t$  unitary 행렬이고,  $\mathbf{\Lambda}$ 는  $N_t \times N_t$  대각선 행렬이다. 최대 에르고딕 용량 (maximum ergodic capacity) 기준<sup>[5,7]</sup> 및 MMSE 기준<sup>[5]</sup>에 관하여 최적의 프리코딩 행렬  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$\mathbf{F}^{\text{opt}} = \mathbf{U} \hat{\Phi}^{1/2} \quad (8)$$

(8)로부터  $\mathbf{B}^{\text{opt}} = \mathbf{U}^H \mathbf{R}_t \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$ 와  $\mathbf{G}^{\text{opt}} = \mathbf{I}_{N_r}$ 를 얻을 수 있다. Multivariate Normal 분포의 특성<sup>[14]</sup>으로부터  $\mathbf{H}_k$  및  $\mathbf{h}_k$ 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{H}_k \sim CN_{N_r, N_t-1}(\mathbf{0}_{N_r \times N_t-1}, \mathbf{I}_{N_r} \otimes \mathbf{B}_{kk}^{\text{opt}}) \quad (9)$$

$$\mathbf{h}_k | \mathbf{H}_k = \mathbf{h}_k \sim CN_{N_r, 1}(\mathbf{0}_{N_r \times 1}, b_{kk} \mathbf{I}_{N_r}) \quad (10)$$

여기에서  $\mathbf{B}_{kk}^{\text{opt}}$ 는  $k$ 번째 행과  $k$ 번째 열을 제거한  $\mathbf{B}^{\text{opt}}$ 이고,  $b_{kk}$ 는  $\mathbf{B}^{\text{opt}}$ 의  $(k, k)$  원소이다.

$\gamma_k$  안의  $\mathbf{H}_k \hat{\Phi}_{kk} \mathbf{H}_k^H$ 의 EVD는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\left( \mathbf{H}_k \hat{\Phi}_{kk}^{1/2} \right) \left( \mathbf{H}_k \hat{\Phi}_{kk}^{1/2} \right)^H = \mathbf{Q} \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{Q}^H \quad (11)$$

여기에서  $\mathbf{Q}$ 는  $N_r \times N_r$  unitary 행렬이고,  $\mathbf{\Sigma}_k$ 는  $N_r \times N_r$  대각선 행렬이며, 양의 고유값  $\lambda_{k,i}$ 를 갖는  $\mathbf{\Sigma}_k$ 는 아래와 같다.

$$\mathbf{\Sigma}_k = \text{diag}[\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k, N_r-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N_r - N_t + 1}] \quad (12)$$

[2, Eq. (10)]과 같이,  $\gamma_k$ 에  $\mathbf{Q} \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{Q}^H$ 를 교체하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \left( \mathbf{Q}^H \mathbf{h}_k \right)^H \left( \mathbf{\Sigma}_k + \hat{\sigma}_k^2 \mathbf{I}_{N_r} \right)^{-1} \left( \mathbf{Q}^H \mathbf{h}_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_r-1} \frac{|\bar{h}_i|^2}{\lambda_{k,i} + \hat{\sigma}_k^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_k^2} \sum_{j=N_t}^{N_r} |\bar{h}_j|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

여기에서  $\mathbf{Q}^H \mathbf{h}_k = [\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_{N_r}]^T$ 이다.  $\mathbf{Q}^H$ 는 unitary 행렬이기 때문에,  $\mathbf{h}_k$ 와  $\mathbf{Q}^H \mathbf{h}_k$ 는 같은 통계적인 특성을 갖는다. 그러면  $f_f(\gamma_k)$ 과  $f_s(\gamma_k)$ 를 각각  $\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k, N_t-1}$ 가 주어진 (13)의 첫 번째 및 두 번째 부분의 conditional PDF라고 하자.  $|\bar{h}_i|^2$ 은 두 Gaussian 임의 변수 (random variable, RV)의 제곱의 합이므로,  $|\bar{h}_i|^2$ 은 평균  $b_{kk}$ 와 분산  $b_{kk}^2$ 을 갖는 exponential 분포가 된다. 그러므로 첫 번째 부분  $f_f(\gamma_k)$ 는 exponential 분포의 선형조합이 된다.  $f_f(\gamma_k)$ 에 [2, Lemma 1]을 적용하면, 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$f_f(\gamma_k) = \frac{1}{b_{kk}} \sum_{i=1}^{N_t-1} \left( \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_{k,j} + c_k}{\lambda_{k,j} - \lambda_{k,i}} \right) (\lambda_{k,i} + c_k) e^{-\frac{(\lambda_{k,i} + c_k)}{b_{kk}} \gamma_k} \quad (14)$$

