

QR 반복법의 고유벡터를 이용한 수렴 판단 방법

김대현*, 이진구*, 정성희**, 이재은**, 김영록^o

Convergence Decision Method Using Eigenvectors of QR Iteration

Daehyun Kim*, Jingu Lee*, Seonghee Jeong**, Jaeun Lee**, Younglok Kim^o

요약

MUSIC(multiple signal classification) 알고리즘은 고유값(eigenvalue)과 고유벡터(eigenvector)를 이용하여 표적의 도래각을 추정하는 대표적인 알고리즘이다. 일반적으로 고유값과 고유벡터는 고유치 해석(eigen-analysis)을 이용하여 구할 수 있으나, 계산 복잡도가 높고 수렴 시간의 긴 문제점이 있다. 그러므로 저가형 실시간 시스템 구현에 한계가 있다. 이런 문제를 개선한 고유치 해석 방법으로 QR 반복법이 제안되었으나, 기존의 QR 반복법 수렴 판단 방법으로는 MUSIC 알고리즘 적용에 부적합하다는 한계가 있다. 본 논문에서는 QR 반복법의 고유치 기반의 기존 수렴 판단 방법의 문제점을 분석하고, 고유벡터를 활용한 개선된 수렴 판단 방법을 제안한다.

Key Words : QR iteration, MUSIC, Eigenvector, Eigen analysis, Convergence decision

ABSTRACT

MUSIC (multiple signal classification) algorithm is a representative algorithm estimating the angle of arrival using the eigenvalues and eigenvectors. Generally, the eigenvalues and eigenvectors are obtained through the eigen-analysis, but this analysis requires high computational complexity and late convergence time. For this reason, it is almost impossible to construct the real-time system with low-cost using this approach. Even though QR iteration is considered as the eigen-analysis approach to improve these problems, this is inappropriate to apply to the MUSIC algorithm. In this paper, we analyze the problems of conventional method based on the eigenvalues for convergence decision and propose the improved decision algorithm using the eigenvectors.

1. 서론

최근 주행상황에서의 안정성 확보를 위한 차량용 표적 검출 레이더 연구가 활발히 진행되고 있다. 주행 상황에서 실시간으로 표적을 검출하기 위해 빠른 연산이 요구되며, 모든 차량에 실장을 해야 하므로 저가형이 요구된다.

현재 표적 검출 레이더는 다중 표적에 대한 검출을

위하여 배열 안테나를 사용한다^{1,2}. 다중 표적의 검출을 위해서 사용되는 대표적인 방법은 MUSIC 알고리즘이 있다^{3,4}. MUSIC 알고리즘은 신호 부공간(signal subspace)과 잡음 부공간(noise subspace)의 직교성(orthogonality)을 이용하여 표적 신호의 입사각을 검출한다^{5,6}. 신호 부공간 및 잡음 부공간 구분은 고유값 크기의 비교를 통해 하며 신호 부공간 값에 비해 잡음 부공간 값은 작은 값을 갖게 된다. 신호 부공간

※ 본 연구는 산업통상자원부 산업기술혁신사업의 지원으로 수행되었음. [10051134, Euro NCAP AEB 대응을 위한 중거리(150m 이상) 레이더 개발]

• First Author : Sogang University Department of Electronic Engineering, sinzuggo@sogang.ac.kr, 학생회원

^o Corresponding Author : Sogang University Department of Electronic Engineering, ylkim@sogang.ac.kr, 정회원

* Sogang University Department of Electronic Engineering, jingu8562@sogang.ac.kr, 학생회원

** Mando, korea, seonghee.jeong@halla.com, jaeun.lee@halla.com

논문번호 : KICS2016-05-088, Received May 4, 2016; Revised May 8, 2016; Accepted July 11, 2016

및 잡음 부공간의 직교 특성은 고유벡터간의 정규직교(orthonormal) 특성을 통하여 확인할 수 있다.

고유값과 고유벡터를 구하기 위해서는 고유값 분해 과정이 필요하다. 기존의 고유값 분해 알고리즘은 Jacobi 반복법으로 행렬의 특성과 크기에 무관하게 적용이 가능하지만⁷⁾ 높은 연산 복잡도와 늦은 수렴 시간을 갖는 단점이 있다⁸⁾. 다른 방법인 QR 반복법은 계산 복잡도와 수렴 시간의 개선이 가능하지만 Jacobi 반복법에 비해 작은 크기의 행렬에서만 복잡도의 장점을 보이며, 수렴 여부 판단이 정확하지 않다는 한계가 있다. 현재 표적 검출 레이더에 사용하는 배열 안테나는 4개에서 8개 사이로 사용되고 있으며, 배열 안테나 수신신호를 통한 공분산 행렬(covariance matrix) 계산 시 Hermitian 행렬 특성을 지니게 되므로, QR 반복법 적용상의 행렬의 특성이나 크기는 문제가 되지 않는다. 수렴 여부는 반복 횟수에 따라 고유값의 수렴 여부를 통하여 판단하나 이 방법은 고유벡터 값의 수렴 여부 및 이상적인 값의 수렴 여부를 판단하기에는 문제가 있다.

