

일반화된 TQAM의 비트 오류 확률

조 경 국*

Bit Error Rate of Generalized Triangular QAM

Kyongkuk Cho*

요 약

직교 진폭 변조 (QAM)은 현재 유무선 통신 시스템에서 널리 사용되고 있다. 본 논문에서는 정방형 QAM, TQAM, θ -QAM을 포함하는 일반화된 TQAM을 제안한다. 따라서, 다른 QAM 계열에 비교해서 임의의 일반 삼각형 격자 구조를 갖는 이 일반화된 TQAM은 신호점 배치에서 다양한 구조를 제공한다. 변조 지수 M 의 일반화된 TQAM에 대한 BER을 정확한 closed-form 수식으로 유도하며 이 수식을 이용하여 최적의 신호점 배치 방안을 제시한다. 마지막으로, 이 유도한 수식 결과에 대해 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 비교 검증한다.

Key Words : Modulation, Probability, Bit Error Rate, Signal Constellation, Gray Coding

ABSTRACT

Quadrature Amplitude Modulation (QAM) is widely used in contemporary wired and wireless communications systems. In this paper, I propose a generalized triangular quadrature amplitude modulation (gTQAM) that includes the square quadrature amplitude modulation (SQAM), TQAM, and θ -QAM as special cases. Therefore, the proposed gTQAM forming a lattice of arbitrary triangles provides a versatile structure in signal constellations compared to other QAM schemes. For M -ary gTQAM, I derive an exact closed-form expression for the bit error rate (BER), and present the optimal signal constellations for given SNR values from the derived BER expression. Finally, I validate the derived BER results through computer simulations.

I. 서 론

지금까지 유무선 통신 환경에 효율적인 전송 기법이 연구 발전되고 있다. 일반적으로 고속 데이터 전송용 변조 기법으로는 직교 진폭 변조 (QAM)가 널리 사용되고 있다. 예를 들어, 3GPP, LTE/LTE-A, WiMAX, DVB-T2, DVB-S2 등의 통신 시스템에서 QAM을 다양하게 선택하고 있다¹⁻³⁾.

이 QAM은 인접한 신호점 사이의 배치 방식에 따라 정방형 QAM, TQAM, θ -QAM, CQAM 등으로 나누어 진다⁴⁾. 그리고 인접한 신호점 사이의 유클리

드 거리에 따라 uniform QAM과 non-uniform QAM 계열로 나눌 수 있다. 최초로 실용화된 QAM은 바이너리 데이터 전송에 효과적이며 상대적으로 낮은 송수신 복잡도를 갖는 uniform QAM이었다. 그런데, 음성, 정지 및 동영상 등의 멀티미디어 데이터 전송의 경우에는 다소 복잡한 non-uniform 신호점 배치를 갖는 계층적 (hierarchical) QAM이 보다 효율적이라고 알려져 있고 최근에는 다양하게 적용되고 있다⁵⁾. 이 non-uniform QAM은 uniform QAM에 비해 전송 데이터 성분의 중요도에 따라 서로 다른 BER 성능을 갖도록 해서 전체적으로는 향상된 이득을 얻는다.

* First Author and Corresponding Author : Agency for Defense Development (ADD), kyongkuk@add.re.kr, 정희원
논문번호 : KICS2014-04-131, Received April 14, 2014; Revised May 12, 2014; Accepted May 12, 2014

Kyongkuk Cho et al.^[6]은 [4]에서 논의된 정방형 θ -QAM에 대한 SER 수식 오류를 지적하고 정방형 θ -QAM에 대한 SER 결과를 closed-form 형태로 제시하고 있다. 또한, Jaeyoon Lee et al.^[7]는 정방형 및 크로스(cross) θ -QAM에 대한 정확한 SER과 BER 성능을 유도 분석하고 있다. 이 θ -QAM은 파라미터 θ 의 값에 따라 정방형 QAM이나 TQAM의 신호점 배치와 일치하게 되어 이전의 두 종류의 QAM 기법을 동시에 포함한다. 하지만, θ -QAM에서 파라미터 θ 는 단지 서로 인접한 세 신호점 사이의 각도를 의미하는데 I축과 Q축을 동시에 신호점으로 사용하는 2차원 변조 방식인 QAM 계열 전체를 표현하는 데에는 한계가 있을 수 있다.