여기에서  $c_k = \hat{\sigma}_k^2$ 이다.  $f_s(\gamma_k)$ 는  $1/\hat{\sigma}_k^2$ 을 곱한 exponential 분포를 갖는 RV의 합이므로, 아래와

같이  $2(N_r - N_t + 1)$  degrees of freedom을 갖는 chi-square 분포로 표현될 수 있다.

$$f_s(\gamma_k) = \frac{c_k^n}{b_{kk}^n (n-1)!} \gamma_k^{n-1} e^{-\frac{c_k}{b_{kk}} \gamma_k} \quad (15)$$

여기에서  $n = N_r - N_t + 1$ 이다.  $\lambda_k = (\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,N_t-1})$ 이 주어졌을 때,  $f_f(\gamma_k)$ 와  $f_s(\gamma_k)$ 의 convolution을 통하여  $\gamma_k$ 의 conditional PDF는 아래와 같이 표현된다.

$$f_{N_t \times N_r}(\gamma_k | \lambda_k) = f_f(\gamma_k) \otimes f_s(\gamma_k) \quad (16)$$

여기에서  $\otimes$ 는 convolution을 의미한다.  $(\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2}) (\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2})^H$ 의 unordered  $\lambda_k$ 의 joint PDF는 아래와 같이 쓸 수 있다<sup>[13,15]</sup>.

$$f(\lambda_k) = \frac{1}{(N_t - 1)!} \prod_{i=1}^{N_t-1} \frac{1}{\nu_{k,i}^{N_t} (N_r - i)!} \prod_{i < j}^{N_t-1} \frac{\nu_{k,i} \nu_{k,j}}{\nu_{k,j} - \nu_{k,i}} \times |\mathbf{E}(\lambda_k)| |\mathbf{V}(\lambda_k)| \prod_{i=1}^{N_t-1} \lambda_{k,i}^{N_r - N_t + 1} \quad (17)$$

여기에서  $\nu_k = (\nu_{k,1}, \dots, \nu_{k,N_t-1})$ 는  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2} \mathbf{B}_{kk}^{\text{opt}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2}$ 의 고유값이고,  $(\nu_{k,1} > \dots > \nu_{k,N_t-1} > 0)$ 이며,  $|\mathbf{E}(\lambda_k)|$ 와  $|\mathbf{V}(\lambda_k)|$ 는 각각 아래와 같이 정의된다.

$$[\mathbf{E}(\lambda_k)]_{x,y} = e^{-\frac{\lambda_{k,y}}{\nu_{k,x}}}, \quad x, y = 1, \dots, N_t - 1 \quad (18)$$

$$[\mathbf{V}(\lambda_k)]_{x,y} = \lambda_{k,y}^{x-1}, \quad x, y = 1, \dots, N_t - 1 \quad (19)$$

(17)에서  $(\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2}) (\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2})^H$ 의 고유값의 joint PDF는  $(\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2})^H (\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2})$ 의 고유값의 joint PDF와 동일하며<sup>[13]</sup>,  $\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2} \sim CN_{N_r, N_t-1}(\mathbf{0}_{N_r \times N_t-1}, \mathbf{I}_{N_r} \otimes (\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2} \mathbf{B}_{kk}^{\text{opt}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2}))$ 이며<sup>[14]</sup>, (17)은  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2} \mathbf{B}_{kk}^{\text{opt}} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{kk}^{1/2} \neq \mathbf{I}_{N_t-1}$ 이다<sup>[15]</sup>.

(14)-(17)을 이용하면,  $\gamma_k$ 의 정확하고 일반화된 PDF는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$f_{N_t \times N_r}(\gamma_k) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f_{N_t \times N_r}(\gamma_k | \lambda_k) f(\lambda_k) d\lambda_k \quad (20)$$