본 논문에서는 QR 반복법을 통한 고유치 분해 계산에서 기존 수렴 여부 판단 방법과 제안한 수렴 여부 판단 방법에 대해서 비교 분석을 진행하겠다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 QR 반복법을 통한 고유값 분해 방법에 대해서 설명을 하며 3장에서는 QR 반복법 수렴 여부 판단을 위한 기존 방법 대비 정확성을 높인 수렴 여부 판단 방법을 제안한다. 4장에서는 시뮬레이션 결과를 통하여 기존 방법과 제안한 방법을 비교를 진행하며 5장에서 결론을 맺는다.

II. QR 반복법을 통한 고유치 분해

QR 반복법을 통한 고유치 분해를 위해서 우선 Householder 행렬 계산 과정이 필요하다. Householder 행렬은 삼중 대각 행렬 변환 및 QR 분해에 적용할 수 있다. Householder 행렬을 이용하여 고유값 및 고유벡터의 계산방법인 Wilkinson shift를 이용한 QR 반복법을 설명하도록 하겠다⁹⁾.

2.1 Householder 행렬

임의의 0이 아닌 벡터 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ 에 대해서 식 (1)과 같이 Householder 벡터 $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$ 의 성분을 계산할 수 있다.

$$h_i = \begin{cases} \frac{x_1}{m} + \|\hat{\mathbf{x}}\|_2 \cdot \text{sign}\left(\frac{x_1}{m}\right), & i = 1 \\ \frac{x_i}{m} & , i \neq 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\left(m = \sum_{k=1}^N x_k\right)$$

Householder 벡터 \mathbf{h} 를 이용하여 식 (2)와 같이 Householder 행렬 \mathbf{H} 를 계산할 수 있다.

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{h}\mathbf{h}^*}{\mathbf{h}^*\mathbf{h}} \quad (2)$$

Householder 행렬은 Hermitian 행렬이며, Unitary 행렬이다. 식 (3)과 같이 Householder 행렬과 벡터 \mathbf{x} 를 연산할 경우 첫 번째 성분인 \tilde{x}_1 을 제외하고 모든 성분이 0이 된다는 특징이 있다.

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = [\tilde{x}_1, 0, \dots, 0]^T \quad (3)$$

2.2 삼중 대각 행렬 변환

크기가 $(N \times N)$ 인 Hermitian 행렬 \mathbf{A} 가 있을 때 Householder 행렬을 이용하여 삼중 대각 행렬 \mathbf{T} 로 변환할 수 있다.

$$\mathbf{T} = (\mathbf{H}_{N-2} \cdots \mathbf{H}_1)\mathbf{A}(\mathbf{H}_1 \cdots \mathbf{H}_{N-2}) \quad (4)$$

식 (4)에서 \mathbf{A} 의 앞에 곱해지는 \mathbf{H}_j 는 \mathbf{A} 의 j 열을, 뒤에 곱해지는 \mathbf{H}_j 는 \mathbf{A} 의 j 행을 계산하기 위한 Householder 행렬이다. 삼중 대각 행렬의 계산을 위해서는 \mathbf{A} 의 j 행(열) 계산 시 $(j+2)$ 번째 성분에서 N 번째 성분까지 0으로 만들어 주는 Householder 행렬이 필요하다. 그 행렬을 만들기 위해 우선 \mathbf{A} 의 j 행(열)의 $(j+1)$ 번째 성분에서 N 번째 성분을 통하여 Householder 행렬 $\hat{\mathbf{H}}_j$ 를 계산한다. $\hat{\mathbf{H}}_j$ 크기는 $((N-j) \times (N-j))$ 가 되며, 크기가 $(N \times N)$ 인 행렬 \mathbf{A} 와 곱셈이 불가능하므로 식 (5)의 변형 과정을 통하여 크기가 $(N \times N)$ 인 \mathbf{H}_j 를 만들어 준다. 이 과정을 통하여 만들어준 \mathbf{H}_j 를 \mathbf{A} 의 앞뒤에 곱해주면 삼중 대각 행렬 \mathbf{T} 로 변환할 수 있다.

$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{H}}_j \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.3 QR 분해

크기가 $(N \times N)$ 인 행렬 \mathbf{B} 가 있을 때 Unitary 행렬 \mathbf{Q} 와 삼각 행렬 \mathbf{R} 의 곱으로 나타낼 수 있으며, 이를 QR분해라 하며 식 (6)과 같다.

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad (6)$$

식 (6)의 과정을 Householder 행렬을 이용하여 식 (7)과 같이 계산할 수 있다.

$$(\mathbf{H}_{N-1}\mathbf{H}_{N-2} \cdots \mathbf{H}_1)\mathbf{B} = \mathbf{Q}^*\mathbf{B} = \mathbf{R} \quad (7)$$

Householder 행렬인 \mathbf{H}_j 는 Unitary 행렬이기 때문에 $(\mathbf{H}_{N-1}\mathbf{H}_{N-2} \cdots \mathbf{H}_1)$ 역시 Unitary 행렬이 된다. 삼중 대각 행렬의 계산과정에서와 마찬가지로 행렬의 계산을 위해서는 $\hat{\mathbf{H}}_j$ 를 식 (5)와 같이 \mathbf{H}_j 로 만들어 주는 과정이 필요하다. 삼각 행렬 \mathbf{R} 을 만들어 주어야 하므로 이 과정에서의 $\hat{\mathbf{H}}_j$ 의 크기는 $((N-j+1) \times (N-j+1))$ 가 된다.