본 연구에서는 구현이 다소 복잡한 non-uniform QAM을 제외하고 uniform QAM에 속하며 널리 알려진 정방형 QAM, TQAM, θ -QAM 등의 QAM 계열의 전송 기법을 하나로 대표하는 기법으로 통합하고 이를 통해서 uniform QAM 계열에 대한 최적의 BER 성능 결과를 얻고자 한다. 이에 따라, 본 연구에서 제시하는 일반화된 TQAM 기법은 앞서 논의한 다양한 QAM 기법들을 하나로 통합하는 모델로 제공될 수 있다. 따라서, 이 일반화된 TQAM은 두 개의 파라미터를 존재하게 되며 인접한 세 신호점 배치는 임의의 삼각형 구조를 갖는다. 그리고, 변조 지수 M 의 일반화된 TQAM에 대한 BER을 정확한 closed-form 수식으로 유도한다. 마지막으로, 이 유도된 BER 수식은 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 비교 검증하며 타당한지를 확인한다.

II. 본 론

본 연구에서 새롭게 제시하는 일반화된 TQAM에서 신호점 배치의 방안을 알려주는 두 개의 파라미터는 각각 θ, r 로 정의한다. 이에 따라, 이 일반화된 TQAM의 신호점 배치도는 그림 1과 같다. 여기에서, θ 는 인접한 세 신호점 사이의 각도를 나타내며 r 은 세 신호점으로 이루어진 임의의 삼각형에서 가로 거리 $2d$ - 세로 높이 h 와의 상대적인 비율을 의미한다. 그리고, 각각의 심볼 $S_{m,n}$ 에 대한 비트 할당 방식은 일반적으로 많이 사용되고 있는 그레이 비트 코딩이라고 가정한다.

그림 1에서 I축 및 Q축 방향으로 신호점 배치 및 그레이 비트 코딩을 확장한다면 16-ary 일반화된 TQAM에서 변조 지수 M 에 대한 M -ary 일반화된 TQAM으로 일반화할 수 있다. 따라서, M -ary 일반화

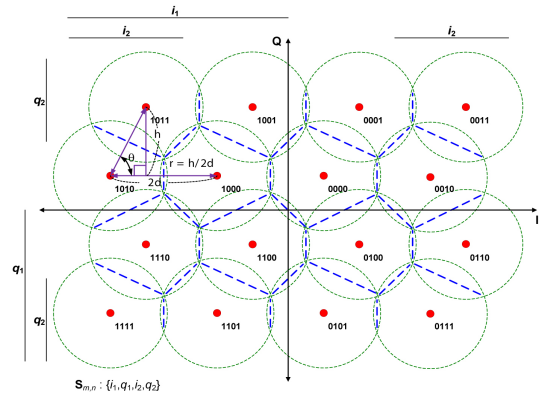


그림 1. 16-ary 일반화된 TQAM의 신호점 성상도
Fig. 1. Signal Constellations of 16-ary generalized TQAM

된 TQAM 신호 파형은

$$s(t) = A_I \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_c t) - A_Q \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (1)$$

로 나타낼 수 있다. 여기에서, A_I 와 A_Q 는 직교 반송파 신호의 진폭 크기이다. 또한, T_s 는 심볼 주기이며 f_c 는 반송파 주파수이다. 그리고, A_I 와 A_Q 의 진폭 크기는 심볼 $S_{m,n}$ 의 좌표 (x_m, y_n) 값에 의해 정의되며 좌표 (x_m, y_n) 값을 나타낸다면 다음과 같이 각각

$$x_m = [2(n-1)+1 - \sqrt{M}]d + [2\text{mod}(m,2)-1]d \cot(\theta) \quad (2)$$

와

$$y_n = [2(m-1)+1 - \sqrt{M}]h/2 \quad (3)$$

이다. 여기에서, $m = 1, 2, \dots, \sqrt{M}$ 이며 $n = 1, 2, \dots, \sqrt{M}$ 이다. 또한, $\text{mod}(\cdot)$ 는 modulo 함수이며 $\cot(\cdot)$ 는 cotangent 함수를 나타낸다.

그리고, 모든 심볼은 동일한 확률로 송신된다면, (2)와 (3)을 이용하여 얻어진 평균 심볼 에너지는 아래와 같다.

$$E_s = [(M-1)(r^2+1) + 3r^2 \cot^2(\theta)] d^2 / 3 \quad (4)$$

그리고, 일반화된 TQAM은 일반적인 잡음 환경이라고 가정한다면, 이 수신 신호는

$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (5)$$

로 정의된다. 여기에서, $n(t)$ 는 부가성 백색 가우스 잡음이라고 가정하며 평균 0이고 양측 전력 스펙트럼 밀도 $N_0/2$ 로 갖는다. 따라서, 이 전송 환경에서 수신 신호의 SNR(신호 대 잡음비) γ_s 는 E_s/N_0 로 정의된다.