여기에서  $d\lambda_k = d\lambda_{k,1} \dots d\lambda_{k,N_t-1}$ 이다. (17)은

$|\mathbf{V}(\lambda_k)| = \prod_{i < j} (\lambda_{k,j} - \lambda_{k,i})$ 의 곱을 포함하고 있기 때문에,  $N_t \times N_r$  MIMO 시스템의  $\gamma_k$ 의 일반적인 PDF는 유도하기 힘들다. 그러나 특정한  $N_t$  및  $N_r$ 을 위한  $\gamma_k$ 의 PDF는 유도할 수 있다. 적은 수의  $N_t$  및  $N_r$ 을 위한  $\gamma_k$ 의 폐쇄형 PDF는 아래와 같이 유도된다.

$$f_{2 \times 2}(\gamma_k) = \frac{c_k e^{-\frac{c_k \gamma_k}{b_{kk}}}}{b_{kk} \nu_{k,1}} (c_k + \nu_{k,1} - O_{k,1}(\gamma_k)) \quad (21)$$

$$f_{2 \times 3}(\gamma_k) = \frac{c_k^2 e^{-\frac{c_k \gamma_k}{b_{kk}}}}{2 b_{kk} \nu_{k,1}^2} (L_{k,1}(\gamma_k) - c_k - \nu_{k,1} + O_{k,1}(\gamma_k)) \quad (22)$$

$$f_{3 \times 3}(\gamma_k) = \frac{c_k e^{-\frac{c_k \gamma_k}{b_{kk}}}}{2 b_{kk} \nu_{k,1} \nu_{k,2} (\nu_{k,2} - \nu_{k,1})} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (2\nu_{k,3-i}^2 + c_k \nu_{k,3-i}) (c_k + \nu_{k,1} - O_{k,1}(\gamma_k)) \quad (23)$$

$$f_{2 \times 4}(\gamma_k) = \frac{c_k^3 e^{-\frac{c_k \gamma_k}{b_{kk}}}}{6 b_{kk} \nu_{k,1}^3} (c_k + \nu_{k,1} - L_{k,1}(\gamma_k) + \frac{(3\nu_{k,1}^3 + c_k \nu_{k,1}^2) \gamma_k^2}{b_{kk}^2} - O_{k,1}(\gamma_k)) \quad (24)$$

$$f_{3 \times 4}(\gamma_k) = \frac{c_k^2 e^{-\frac{c_k \gamma_k}{b_{kk}}}}{12 b_{kk} \nu_{k,1}^2 \nu_{k,2} (\nu_{k,2} - \nu_{k,1})} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (6\nu_{k,3-i}^3 + 2c_k \nu_{k,3-i}^2) (L_{k,i}(\gamma_k) - c_k - \nu_{k,i} + O_{k,i}(\gamma_k)) \quad (25)$$

$$f_{4 \times 4}(\gamma_k) = \frac{c_k e^{-\frac{c_k \gamma_k}{b_{kk}}}}{12 b_{kk}} \prod_{i < j}^3 \frac{1}{\nu_{k,i} \nu_{k,j} (\nu_{k,j} - \nu_{k,i})} \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} \times \Psi_{k,i} (c_k \nu_{k,i} + \nu_{k,i}^2 - \nu_{k,i} O_{k,i}(\gamma_k)) \quad (26)$$

여기에서  $L_{k,i}(\gamma_k) = (2\nu_{k,i}^2 + c_k \nu_{k,i}) \gamma_k / b_{kk}$ 이며,  $O_{k,i}(\gamma_k) = (b_{kk} c_k \nu_{k,i} \gamma_k + b_{kk}^2 \nu_{k,i} + b_{kk}^2 c_k) / (\nu_{k,i} \gamma_k + b_{kk})^2$ 이며,  $\Psi_{k,1} = \alpha_{k,2} \epsilon_{k,3} - \alpha_{k,3} \epsilon_{k,2}$ 이며,  $\Psi_{k,2} = \alpha_{k,1} \epsilon_{k,3} - \alpha_{k,3} \epsilon_{k,1}$ 이며,  $\Psi_{k,3} = \alpha_{k,1} \epsilon_{k,2} - \alpha_{k,2} \epsilon_{k,1}$ 이며,  $\alpha_{k,i} = c_k \nu_{k,i}^2 + 2\nu_{k,i}^3$ 이며,  $\epsilon_{k,i} = 2c_k \nu_{k,i}^3 + 6\nu_{k,i}^4$ 이다.