2.4 Wilkinson shift를 이용한 QR 반복법

크기가 $(N \times N)$ 인 Hermitian 행렬 \mathbf{A} 가 있을 때 식 (5)의 방법을 통하여 삼중 대각 행렬 \mathbf{T} 로 변환한다. 이 과정에서 구한 \mathbf{T} 를 \mathbf{T}_1 이라 하겠다. \mathbf{T}_1 의 오른쪽 하단 (2×2) 행렬이 식 (8)과 같을 때 그 성분을 이용하여 식 (9)와 식 (10)을 계산한다.

$$\begin{bmatrix} t_{(N-1)(N-1)}^{(1)} & t_{(N-1)N}^{(1)} \\ t_{N(N-1)}^{(1)} & t_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$r_1 = \frac{t_{(N-1)(N-1)}^{(1)} - t_{NN}^{(1)}}{2} \quad (9)$$

$$\mu_1 = r_1 + t_{NN}^{(1)} + \text{sign}(r_1) \sqrt{r_1^2 + |t_{(N-1)N}^{(1)}|^2} \quad (10)$$

식 (10)에서 계산된 μ_1 을 이용하여 식 (11)과 같이 QR 분해 계산을 한다.

$$\mathbf{T}_1 - \mu_1\mathbf{I} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1 \quad (11)$$

식 (11)를 통해 구해진 \mathbf{Q}_1 과 \mathbf{R}_1 을 이용하여 식 (12)와 같이 \mathbf{T}_2 를 계산한다.

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{Q}_1 + \mu_1\mathbf{I} \quad (12)$$

Wilkinson shift를 이용한 QR 반복법은 식 (9)에서 식 (12)의 과정을 반복하여 \mathbf{T}_k 를 구한다. ($k = 1, 2, \dots$) 행렬 \mathbf{T}_k 가 대각 행렬이 될 때까지 반복 계산을 진행하면 되며, 이때 구해진 \mathbf{T}_k 는 \mathbf{A} 의 고유값이 된다.

고유벡터를 구하기 위해서는 식 (11)을 식 (13)과 같은 변형이 필요하다.

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_1^*(\mathbf{T}_1 - \mu_1\mathbf{I}) \quad (13)$$

식 (13)를 식 (12)에 대입하여 계산하면 식 (14)를 구할 수 있으며, 는 \mathbf{T}_k 식 (15)과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{Q}_1^*(\mathbf{T}_1 - \mu_1\mathbf{I})\mathbf{Q}_1 + \mu_1\mathbf{I} = \mathbf{Q}_1^*\mathbf{T}_1\mathbf{Q}_1 \quad (14)$$

$$\mathbf{T}_k = (\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-1})^* \mathbf{T}_1 (\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}) \quad (15)$$

\mathbf{T}_1 은 $(\mathbf{H}_{N-2} \cdots \mathbf{H}_1)\mathbf{A}(\mathbf{H}_1 \cdots \mathbf{H}_{N-2})$ 이므로 식 (15)에서 $\mathbf{C} = \mathbf{H}_{N-2} \cdots \mathbf{H}_1$, $\mathbf{D}_k = \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_{k-1}$ 치환하여 정리하면 식 (16)과 같이 정리할 수 있다.

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{D}_k^* \mathbf{C}^* \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{D}_k = (\mathbf{C} \mathbf{D}_k)^* \mathbf{A} (\mathbf{C} \mathbf{D}_k) \quad (16)$$

식 (16)을 \mathbf{A} 로 정리하면 식 (17)과 같이 되며, 이때 $\mathbf{C} \mathbf{D}_k$ 는 \mathbf{A} 의 고유벡터가 된다.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{C} \mathbf{D}_k) \mathbf{T}_k (\mathbf{C} \mathbf{D}_k)^* \quad (17)$$

III. 고유벡터를 이용한 수렴 판단

QR 반복법을 통하여 구한 고유값 및 고유벡터의 수렴 여부 판단은 신뢰도 및 복잡도 측면에서 모두 중요하다. 신뢰성 있는 수준으로 이상적인 값에 수렴했을 때 반복 계산을 멈춰야 하지만, 무한정으로 반복 계산을 한다면 복잡도 측면에서 문제가 생길 수 있다.