한편, QAM 계열의 BER은 I축 및 Q축의 신호점 배치 특성과 전송 심볼에 대한 그레이 비트 코딩의 비트 할당 규칙을 이용해서 얻는다⁸⁾. 따라서, 그림 1에 제시된 16-ary 일반화된 TQAM의 비트 오류에 대한 판정 영역의 분석이 일반화된 TQAM의 BER 유도에 있어 우선적으로 필요로 한다.

그림 1의 16-ary 일반화된 TQAM에 대한 i_1, i_2 비트의 판정 영역의 경계선은 수직 방향으로 지그재그 형태로 띠고 있으며 다음 그림과 같다. 그리고, 파라미터 θ 가 $\pi/2$ 인 경우에 i_1, i_2 비트의 판정 영역은 수직 방향으로 일직선 형태로 변경된다.

그림 1의 16-ary 일반화된 TQAM에 대한 q_1, q_2 비트의 판정 영역의 경계선은 수평 방향으로 지그재그 형태를 띠고 있으며 다음 그림과 같다. 그리고, 파라미터 θ 가 $\pi/2$ 인 경우에 q_1, q_2 비트의 판정 영역은 수평 방향의 일직선으로 변경된다.

M-ary 일반화된 TQAM의 신호점 배치는 특수한 경우를 제외하고 I축과 Q축에 대해 서로 대칭성이 없어서 BER 유도함에 있어 각각 I축 및 Q축에 대한 오류 분석을 개별적으로 수행해야 한다. I축과 Q축의 판정 영역이 차이가 나는 이유는 그림 2와 그림 3에서

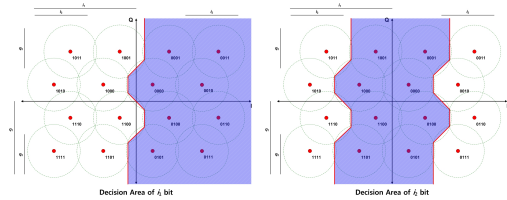


그림 2. i_k , ($k = 1, 2$)의 판정 영역
Fig. 2. Decision areas of i_k , ($k = 1, 2$)

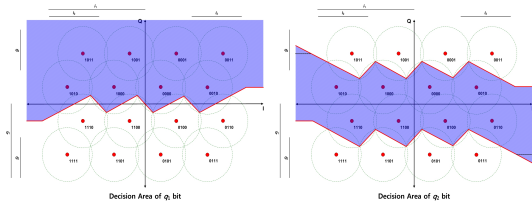


그림 3. q_k , ($k = 1, 2$)의 판정 영역
Fig. 3. Decision areas of q_k , ($k = 1, 2$)

보는 바와 같이 I축 방향으로 인접한 심볼에 대한 Q축의 크기는 같지만 Q축 방향으로 인접한 심볼에 대한 I축의 크기는 서로 같지 않기 때문이다.

I축에 할당된 심볼의 BER 유도를 위한 i ($i = 0, 1, \dots, \sqrt{M}-1$) 번째 간격을 갖는 신호점에 대한 비트 오류의 판정 영역은 그림 4와 같다. 그리고, 다음 그림에서 보는 바와 같이 전체 판정 영역은 각각 이분면 영역(R0), 닫힌 사각형 영역(R1), 그리고 개방된 사각형 영역(R2)으로 나뉜다.

그리고, M-ary 일반화된 TQAM의 I축 성분 비트가 i 번째 판정 경계에 대한 비트 오류에 대한 조건부 확률 P_{L_i} 는 다음과 같이 얻을 수 있다. 그리고,

$$P_{L_i} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{z=0}^{\sqrt{M}/2-1} \{P(E_i|H_{1z}) + P(E_i|H_{2z})\} \quad (6)$$

이 된다. 여기에서 $P(E_i|H_{1z})$ 와 $P(E_i|H_{2z})$ 는 각각 H_{1z} 와 H_{2z} 심볼의 조건부 오류 확률이며 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} P(E_i|H_{1z}) = & \frac{\sqrt{M}}{2} Q\left(\left(2i+1 - \frac{2r}{\tan(\theta)}\right) \sqrt{k\gamma_s}\right) \\ & + \left(1 - \frac{\sqrt{M}}{2}\right) Q\left((2i+1) \sqrt{k\gamma_s}\right) \\ & - \sum_{j=0}^{\sqrt{M}/2-1} P(\angle_{i,j} A_2 A A_1 | H_{1z}) \\ & + \sum_{j=0}^{\sqrt{M}/2-1} P(\angle_{i,j} B_2 B B_1 | H_{1z}) \\ & - \sum_{j=0}^{\sqrt{M}/2-2} P(\angle_{i,j} C_2 C C_1 | H_{1z}) \\ & + \sum_{j=0}^{\sqrt{M}/2-2} P(\angle_{i,j} D_2 D D_1 | H_{1z}) \end{aligned} \quad (7)$$