그림 1과 2는  $2 \times 4$  MIMO 시스템에서  $k=1$ 과  $k=2$  스트림의 SINR PDF를 각각 보여준다. 그림 1과 2에서  $\rho \approx 0$ ,  $\rho = 0.5$ ,  $\rho = 0.9$ ,  $\bar{\eta} = 10\text{dB}$ , 그리고  $\Phi = \mathbf{I}_{N_t}$ 를 사용하였다. 또한 Analytical 곡선은 (24)로부터 얻었다. 그림 1과 2는 Analytical 곡선이

Monte Carlo (MC) 시뮬레이션 곡선과 잘 일치함을 보여준다.  $\rho \approx 0$ 일 때의 Analytical 곡선은 상관성이 없는 레일리 채널에서 프리코더를 갖지 않는 MIMO MMSE 수신기의 곡선<sup>[2]</sup>과 잘 일치함을 보여준다. 참고로 (17)은  $\hat{\Phi}_{kk}^{1/2} \mathbf{B}_{kk}^{\text{opt}} \hat{\Phi}_{kk}^{1/2} \neq \mathbf{I}_{N_t-1}$ 이므로,  $\Phi = \mathbf{I}_{N_t}$ 일 때  $\mathbf{R}_t \neq \mathbf{I}_{N_t}$ 이다. 즉  $\Phi = \mathbf{I}_{N_t}$ 를 이용하면,  $\rho \neq 0$ 이어야 한다. 또한 그림 1과 2는 SINR의 평균과 분산이 상관에 따라 변화함을 보여준다.

#### IV. SER 성능 분석

Gaussian Q-function 근사식  $Q(x) \approx \frac{1}{12} e^{-x^2/2} + \frac{1}{6} e^{-2x^2/3}$  <sup>[2]</sup>을 이용하여, M-QAM 시스템의 심볼 오류 확률은 아래와 같이 근사화될 수 있다<sup>[2]</sup>.

$$\bar{P}_{N_t \times N_r}(\gamma_k) \approx \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \left(\frac{1}{3} e^{-\frac{3\gamma_k}{2(M-1)}} + \frac{2}{3} e^{-\frac{2\gamma_k}{M-1}}\right) \quad (27)$$

그러면, k번째 스트림의 평균 SER은 아래와 같이 거의 정확하게 근사화될 수 있다.

$$P_{N_t \times N_r}^k = \int_0^\infty \bar{P}_{N_t \times N_r}(\gamma_k) f_{N_t \times N_r}(\gamma_k) d\gamma_k \approx A_1 \left(\frac{1}{3} M_{N_t \times N_r}^k(A_2) + \frac{2}{3} M_{N_t \times N_r}^k(A_3)\right) \quad (28)$$

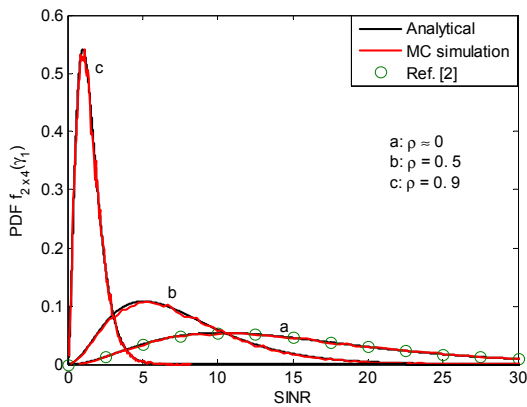


그림 1.  $\bar{\eta} = 10\text{dB}$ 일 때  $2 \times 4$  MIMO 시스템에서  $k=1$  스트림의 SINR PDF  
Fig. 1. SINR PDF of stream  $k=1$  in the  $2 \times 4$  MIMO system at  $\bar{\eta} = 10\text{dB}$

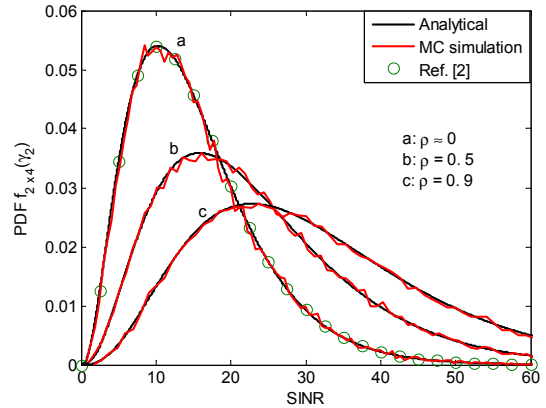


그림 2.  $\bar{\eta} = 10\text{dB}$ 일 때  $2 \times 4$  MIMO 시스템에서  $k=2$  스트림의 SINR PDF  
Fig. 2. SINR PDF of stream  $k=2$  in the  $2 \times 4$  MIMO system at  $\bar{\eta} = 10\text{dB}$