QR 반복법의 수렴 여부는 크게 세 가지 방법으로 확인할 수 있다. 첫 번째 방법은 반복법으로 구한 고

유값 및 고유벡터의 계산을 통하여 주어진 공분산 행렬과의 비교하는 것이다. 식 (18)을 이용하여 오차 값을 추정을 통하여 수렴 여부를 판단할 수 있다.

$$E_1(k) = \| \mathbf{A} - \mathbf{U}(k)\mathbf{\Lambda}(k)\mathbf{U}^*(k) \| \quad (18)$$

\mathbf{A} 는 주어진 공분산 행렬이며, k 번 반복계산 했을 때 나오는 고유벡터 행렬은 $\mathbf{U}(k)$, 고유값 행렬은 $\mathbf{\Lambda}(k)$ 이다. ($k = 1, 2, \dots$)

QR 반복법은 주어진 공분산 행렬을 기반으로 연산 과정이 진행되므로 반복횟수에 무관하게 항상 수렴하는 결과를 보이게 되어 식 (18)은 수렴 여부 판단의 기준이 될 수 없다. 식 (18)을 이용하여 식 (19)과 같이 반복에 따른 전후 값을 비교하여 수렴 여부를 판단할 수 있다. ($k = 2, 3, \dots$)

$$E_2(k) = \| \mathbf{A} - \mathbf{U}(k)\mathbf{\Lambda}(k-1)\mathbf{U}^*(k) \| \quad (19)$$

하지만 식 (19)는 연산과정의 복잡도가 높아 QR 반복법의 목적에 맞지 않다는 문제점이 있다.

두 번째 방법은 보편적으로 가장 많이 사용되는 방법으로 반복에 따른 고유값의 전후 값을 비교하는 것이다. 고유값의 일정 상수로 수렴되는지 여부를 비교하여 수렴 여부를 판단하는 방법이다^{9,10}. 방법에 대한 설명 및 분석은 아래 1절을 통하여 진행하도록 하겠다.

세 번째 방법은 본 논문에서 제안하는 방법으로 반복에 따른 고유벡터의 전후 값을 비교하는 것이다. 고유벡터의 정규직교 특성을 이용하여 수렴 여부를 판단하는 방법으로 설명 및 분석은 아래 2절을 통하여 진행하도록 하겠다.

3.1 반복에 따른 고유값 수렴 여부 판단

Hermitian 행렬의 고유값이 실수이며, 이 실수 값의 수렴되는지 여부를 통해 QR 반복법의 수렴 여부를 확인할 수 있다. ($N \times N$)의 크기를 갖는 Hermitian 행렬의 QR 반복법을 통해 고유값 분해를 했다고 가정하면 식 (20)을 통해 수렴 여부를 판단할 수 있다.

$$E_3^{(l)}(k) = \left| \frac{\lambda_l(k) - \lambda_l(k-1)}{\lambda_l(k-1)} \right| \quad (20)$$

$\lambda_l(k)$ 는 k 번 반복 계산 했을 때 나오는 l 번째 고

유값을 의미한다. ($l = 1, 2, \dots, N$)

위의 고유값을 통해 수렴 여부를 판단하는 방법에는 크게 두 가지의 문제점이 있다. 첫 번째 문제점은 고유값의 수렴이 이상적인 값에 수렴하고 있는지 판단이 불가능하다는 것이다. 식 (21)은 ($k+1$)번째 고유값과 k 번째 고유값간의 차이를 통하여 수렴을 판단하는 방법이다. QR 반복법을 통해 이상적인 고유값을 얻을 수 있다는 가정 하에 적용 가능하며, 이상적인 고유값을 얻지 못하는 경우에 대해서는 잘못된 수렴 판단을 할 수 있다. 두 번째 문제점은 MUSIC 알고리즘 적용을 위해서는 고유값의 수렴이 아닌 고유벡터의 수렴 여부 판단이 중요하며, 고유값 수렴 여부 판단이 고유벡터 수렴 판단을 보장하지 않는다는 것이다.

3.2 반복에 따른 고유벡터의 정규 직교 특성을 통한 수렴 여부 판단

고유벡터는 단순히 값의 수렴 여부 판단이 아닌 정규 직교 특성을 이용하여 수렴 여부를 판단할 수 있다. 고유치 분해를 통하여 구한 α 번째와 β 번째 고유벡터를 각각 \mathbf{u}_α 와 \mathbf{u}_β 라 하겠다. 고유벡터는 식 (21)과 같이 정규 직교 특성을 갖는다¹¹.

$$\mathbf{u}_\alpha^* \mathbf{u}_\beta = \delta(\alpha - \beta) \quad (21)$$

QR 반복법 상에서 \mathbf{u}_α 를 ($k-1$)번째 반복계산을 통해 나온 α 번째 고유벡터라 하고 \mathbf{u}_β 를 k 번째 반복계산을 통해 나온 β 번째 고유벡터라 가정하면, 고유벡터가 수렴하지 못할 경우 식 (21)과 같은 고유벡터의 정규 직교 특성을 보이지 못한다. 또한 고유벡터의 수렴 여부 판단은 고유값의 수렴 여부까지 함께 판단할 수 있으며, 그 과정의 증명은 아래와 같다. 우선 고유값 분해 기본 수식은 식 (22)와 같다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^* \quad (22)$$

식 (22)를 벡터 형식으로 표현하면 식 (23)과 같다.

$$\mathbf{A} = \sum_{l=1}^N \lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^* \quad (23)$$

식 (23)에서 $\lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^*$ 의 대각선 성분의 합은 식 (24)와 같이 표현할 수 있다.

$$\text{tr}(\lambda_l \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^*) = \lambda_l \mathbf{u}_l^* \mathbf{u}_l = \lambda_l \quad (24)$$

식 (24)에서 tr 은 trace 함수로 행렬의 대각선 성분을 합하는 것을 의미한다. 또한 정규 직교 특성상 $\mathbf{u}_l^* \mathbf{u}_l = 1$ 이므로 식 (24)과 같이 합을 λ_l 로 표현이 가능하다. 위의 방법으로 행렬 \mathbf{A} 의 대각선 성분의 합을 구해보면 식 (25)과 같다.