와

$$\begin{aligned} P(E_i|H_{2z}) = & \frac{\sqrt{M}}{2} Q\left((2i+1) \sqrt{k\gamma_s}\right) \\ & + \left(1 - \frac{\sqrt{M}}{2}\right) Q\left(\left(2i+1 + \frac{2r}{\tan(\theta)}\right) \sqrt{k\gamma_s}\right) \\ & - \sum_{j=0}^{\sqrt{M}/2-1} P(\angle_{i,j} A_2 A A_1 | H_{2z}) \\ & + \sum_{j=0}^{\sqrt{M}/2-1} P(\angle_{i,j} B_2 B B_1 | H_{2z}) \\ & - \sum_{j=0}^{\sqrt{M}/2-2} P(\angle_{i,j} C_2 C C_1 | H_{2z}) \\ & + \sum_{j=0}^{\sqrt{M}/2-2} P(\angle_{i,j} D_2 D D_1 | H_{2z}) \end{aligned} \quad (8)$$

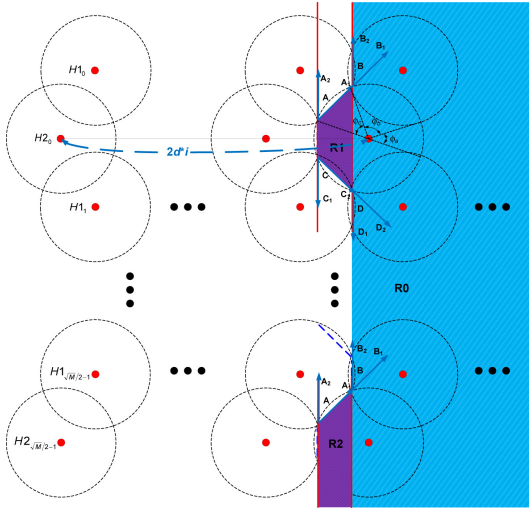


그림 4. I축의 판정 영역
Fig. 4. Decision areas for I axis

이 된다. 여기에서, γ_s 는 심볼 신호대 잡음비이고 상수 k 는 $6 / [(M-1)(r^2+1)+3r^2\cot^2(\theta)]$ 를 나타낸다. 그리고, $\angle_{i,j} X_2 XX_1$ ($j = 0, 1, \dots, \sqrt{M}/2-1$)는 그림 4의 Q축 최상위에서 j 에 위치하며 XX_2 와 XX_1 로 이루어진 중심각을 갖는 개방된 영역을 나타낸다. 임의의 $P(\angle X_2 XX_1 | z)$ 는 좌표 축의 회전 변환을 이용하여 2-D joint Gaussian Q-함수로 표현하면

$$P(\angle X_2 XX_1 | z) = P(Y_1 \geq 0, Y_2 \leq 0) = Q\left(-\frac{E[Y_1]}{\sqrt{N_0}/2}, \frac{E[Y_2]}{\sqrt{N_0}/2}, -\rho(\theta_1, \theta_2)\right) \quad (9)$$

이 된다⁹⁾. 여기에서, $Q(x, y, z)$ 는 2-D joint Gaussian Q-함수이다. 그리고, $E[\cdot]$ 는 ensemble average 함수이고 $\rho(\theta_1, \theta_2)$ 는 correlation coefficient 값이다¹⁰⁾.

Q축에 할당된 심볼의 BER 유도를 위한 j ($j = 0, 1, \dots, \sqrt{M}-1$) 번째 간격을 갖는 신호점에 대한 비트 오류의 판정 영역은 그림 5와 같다. 그리고, 다음 그림에서 보는 바와 같이 전체 판정 영역은 각각 이분면 영역(R0), 개방된 삼각형 영역(R1), 그리고 개방된 삼각형 영역(R2)으로 나눈다.

그리고, M -ary 일반화된 TQAM의 Q축 성분 비트가 j 번째 판정 경계에 대한 비트 오류에 대한 조건부 확률은 다음과 같이 얻을 수 있다.