여기에서  $A_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$ 이고,  $A_2 = \frac{3}{2(M-1)}$ 이고,  $A_3 = \frac{2}{M-1}$ 이고,  $M_{N_t \times N_r}^k(\cdot)$ 은 moment generating function (MGF)으로서 아래와 같이 정의된다.

$$M_{N_t \times N_r}^k(m) = \int_0^\infty e^{-m\gamma_k} f_{N_t \times N_r}(\gamma_k) d\gamma_k \quad (29)$$

유도된 SINR PDF를 이용하면, 적은 수의  $N_t$  및  $N_r$ 을 위한 폐쇄형 MGF는 아래와 같이 유도된다.

$$M_{2 \times 2}^k(m) = \frac{c_k}{\nu_{k,1}^2} (T_{k,1}(m) - W_{k,1}(m)) \quad (30)$$

$$M_{2 \times 3}^k(m) = \frac{c_k^2}{2\nu_{k,1}^3} (W_{k,1}(m) + Z_{k,1}(m) - T_{k,1}(m)) \quad (31)$$

$$M_{3 \times 3}^k(m) = \frac{c_k}{2\nu_{k,1}^2 \nu_{k,2}^2 (\nu_{k,2} - \nu_{k,1})} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (2\nu_{k,3-i}^3 + c_k \nu_{k,3-i}^2) (T_{k,i}(m) - W_{k,i}(m)) \quad (32)$$

$$M_{2 \times 4}^k(m) = \frac{c_k^3}{6\nu_{k,1}^4} \left( \frac{6\nu_{k,1}^4 + 2c_k \nu_{k,1}^3}{(c_k + b_{kk})^3} - W_{k,1}(m) - Z_{k,1}(m) + T_{k,1}(m) \right) \quad (33)$$

$$M_{3 \times 4}^k(m) = \frac{c_k^2}{12\nu_{k,1}^3 \nu_{k,2}^3 (\nu_{k,2} - \nu_{k,1})} \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} (6\nu_{k,3-i}^4 + 2c_k \nu_{k,3-i}^3) (W_{k,i}(m) + Z_{k,i}(m) - T_{k,i}(m)) \quad (34)$$

$$M_{4 \times 4}^k(m) = \frac{c_k}{12} \prod_{i < j}^3 \frac{1}{\nu_{k,i} \nu_{k,j} (\nu_{k,j} - \nu_{k,i})} \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} \Psi_{k,i} \times (T_{k,i}(m) - W_{k,i}(m)) \quad (35)$$

여기에서  $W_{k,i}(m) = (b_{kk} \nu_{k,i} m - \nu_{k,i}^2) / (c_k + b_{kk} m)$  이고,  $Z_{k,i}(m) = (2\nu_{k,i}^3 + c_k \nu_{k,i}^2) / (c_k + b_{kk} m)^2$  이고,  $T_{k,i}(m) = b_{kk} m e^{\frac{c_k + b_{kk} m}{\nu_{k,i}}} Ei\left(\frac{c_k + b_{kk} m}{\nu_{k,i}}\right)$  이고,  $Ei(x)$ 는 exponential integral function이며,  $Ei(x)$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$Ei(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x > 0 \quad (36)$$

높은 SNR 구간 ( $\bar{\eta} \rightarrow \infty$ ) 에서 MGF (30)을 고려해보자.  $c_k = \frac{N_t}{\eta p_k}$  이므로,  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$  일 때  $c_k \rightarrow 0$ 를 얻는다. 그러면, 아래와 같이 (37) 을 얻을 수 있다.

$$C_{2 \times 2}^k(m) = \lim_{\bar{\eta} \rightarrow \infty} \frac{M_{2 \times 2}^k(m)}{c_k} = \frac{1}{\nu_{k,1}^2} \left( \frac{\nu_{k,1}^2 - b_{kk} \nu_{k,1} m}{b_{kk} m} + b_{kk} m e^{\frac{b_{kk} m}{\nu_{k,1}}} Ei\left(\frac{b_{kk} m}{\nu_{k,1}}\right) \right) \quad (37)$$

(31)-(35)를 고려하고 유사한 절차를 활용하면,  $C_{N_t \times N_r}^k(m)$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$C_{N_t \times N_r}^k(m) = \lim_{\bar{\eta} \rightarrow \infty} \frac{M_{N_t \times N_r}^k(m)}{c_k^{N_t - N_r + 1}} \quad (38)$$