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{l=1}^N (\lambda_l \mathbf{u}_l^* \mathbf{u}_l) = \sum_{l=1}^N \lambda_l \quad (25)$$

식 (25)에서 m 번째 고유값인 λ_m 이 $\hat{\lambda}_m$ 으로 잘못 수렴했다고 가정하여, 즉 $\lambda_m \neq \hat{\lambda}_m$ 일 경우 식 (25)를 다시 표현하면 식 (26)과 같이 표현할 수 있다. 고유값이 $\hat{\lambda}_m$ 일 경우 고유벡터를 $\hat{\mathbf{u}}_m$ 라 한다.

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A}) &= \sum_{l=1, l \neq m}^N \lambda_l + \text{tr}(\hat{\lambda}_m \hat{\mathbf{u}}_m \hat{\mathbf{u}}_m^*) \\ &= \sum_{l=1, l \neq m}^N \lambda_l + \hat{\lambda}_m \hat{\mathbf{u}}_m^* \hat{\mathbf{u}}_m \end{aligned} \quad (26)$$

$\text{tr}(\mathbf{A})$ 은 고정된 값이므로 $\hat{\lambda}_m \hat{\mathbf{u}}_m^* \hat{\mathbf{u}}_m = \lambda_m$ 이 되어야 하며 $\lambda_m \neq \hat{\lambda}_m$ 이므로 $\hat{\mathbf{u}}_m^* \hat{\mathbf{u}}_m \neq 1$ 이 된다. 이는 고유벡터가 정규 직교 특성을 갖지 못한다는 것은 고유값이 수렴하지 못한다는 것을 의미한다. 이는 고유벡터의 정규 직교 특성 검증을 통하여 고유값 수렴 여부까지 확인 할 수 있다는 것을 의미한다.

본 논문에서는 고유벡터의 전후 값을 비교하여 수렴 여부 판단 방법에 대하여 제안한다. 식 (27)은 제안하는 방법에 대한 기본 수식이다.

$$E_4^{(l)}(k) = |\mathbf{u}_l^*(k-1) \mathbf{u}_l(k) - 1| \quad (27)$$

식 (27)과 같이 $(k-1)$ 번째 반복계산을 통해 나온 N 개의 고유벡터와 k 번째 반복계산을 통해 나온 N 개의 고유벡터를 각각 정규 직교 특성 검증 계산을 통하여 수렴 여부 판단을 할 수 있다.

본 논문에서 제안하는 고유벡터의 정규 직교 특성을 통한 판단은 QR 반복법 상에서 각 고유벡터들의 정규 직교 특성을 파악하며 수렴 여부를 판단할 수 있

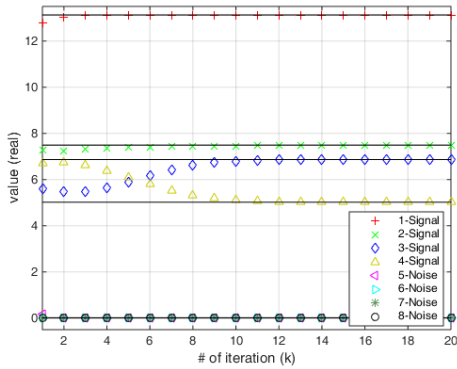
는 장점이 있다. 고유값 수렴 여부 분석 시 고유값이 이상적인 값에 수렴하지 못하는 경우에 대한 문제점도 해결이 가능하다. 고유벡터가 이상적인 값에 수렴하지 못할 경우 식 (27)이 0으로 수렴하지 못하게 되므로 잘못된 수렴에 대하여 검출이 가능하다. 신호 부공간과 잡음 부공간의 고유벡터의 직교 특성을 이용한 MUSIC 알고리즘 적용 시 제안하는 방법의 수렴 판단 방법이 기존의 방법에 비해 높은 신뢰성을 갖게 된다.

IV. 실험

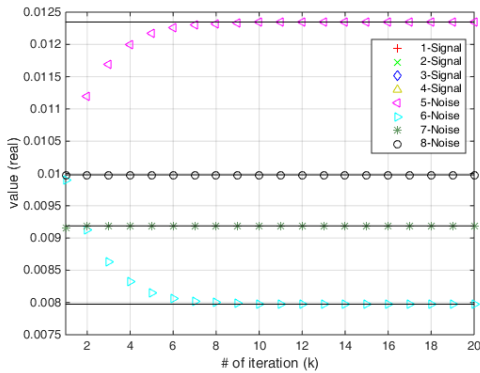
M 개의 표적을 N 개의 배열 안테나를 통해 수신한다는 가정으로 수신 신호를 만든다. $(N+1)$ 수신 신호를 공분산 행렬 계산을 통해 $(N \times N)$ 의 크기를 갖는 Hermitian 행렬을 만들 수 있다. 만들어진 행렬의 신호 부공간은 M 개이며 잡음 부공간은 $N-M$ 개가 된다. 아래 시뮬레이션은 $N=8, M=4$ 를 가정하고 진행하였다. 신호와 잡음은 랜덤 가우시안 신호로 생성하였고 SNR은 20dB로 설정했다. 시뮬레이션은 QR 반복법으로 계산상에서 정상적으로 수렴한 경우와, 잡음 부공간에서 잘못된 수렴이 일어난 경우에 대해서 각각 진행하였으며 반복 횟수는 20회에 한하여 진행하였다. 아래 시뮬레이션 상황에서 1번부터 8번은 부공간의 순서를 의미하며, 1번부터 4번은 신호 부공간을 의미하며 5번부터 8번은 잡음 부공간을 의미한다.