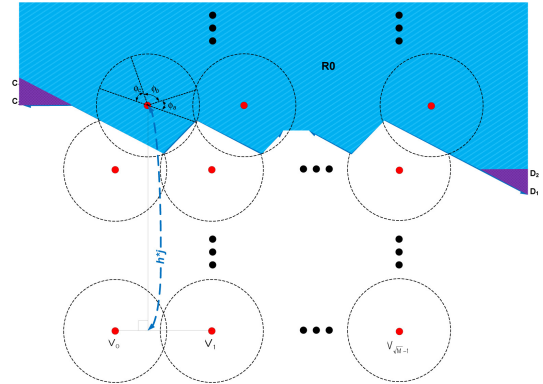


그림 5. Q축의 판정 영역
Fig. 5. Decision areas for Q axis

$$P_{Q-j} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{z=0}^{\sqrt{M}-1} P(E_j | V_z) \quad (10)$$

여기에서 $P(E_j | V_z)$ 는 V_z 심볼의 조건부 오류 확률이며 다음과 같이 표현될 수 있다. 그리고,

$$P(E_j | V_z) = \sum_{i=0}^{\sqrt{M}-2} P(\angle_{i,j} A_2 AA_1 | V_z) - \sum_{i=0}^{\sqrt{M}-2} P(\angle_{i,j} B_2 BB_1 | V_z) + aP(\angle_j C_2 CC_1 | V_z) - bP(\angle_j D_2 DD_1 | V_z) + Q\left(\left(2z \cos(\theta) + 2rj \sin(\theta) + \frac{r}{\sin(\theta)}\right) \sqrt{k\gamma_s}\right) \left(-2r \operatorname{mod}(j, 2) \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}\right) \quad (11)$$

이 된다. 여기에서, 상수 a 와 b 는 판정 영역의 위치에 따라 값이 0이나 1이 되며 $Q(\cdot)$ 는 1-D Gaussian Q-함수를 나타낸다¹⁰⁾. 그림 3의 q_2 비트 판정 영역에서 보는 바와 같이 특이하게 Q축 그레이 비트 코드 LSB 비트 및 최상위와 최하위 판정 영역에서만 그림 5의 $\angle_j C_2 CC_1$ 부분 (판정 영역 R1)은 사라지고 $\angle_j D_2 DD_1$ 부분 (판정 영역 R2)이 존재한다. 따라서, (10)의 P_{Q-j} 에서는 $\angle_j C_2 CC_1$ 와 $\angle_j D_2 DD_1$ 부분을 우선 존재한다고 가정하여 중간 BER 수식에 포함하고 이 특이한 부분들을 최종 BER 수식에서 제거한다.

(7), (8), (11)에서 (9)을 이용하고 결과를 정리하면 다음의 표와 같다.

표 1. (7)의 수식
Table 1. Equation of (7)

(7)의 $P(\angle_{i,j}A_2AA_1 H_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)\right)$	
$x =$	$4r(z-j)\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - 2i\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}$
$y =$	$2i+1 - \frac{2r}{\tan(\theta)}$
(7)의 $P(\angle_{i,j}B_2BB_1 H_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)\right)$	
$x =$	$4r(z-j)\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - 2i\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}$
$y =$	$2i+1$
(7)의 $P(\angle_{i,j}C_2CC_1 H_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)\right)$	
$x =$	$-4r(z-1-j)\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - 2i\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}$
$y =$	$2i+1 - \frac{2r}{\tan(\theta)}$
(7)의 $P(\angle_{i,j}D_2DD_1 H_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)\right)$	
$x =$	$-4r(z-1-j)\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - 2i\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}$
$y =$	$2i+1$

표 2. (8)의 수식
Table 2. Equation of (8)

(8)의 $P(\angle_{i,j}A_2AA_1 H_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)\right)$	
$x =$	$4r(z-j)\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - 2(i+1)\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) + \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}$
$y =$	$2i+1$

(8)의 $P(\angle_{i,j}B_2BB_1 H_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)\right)$	
$x =$	$4r(z-j)\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - 2(i+1)\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) + \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}$
$y =$	$2i+1 + \frac{2r}{\tan(\theta)}$
(8)의 $P(\angle_{i,j}C_2CC_1 H_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)\right)$	
$x =$	$-4r(z-j)\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - 2(i+1)\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) + \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}$
$y =$	$2i+1$
(8)의 $P(\angle_{i,j}D_2DD_1 H_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)\right)$	
$x =$	$-4r(z-j)\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) - 2(i+1)\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) + \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}$
$y =$	$2i+1 + \frac{2r}{\tan(\theta)}$