그러므로 높은 SNR에서  $N_t, N_r \leq 4$ 를 위한 MGF는 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$M_{N_t \times N_r}^{k, \infty}(m) = c_k^{N_t - N_r + 1} C_{N_t \times N_r}^k(m) \quad (39)$$

(28)에  $M_{N_t \times N_r}^{k, \infty}(m)$ 로 교체하면,  $N_t, N_r \leq 4$ 를 위한 높은 SNR의 SER는 아래와 같이 표현된다.

$$P_{N_t \times N_r}^{k, \infty} = \frac{A_1}{3} \left( \frac{N_t}{p_k} \right)^{N_t - N_r + 1} \left( C_{N_t \times N_r}^k(A_2) \right)$$

$$+ 2 C_{N_t \times N_r}^k(A_3) \eta^{-(N_t - N_r + 1)} \quad (40)$$

$N_t, N_r \leq 4$ 에서, 프리코더를 갖는 MIMO MMSE 수신기는 송신 상관된 레일리 채널에서  $n = N_r - N_t + 1$ 의 diversity order를 갖게 된다. 또한 (14)-(20), (28), (38)로 부터, (40)은 임의의 큰  $N_t$  및  $N_r$ 로 확장될 수 있다.

그림 3과 4는 각각 Set 1 ( $\rho = 0.3, \Phi = \text{diag}[1, 1]$ )과 Set 2 ( $\rho = 0.99, \Phi = \text{diag}[1.9, 0.1]$ )를 이용했을 때  $2 \times 4$  MIMO 시스템의 SER 결과를 보여준다. 이 그림에서 각각 16-QAM을 이용하였다. 근사값 곡선 (Approx.) 은 (33)을 (28)에 적용하여 얻었다.

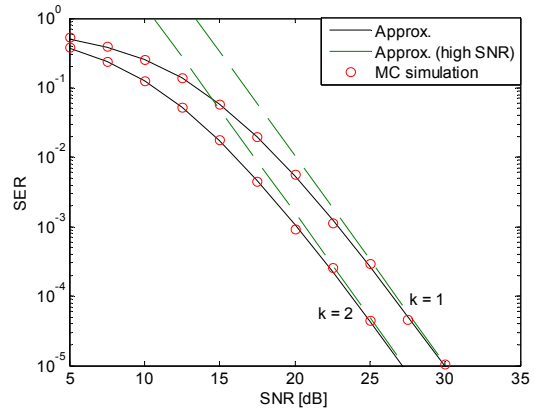


그림 3. SET 1에서 16-QAM을 이용한  $2 \times 4$  MIMO 시스템의  $k$ 번째 스트림의 SER  
Fig. 3. SER of each stream  $k$  in the  $2 \times 4$  MIMO system with 16-QAM at Set 1

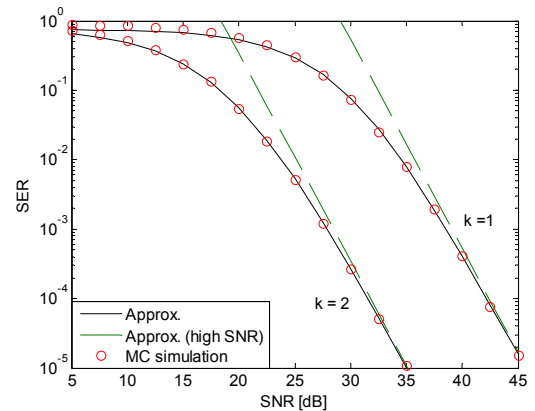


그림 4. SET 2에서 16-QAM을 이용한  $2 \times 4$  MIMO 시스템의  $k$ 번째 스트림의 SER  
Fig. 4. SER of each stream  $k$  in the  $2 \times 4$  MIMO system with 16-QAM at Set 2

높은 SNR 근사값 곡선 (Approx. (high SNR))

은 (33)을 (38)에 적용한 결과를 (40)에 적용하여 얻었다. 그림 4는 낮은 SNR에서  $k=1$ 일 때의 제안하는 Approx. 곡선이 MC 시뮬레이션 보다 약간 아래에 있는 것을 보여준다. 그러나 그림 3과 4로부터 모든 Approx. 곡선이 MC 시뮬레이션과 일반적으로 잘 일치함을 알 수 있다. 또한 Approx. 곡선은 높은 SNR에서 Approx. (high SNR) 곡선과 잘 일치함을 보여준다.