첫 번째로 QR 반복법으로 정상적으로 수렴하는 경우에 대한 시뮬레이션 결과이다. 그림 1은 이상적인 고유값과 QR 반복법에 의해 나오는 고유값을 비교한 것이다. (a)는 전체적 그림을, (b)는 잡음 부공간 부분을 확대한 그림이다. 그림에서 실선으로 나타낸 부분은 이상적인 고유값을 나타낸다. QR 반복법을 진행하면서 모든 부공간의 고유값이 수렴하는 반복 횟수는 다르나 이상적인 값에 수렴함을 확인할 수 있다. 신호 부공간의 고유값과 잡음 부공간의 고유값의 크기의 차이가 있으므로 고유값 수렴 여부 판단 방법과 고유벡터 수렴 여부 판단 방법을 통하여 확인할 수 있다.

그림 2는 식 (20)의 고유값 수렴 여부 판단에 대한 시뮬레이션 결과이다. 각 고유값의 크기를 기준으로 하여 변화되는 정도를 확인하는 방법으로, 신호 부공간 및 잡음 부공간에 상관없이 수렴 정도를 확인할 수 있다. 시뮬레이션 결과 신호 부공간 3번, 4번이 가장 느리게 수렴하며 그 다음으로 잡음 부공간 5번, 6번



(a)



(b)

그림 1. 이상적인 고유값과 QR 반복법에 의한 고유값 비교
 (a)고유값 전체 비교 (b)잡음 부공간 고유값 비교
 Fig. 1. The eigenvalues comparison by ideal eigenvalues and QR iteration eigenvalues (a)All eigenvalues comparison (b)Noise subspace eigenvalues comparison

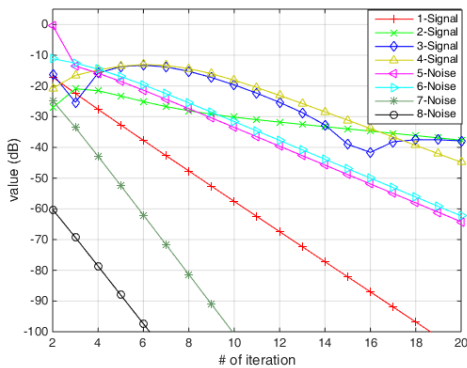


그림 2. 고유값 수렴
 Fig. 2. Eigenvalue convergence

느리게 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

그림 3은 식 (27)의 고유벡터 수렴 여부 판단에 대한 시뮬레이션 결과이다. 전체적인 수렴 추이는 고유

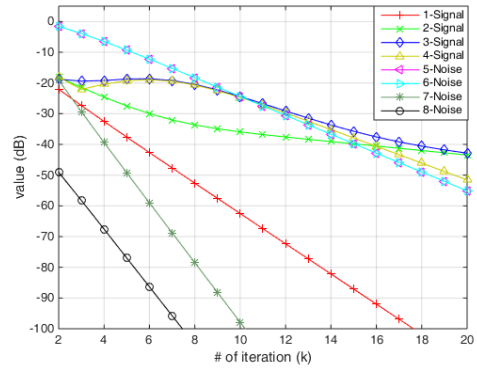


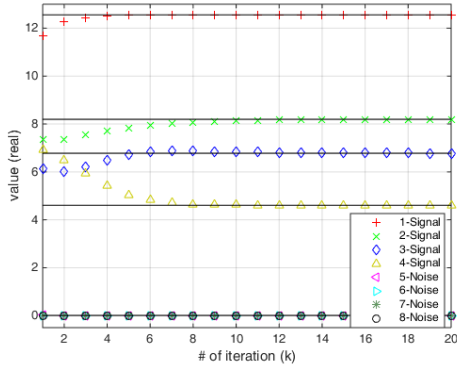
그림 3. 고유벡터 수렴
 Fig. 3. Eigenvector convergence

값 수렴 결과와 유사하다, 수렴 순서에서의 차이가 있음을 확인할 수 있다. 그림 2와 다르게 10회 이전의 상황에서는 잡음 부공간 5번, 6번이 가장 느리게 수렴하며 그 다음 3번, 4번이 느리게 수렴함을 확인할 수 있다.