표 3. (11)의 수식
Table 3. Equation of (11)

(11)의 $P(\angle_{i,j}A_2AA_1 V_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, \sin\left(\frac{\phi_a}{2}\right)\right)$	
$x =$	$2(z-1-i)\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) + 2rj\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) + \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)} + 2r\text{mod}(j,2)\frac{\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}{\tan(\theta)}$
$y =$	$-2(z-i)\cos(\theta) + 2rj\sin(\theta) + \frac{r}{\sin(\theta)} - 2r\text{mod}(j,2)\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$
(11)의 $P(\angle_{i,j}B_2BB_1 V_z)=$	
$Q\left(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, \sin\left(\frac{\phi_a}{2}\right)\right)$	

$x = \frac{2(z-1-i)\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right) + 2rj\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right) + \frac{r}{\cos\left(\frac{\phi_b}{2}\right)} + 2r\text{mod}(j,2) \frac{\sin\left(\frac{\phi_b}{2}\right)}{\tan(\theta)}$ $y = \frac{-2(z-1-i)\cos(\theta) + 2rj\sin(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{r}{\sin(\theta)} - 2r\text{mod}(j,2) \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$
<p>(11)의 $P(\angle_{i,j}C_2CC_1 V_z) = Q(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin(\theta))$</p>
$x = \frac{2z\cos(\theta) - 2rj\sin(\theta)}{\sin(\theta)} + 2r\text{mod}(j,2) \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$ $y = 2r(j+1)$
<p>(11)의 $P(\angle_{i,j}D_2DD_1 V_z) = Q(x\sqrt{k\gamma_s}, y\sqrt{k\gamma_s}, -\sin(\theta))$</p>
$x = \frac{-2(z+1-\sqrt{M})\cos(\theta) + 2rj\sin(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{r}{\sin(\theta)} - 2r\text{mod}(j,2) \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$ $y = -2rj$

M-ary 일반화된 TQAM에 대한 BER 결과식은 (6)과 (10)을 이용하여 얻은 I축과 Q축의 판정 영역에 따른 오류 결과식을 모든 비트에 대해 평균을 취함으로 얻을 수 있다. 그리고, 수식의 선형성을 이용하여 다시 재정리하면 다음과 같다.

$$P = \frac{1}{\sqrt{M}\log_2\sqrt{M}} \left\{ \sum_{m=0}^{\sqrt{M}-2} k_m (P_{L_m} + P_{Q_m}) + P_{Q_a} \right\} \quad (12)$$

여기에서,

$$k_m = \sum_{n=1}^{\lceil \log_2(\sqrt{M}-m) \rceil} (-1)^{\lfloor \frac{m}{2^n} \rfloor} \left(\frac{\sqrt{M}}{2^n} - \left\lfloor \frac{m}{2^n} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right)$$

이고, P_{L_m} 와 P_{Q_m} 은 각각 (6)과 (10)이 되며 P_{Q_a} 는 (11)의 Q축의 판정 영역의 계산에 있어 오차 부분을 보상하는 부분으로 다음과 같이

$$P_{Q_a} = -\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{\sqrt{M}-2} (-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{z=0}^{\sqrt{M}-1} P(\angle_m C_2 CC_1 | V_z) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{z=0}^{\sqrt{M}-1} P(\angle_0 D_2 DD_1 | V_z) \quad (13)$$

이 된다.

정방형 QAM의 BER은 일반화된 TQAM에서 파라미터 ($\theta = \pi/2, r = 1$)로 지정함으로 얻을 수 있다. 따라서, (12)에 ($\theta = \pi/2, r = 1$)으로 설정하면, P_{L_m} 와 P_{Q_m} 는 동일한 수식의 형태가 되며 P_{Q_a} 결과식은 항상 0이 된다. 그리고, 수식의 선형성을 이용하고 다시 재정리하면 기준에 알려진 정방형 QAM의 BER과 같아진다^[8,13-16].

$$P = \frac{2}{\sqrt{M}\log_2\sqrt{M}} \cdot \sum_{k=1}^{\log_2\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} (-1)^{\lfloor \frac{i2^{k-1}}{\sqrt{M}} \rfloor} \cdot \left(2^{k-1} - \left\lfloor \frac{i2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) Q\left((2i+1)\sqrt{\frac{3\gamma_s}{M-1}} \right) \quad (14)$$