### V. 결 론

본 논문에서는 송신 상관된 레일리 채널에서 프리코더를 갖는 MIMO MMSE 수신기의 성능을 분석하였다. 먼저, SINR PDF를 유도하기 위한 정확하고 일반화된 식을 제안하였다. 그리고 적은 수의  $N_t$  및  $N_r$ 에 대하여 정확한 폐쇄형 SINR PDF 식을 유도하였다. 또한 유도한 SINR PDF 식 및 Gaussian Q-function 근사식을 이용하여 폐쇄형 SER 근사식을 유도하였다. 제안하는 SER 분석결과는 오류 확률을 정확하게 예측하거나, 시스템 디자인을 위한 유용한 툴로서 사용될 수 있을 것으로 예상된다.

### References

[1] D. Kim, H.-M. Kim, "Adaptive MIMO transmission method based on the optimal combination of antenna diversity with spatial multiplexing," *J. KICS*, vol. 32, no. 5, pp. 394-401, May 2007.

[2] N. Kim, Y. Lee, and H. Park, "Performance analysis of MIMO system with linear MMSE receiver," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 11, pp. 4474-4478, Nov. 2008.

[3] H. Sampath, P. Stoica, and A. Paulraj, "Generalized linear precoder and decoder design for MIMO channels using the weighted MMSE criterion," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 12, pp. 2198-2206, Dec. 2001.

[4] A. Scaglione, P. Stoica, S. Barbarossa, G. B. Giannakis, and H. Sampath, "Optimal design for space-time linear precoders and decoders," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 5, pp. 1051-1064, May 2002.

[5] H. R. Bahrami and T. Le-Ngoc, "Precoder design based on correlation matrices for MIMO systems," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 5, no. 12, pp. 3579-3587, Dec. 2006.

[6] L. Hong and A. G. Armada, "Bit error rate performance of MIMO MMSE receivers in correlated Rayleigh flat-fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 60, no. 1, pp. 313-317, Jan. 2011.

[7] A. M. Tulino, A. Lozano, and S. Verdú, "Capacity-achieving input covariance for single-user multi-antenna channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 5, no. 3, pp. 662-671, Mar. 2006.

[8] M. Kiessling and J. Speidel, "Analytical performance of MIMO MMSE receivers in correlated Rayleigh fading environments," in *Proc. IEEE VTC 2003*, pp. 1738-1742, Orlando, U.S.A., Oct. 2003.

[9] P. Li, D. Paul, R. Narasimhan, and J. Cioffi, "On the distribution of SINR for the MMSE MIMO receiver and performance analysis," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 1, pp. 271-286, Jan. 2006.

[10] M. O. Hasna and M.-S. Alouini, "Optimal power allocation for relayed transmissions over Rayleigh-fading channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 3, no. 6, pp. 1999-2004, Nov. 2004.

[11] E. G. Larson and Y. Cao, "Collaborative transmit diversity with adaptive radio resource and power allocation," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, no. 6, pp. 511-513, June 2005.

[12] Y.-C. Liang, G. Pan, and Z. D. Bai, "Asymptotic performance of MMSE receivers for large systems using random matrix theory," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 11, pp. 4173-4190, Nov. 2007.

[13] M. Chiani, M. Z. Win, and A. Zanella, "On the capacity of spatially correlated MIMO Rayleigh-fading channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 2363-2371, Oct. 2003.

[14] A. K. Gupta and D. K. Nagar, *Matrix Variate*

*Distributions*, Chapman and Hall/CRC, 2000.

- [15] L. G. Ordóñez, D. P. Palomar, and J. R. Fonollosa, "Ordered eigenvalues of a general class of Hermitian random matrices with application to the performance analysis of MIMO systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 2, pp. 672-689, Feb. 2009.

김 원 섭 (Wonsop Kim)



2004년 2월 전북대학교 전기  
및전자공학과 졸업  
2006년 2월 한국과학기술원  
전기및전자공학과 석사  
2006년 2월~2008년 12월 한  
국전자통신연구원 연구원  
2013년 2월 한국과학기술원

전기및전자공학과 박사

2012년 10월~현재 국방과학연구소 연구원

<관심분야> 제어 공학, 전자공학, 통신공학