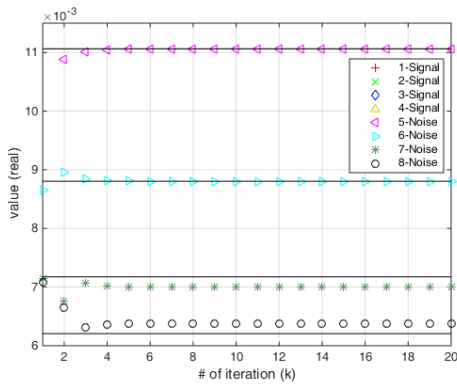
두 번째로 QR 반복법으로 잡음 부공간에서 잘못된 수렴이 일어난 경우에 대한 시뮬레이션 결과이다. 그림 4는 이상적인 고유값과 QR 반복법에 의해 나오는 고유값을 비교한 것이며 (a)는 전체적 그림을, (b)는 잡음 부공간 부분을 확대한 그림이다. 그림 4에서 실선은 그림 1의 실선과 마찬가지로 이상적인 고유값을 나타낸다. QR 반복법을 진행하면서 신호 부공간의 고유값은 이상적인 값으로 10회 내외에 수렴하며, 잡음 부공간의 5번, 6번은 5회 내외로 수렴하는 것을 보이지만 7번, 8번은 이상적인 값에 수렴하지 못하는 것을 확인할 수 있다.

그림 5는 식 (20)의 고유값 수렴 여부 판단에 대한 시뮬레이션 결과이다. 신호 부공간 및 잡음 부공간의 모든 고유값 들이 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 그림 4에서 확인할 수 있듯이 반복계산에 따라 일정한 상수로 수렴하기 때문이다. 이런 고유값의 비교 방법의 문제점은 7번, 8번 고유값의 수렴 여부 판단으로 확인할 수 있다. 7번, 8번 모두 이상적인 고유값에 수렴 못하지만 일정 상수로 수렴하기 때문에 수렴으로 잘못된 판단을 할 수 있다.

그림 6은 식 (27)의 고유벡터 수렴 여부 판단에 대한 시뮬레이션 결과이다. 신호 부공간의 고유벡터와 잡음 부공간 신호의 5번, 6번의 수렴 여부는 그림 2의 고유값 수렴과 유사한 모습을 보인다. 고유값 수렴 여부와 다르게 잘못된 수렴을 하는 잡음 부공간 7번, 8번의 경우 수렴하지 못하는 것을 확인할 수 있다. 고



(a)



(b)

그림 4. 이상적인 고유값과 QR 반복법에 의한 고유값 비교
 (a)고유값 전체 비교 (b)잡음 부공간 고유값 비교
 Fig. 4. The eigenvalues comparison by ideal eigenvalues and QR iteration eigenvalues (a)All eigenvalues comparison (b)Noise subspace eigenvalues comparison

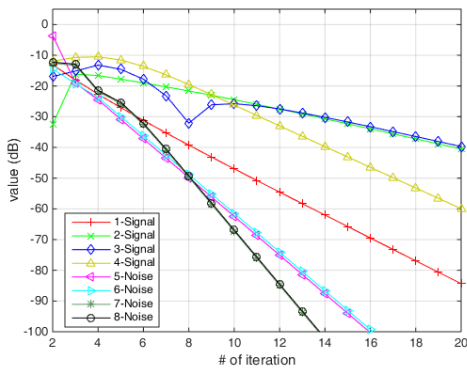


그림 5. 고유값 수렴
 Fig. 5. Eigenvalue convergence

유값이 이상적인 값에 수렴하지 못하기 때문에 고유 벡터의 정규 직교 값이 0으로 수렴하지 못하기 되고 그로 인하여 잘못된 수렴 판단의 기준이 될 수 있다.

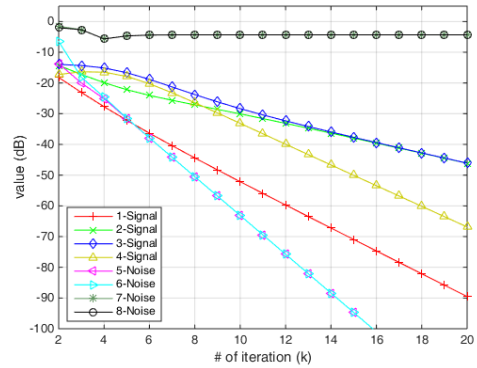


그림 6. 고유벡터 수렴
 Fig. 6. Eigenvector convergence

그림 2와 그림 3에서 알 수 있듯이 시뮬레이션 결과 고유값과 고유벡터 모두 수렴을 하여도 수렴 순서 간의 차이가 있음을 확인할 수 있다. MUSIC 알고리즘과 같이 고유벡터의 정규 직교 성분을 이용하는 알고리즘의 경우 고유값 수렴 판단에 비하여 고유벡터의 수렴 판단을 기준으로 두는 것이 신뢰성이 높다.