일반화된 TQAM의 특수한 예로서 파라미터 ($\theta = \pi/3, r = \sqrt{3}/2$), $M = 16, 64, 256$ 에서 수행한 컴퓨터 시뮬레이션과 유도 수식 (12) 결과와의 성능 비교는 다음과 같다. 또한, 결과 비교 목적으로 기준 정방형 QAM (= 일반화된 TQAM($\theta = \pi/2, r = 1$))에 대한 성능 결과도 나와 있다. 본 연구에서 유도한 수식은 실제로 수행한 컴퓨터 시뮬레이션 결과와 동일함을 볼 수 있다. 지금까지 SER 기준으로는 모든 SNR 범위에서 일반화된 TQAM ($\theta = \pi/3, r = \sqrt{3}/2$)이 정방형 QAM보다 더 좋은 성능을 갖는다고 알려져 있다^[6]. 그런데, 본 연구에서 제시하는 바와 같이 BER 기준에서는 SNR 값에 따라 일반화된 TQAM ($\theta = \pi/3, r = \sqrt{3}/2$)과 정방형 QAM 사이의 성능 우위가 달라짐을 볼 수 있다. 일반화된 TQAM ($\theta = \pi/3, r = \sqrt{3}/2$)은 변조 지수 $M = 16$ 에서 약 16.5 dB 이상, $M = 64$ 에서 약 22.5 dB 이상, $M = 256$ 에서 약 28.5 dB 이상에서 정방형 QAM보다 나은 성능을 보인다. 예를 들어, 약 $2 \cdot 10^{-2}$ BER 초과에서는 파라미터 ($\theta = \pi/2, r = 1$)로 설정하고 약 $2 \cdot 10^{-2}$ BER 이하에서는 파라미터 ($\theta = \pi/3, r = \sqrt{3}/2$)로 설정해서 일반화된 gTQAM을 운용한다면 기존 하나의 변조 기법만을 운용하는 것보다 개선된 전송 이득을 얻게 된다. 따라서, 전송 기법에서 고정된 신호점 배치를 갖는 정방형 QAM보다는 수신된 SNR에 따라 신호점 배치를 변경 가능한 일반화된 TQAM을 이용함으로써 개선된 BER 성능을 얻을 수 있다. 향후에 이 일

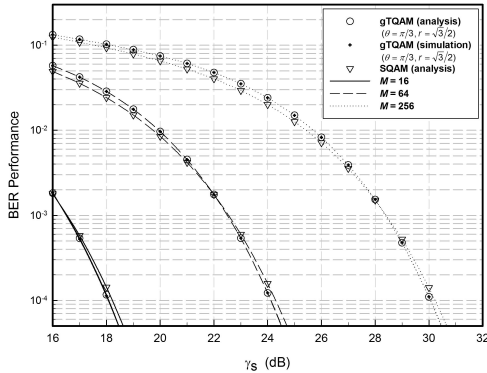


그림 6. M-ary 일반화된 TQAM의 BER 성능
Fig. 6. BER Performance of M-ary generalized TQAM

일반화된 TQAM에 보다 적합한 소스 및 채널 코딩 등의 연구가 필요로 한다.

그림 7은 수신 SNR에 따라서 최적의 BER 성능을 갖는 일반화된 TQAM의 파라미터 (θ, r)를 도시한 것이다. 변조 지수 M 에 관계없이 최적의 BER 결과를 갖는 파라미터 (θ, r)는 비교적 낮은 SNR에서는 $(\pi/2, 1)$ 이며 SNR이 커짐에 따라 $(\pi/3, \sqrt{3}/2)$ 로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 상대적으로 낮은 SNR에서는 최적 파라미터를 갖는 일반화된 TQAM은 정방형 QAM 형태에 수렴하고 높은 SNR에서는 이 일반화된 TQAM이 (정삼각형) TQAM으로 수렴됨을 볼 수 있다.

SNR 값에 따른 일반화된 TQAM의 최적 파라미터의 변화 추세 원인은 그레이 비트 코드와 같은 비트 패턴에 기인한다. 정방형 QAM에서는 주어진 심볼 기준에서 인접한 심볼의 수가 대부분 4개가 되지만 일반화된 TQAM은 특정한 파라미터 ($\theta = \pi/2, r = 1$)