또한 그림 5와 그림 6에서 알 수 있듯이 기존 방법인 고유값의 단순 전후 값의 비교는 이상적인 값에 수렴 여부를 판단 할 수 없는 것을 확인할 수 있다. 반면 제안한 방법인 고유벡터 수렴 여부 판단은 고유값이 수렴 못할 경우 정규 직교가 되지 않는 특성을 이용하기 때문에 잘못된 수렴의 판단이 가능하며 시뮬레이션 결과 확인할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 MUSIC 알고리즘 계산상에서 필요한 고유치 분해 방법 중 연산 복잡도 측면에 장점을 가지고 있는 QR 반복법을 통한 고유치 분해 방법을 분석하였다. 기존의 고유값을 통한 수렴 여부 판단의 문제점을 분석하였고, 고유벡터의 정규 직교 특성을 통한 수렴 여부 판단 방법을 제안하였다. 기존 방법은 잘못된 수렴에 대한 판단이 불가능 하지만 제안한 방법의 경우 잘못된 수렴에 대한 판단 및 검출이 가능하다는 것을 알 수 있다. 잘못된 수렴에 대한 해결 방법에 대해서는 향후 연구를 통해 진행할 예정이다. 또한 고유벡터를 이용하여 계산하는 MUSIC 알고리즘 특성상 본 논문에서 제안한 고유벡터의 정규 직교 특성을 이용한 수렴 방법이 신뢰성이 더 높다. 제안하는 방법은 수렴 여부 판단의 정확성에 도움이 될 것이며, 더 나아가 고유벡터를 통한 알고리즘들의 성능향상에

도움이 될 것이다.

References

[1] A. Badakhani, et al., "A 77-GHz phased array transceiver with on-chip antennas in silicon: Receiver and antennas," *IEEE J. Solid-state Circuits*, vol. 41, no. 12, pp. 2795-2806, Dec. 2006.

[2] J. Lee, et al., "A fully-integrated 77-GHz FMCW radar transceiver in 65-nm CMOS technology," *IEEE J. Solid-state Circuits*, vol. 45, no. 12, pp. 2746-2756, Dec. 2010.

[3] H.-R. Park and J.-H. Shin, "Eigen-analysis based super-resolution time delay estimation algorithms for spread spectrum signals," *J. KICS*, vol. 38A, no. 12, pp. 1013-1020, Dec. 2013.

[4] J.-H. Shin, H.-R. Park, and E. Chang, "An ESPRIT-based super-resolution time delay estimation algorithm for real-time locating systems," *J. KICS*, vol. 38A, no. 04, pp. 310-317, Apr. 2013.

[5] Y. Kim, H.-G. Park, and H.-G. Ryu, "A computation reduction technique of MUSIC Algorithm for optimal path tracking," *J. KICS*, vol. 39A, no. 04, pp. 188-194, Apr. 2014.

[6] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. ap-34, no. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.

[7] M. Kim, K. Ichige, and A. Hiroyuki, "Design of Jacobi EVD processor based on CORDIC for DOA estimation with MUSIC algorithm," *IEICE Trans. Commun.*, vol. E85-B, no. 12, pp. 2648-2655, Dec. 2002.

[8] J. G. McWhirter, et al., "An EVD algorithm for para-Hermitian polynomial matrices," *IEEE Trans. Sign. Process.*, vol. 55, no. 5, pp. 2158-2169, May 2007.

[9] B. N. Datta, *Numerical linear algebra and applications*, 2nd Ed., Siam, pp. 181-194, pp. 295-365, 2010.

[10] D. A. Bini, L. Gemignani, and V. Y. Pan, "Fast and stable QR eigenvalue algorithms for

generalized companion matrices and secular equations," *Numerische Mathematik*, vol. 100, no. 3, pp. 373-408, Apr. 2005.

[11] L. L. Scharf, *Statistical signal processing*, Addison-Wesley, ch. 2, 1991.

김 대 현 (Daehyun Kim)



2014년 2월 : 서강대학교 전자공학과 졸업
 2014년 3월~현재 : 서강대학교 전자공학과 석박사통합과정 <관심분야> 레이더 신호처리, 무선통신, 신호처리

이 진 구 (Jingu Lee)



2013년 2월 : 공주대학교 전파공학과 졸업
 2015년 2월 : 서강대학교 전자공학과 석사 졸업
 2015년 3월~현재 : 서강대학교 전자공학과 박사과정 <관심분야> 레이더 신호처리, 무선통신, 신호처리

정 성 희 (Seonghee Jeong)



2005년 2월 : 서강대학교 전자공학과 졸업
 2012년 8월 : 서강대학교 전자공학과 박사 졸업 (레이더 시스템 설계 전공)
 2005년~현재 : (주)만도 책임연구원
 <관심분야> 레이더 시스템 설계, 레이더 신호처리

이 재 은 (Jaeun Lee)



2006년 8월 : 포항공과대학교
(POSTECH) 전자공학과 졸업
2008년 2월 : 포항공과대학교
(POSTECH) 전자공학과 석
사 졸업 (신호처리 전공)
2008년~현재 : (주)만도 선임연
구원

2013년~현재 : 서울대학교 전기 컴퓨터 공학부 박사
과정

<관심분야> 레이더 신호처리, 레이더 시스템 설계

김 영 록 (Younglok Kim)



1991년 2월 : 서강대학교 전자
공학과 졸업
1993년 2월 : New York Unive-
rsity 전기공학과 석사 졸업
1998년 2월 : New York Unive-
rsity 전기공학과 박사 졸업
1999년~2003년: Inter Digital

Comm. Corp., NY, USA 연구원

2003년~현재 서강대학교 전자공학과 교수

<관심분야> 레이더 신호처리, 무선통신, 신호처리