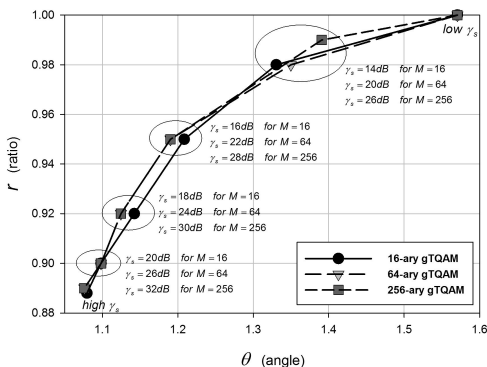


그림 7. M-ary 일반화된 TQAM의 최적 파라미터 (θ, r)
Fig. 7. Optimal Parameters (θ, r) for M-ary generalized TQAM

의 경우를 제외하고는 인접한 심볼의 수가 대부분 6개나 된다. 그런데, 이 6개의 인접 심볼 가운데에 4개는 단지 한 비트 차이만을 갖지만 나머지 2개는 적어도 두 비트 이상의 차이가 있다. 그래서, 상대적으로 낮은 SNR 환경에서는 전송 채널에 내재된 잡음 부분이 BER 성능에 지대한 영향을 미치게 되며 이에 따라 일반화된 TQAM의 최적 파라미터 값은 정방형 QAM 구조가 될 수 밖에 없다. 하지만, 비교적 높은 SNR 환경에서는 (정삼각형) TQAM의 신호점 배치 구조가 정해진 심볼 에너지 기준에서 신호점 사이의 판정 거리 및 간격을 최대한 확보할 수 있어서 BER 측면에서 일반화된 TQAM의 최적 파라미터 값에 해당된다.

III. 결론

본 논문에서는 QAM 계열을 모두 포함할 수 있는 일반화된 TQAM을 제안하였고 비트 오류 확률을 널리 알려진 1-D 및 2-D Gaussian Q-함수로 구성된 closed-form 수식으로 유도하였다. 그래서, 이 유도한 수식은 기준에 알려진 정방형 QAM, TQAM, θ -QAM에 대한 비트 오류 확률도 한꺼번에 나타낼 수 있다. 그리고, 본 논문에서 유도한 최적 파라미터의 일반화된 TQAM의 형태는 신호대 잡음비가 커짐에 따라 변조 지수 M 의 값에 관계없이 정방형 QAM에서 (정삼각형) TQAM로 됨을 보였다.

향후에 일반화된 TQAM에서는 본 연구에서 다룬 그레이 비트 코딩 이외의 보다 향상된 비트 할당 기법에 대한 연구가 요구되고 있다. 또한, 이 전송 기법에 효율적인 소스 코딩 및 채널 코딩에 대한 연구가 추가로 필요로 한다.

References

- [1] ETSI TS, *3GPP TS 36.211 v9.1.0 (2009-09)*: "Physical Channels and Modulation (Release 9)"
- [2] M. Zhang and S. Kim, "Performance enhancement by scaling soft bit information of APSK," *J. KICS*, vol. 38, no. 10, pp. 858-866, Oct. 2013.
- [3] I. Kang, Y. Kim, J. Seo, H. Kim, and H. Kim, "Performance analysis of a bit mapper of the dual-polarized MIMO DVB-T2 system," *J. KICS*, vol. 38, no. 9, pp. 817-825, Sept. 2012.

- [4] K. N. Pappi, A. S. Lioumpas, and G. K. Karagiannidis, " θ -QAM: A parametric quadrature amplitude modulation family and its performance in AWGN and fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 4, pp. 1014-1019, Apr. 2010.
- [5] S. Lee, J. Kim, J. Lee, S. Yun, and J. Ahn. "Transmission performance analysis for terrestrial digital broadcast systems according to Hierarchical Modulation Factor(α)," *J. KICS*, vol. 37, no. 9, pp. 728-737, Sept. 2012.
- [6] K. Cho, J. Lee, and D. Yoon, "Performance analysis of generalized triangular QAM," *J. KICS*, vol. 35, no. 11, pp. 654-659, Jul. 2010.
- [7] J. Lee, D. Yoon, K. Cho, "Error Performance analysis of M -ary θ -QAM," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 61, no.3, pp. 1423-1427, Mar. 2012.
- [8] K. Cho and D. Yoon, "On the general BER expression of one- and two-dimensional amplitude modulations," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 7, pp. 1074-1080, Jul. 2002.
- [9] J. Lee, D. Yoon, and K. Hyun, "Exact and general expression for the error probability of arbitrary two-dimensional signaling with I/Q amplitude and phase unbalances," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E89-B, no. 12, pp. 3356-3362, Dec. 2006.
- [10] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series: U.S. Department of Commerce, 1982.

조 경 국 (Kyongkuk Cho)
한국통신학회논문지 제32권 제7호