

## 정사영 망각인자와 LMF를 사용한 채널 추정기

임준석\*, 편용국°, 홍우영\*

## Channel Estimation Using Orthogonal Projected Forgetting Factor and LMF

Jun-Seok Lim\*, Yong-Guk Pyeon°, Woo-Young Hong\*

## 요약

LMF (least mean fourth) 알고리즘은 특히 비정규 잡음 상황에서 안정성 및 빠른 수렴성을 나타낼 뿐만 아니라 추정 오차도 낮은 것으로 잘 알려져 있다. 최근 LMS (least mean square) 알고리즘 분야에서는 다양한 환경에서 고정 스텝 크기 LMS보다 우수한 결과를 내는 가변 스텝 크기를 적용한 알고리즘들에 대한 관심이 증대되어 왔다. 본 논문에선 LMF에 대한 가변 스텝 크기의 한 방법으로 정사영 망각인자를 사용하여 스텝 크기를 가변하는 LMF 알고리즘을 제안한다. 본 논문은 제안한 방법의 우수성을 시불변 채널과 시변 채널 각각의 채널 환경 하에서 시뮬레이션을 통하여 보인다.

**Key Words** : Time delay estimation, Sparse signal processing, LASSO

## ABSTRACT

The least-mean fourth (LMF) algorithm is well known for its fast convergence and low steady-state error especially in non-Gaussian noise environments. Recently, there has been increasing interest in the LMS (least mean square) algorithms with an adjustable step size. It is because the adjustable step-size LMS algorithms have shown to outperform the conventional fixed step-size LMS in the various situations. In this paper, an adjustable step-size LMF algorithm is proposed, which utilizes an orthogonal projected forgetting factor, and simulation shows the superiority of the proposed algorithm in the time invariant and time variant channels.

## 1. 서론

음향 통신과 음향 신호처리에서 필터를 설계하여 잡음을 동반한 데이터로부터 유용한 정보를 추출하고 있다. 이를 위한 필터 최적화 문제를 푸는 해결책 중 하나가 1949에 발표된 Wiener 필터 설계 방법이다<sup>1)</sup>. 그러나, Wiener 필터 설계는 처리될 신호들이 정제 상태(stationary)이어야 하고 또한 이들 신호들의 통계적 특성을 충분히 이용할 수 있어야 한다. 더욱이 최

적 필터 계수를 구하기 위해 일명 Wiener-Hoffa 방정식이라고 불리는 많은 계산량을 필요로 하는 선형 행렬 방정식을 풀어야 한다<sup>1),2)</sup>. 그러나 적응 필터는 신호의 통계적 특성을 완전하게 알지 못하더라도 최적의 필터 계수에 근접할 수 있다. 즉, 적절하게 선택된 통계적 기준에 따라 계속해서 최적 필터 계수가 조정되고 입력 신호와 목표 신호 사이의 오차로부터 점차적으로 학습하면서 최적 필터에 근접해 간다. 이런 특징을 이용하고자 많은 연구자들이 적응 필터 방법 연

\* First Author : (ORCID:0000-0003-1779-3484)Sejong University Department of Electronic Engineering, jslim@sejong.ac.kr, 종신회원

° Corresponding Author : (ORCID:0000-0002-6680-6088)Gangwon Provincial University Department of Information and Communication, pyk12@naver.com, 정회원

\* (ORCID:0000-0002-9022-8425)Sejong University Department of Defense System Engineering, wyhong@sejong.ac.kr, 정회원  
논문번호 : KICS2018-04-075, Received April 3, 2018; Revised June 7, 2018; Accepted June 15, 2018

구에 관심을 집중하여 왔다. 현재 적응 알고리즘은 시스템 인식(system identification), 잡음 제거, 예코 상쇄, 채널 등화 등 다양한 분야에 응용되고 있다<sup>21</sup>. 디지털 적응 필터 시스템은 그림 1과 같은 블록 다이어그램으로 나타낼 수 있다. 즉 필터 출력은 입력 신호를 이용하여 목표 신호를 적응적으로 추정하는 문제로 생각할 수 있다.

그림 1로부터 오차 신호는 다음 식(1)과 같다.

$$e(k) = d(k) - y(k) = d(k) - \hat{\mathbf{w}}^T(k)\mathbf{x}(k), \quad (1)$$

여기에서  $\mathbf{x}(k)$ 는 입력신호  $x(k)$ 의 현재부터 N-1 번째까지 N개의 샘플을 사용한 벡터이고,  $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$ ,  $\hat{\mathbf{w}}(k)$ 은 차수가 N인 적응 디지털 필터 계수 벡터이며,  $\hat{\mathbf{w}}(k) = [\hat{w}_0(k), \hat{w}_1(k), \dots, \hat{w}_{N-1}(k)]^T$ , T는 전치 행렬 (transpose) 을 나타낸다. 그 외에 부가 잡음  $n(k)$ 는 입력에 통계적으로 독립이고, 평균 '0'을 중심으로 대칭 분포를 이룬다고 가정한다.

그림 1과 같은 구조의 적응 필터를 구하는 방법들 중에 하나인 최소평균자승 (Least Mean Square: LMS) 알고리즘은 실제 값과 추정 값 사이의 오차의 에너지 평균,  $E(e(k)^2)$ ,를 최소화 하는 변수를 추정한다. 또 다른 방법으로는 오차의 네 제곱, 즉  $E(e(k)^4)$ ,를 최소화 하는 경우도 있다<sup>31</sup>. 이를 최소평균자승 (Least Mean Fourth: LMF) 알고리즘이라고 한다<sup>31</sup>. LMS 와 LMF 모두 최소화하는 변수를 얻기 위해서 급경사법 (steepest descent)을 사용한다. 알려진 바와 같이 급경사법을 위해서는 추정 변수 값을 갱신하는 속도를 조절하기 위해서 스텝 크기를 사용한다.

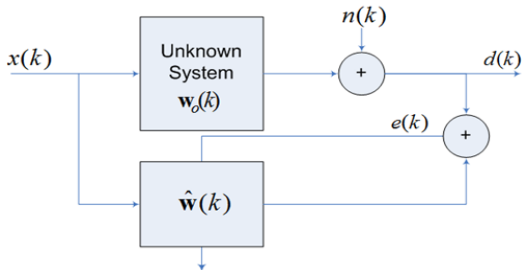


그림 1. 적응 필터 시스템의 구조  
Fig. 1. Structure of adaptive filtering system.

LMF는 측정 신호가 비정규 분포 부가 잡음에 노출 되었을 때 LMS 방법보다 우수하다고 알려져 있다. 특히 수렴 후 결과를 보면 LMF가 LMS보다 더 정확한 추정 결과를 생산한다<sup>41</sup>. 그리고 LMS와 마찬가지로 LMF 알고리즘의 수렴 속도와 오차 성능이 스텝의 크기에 따라서 달라진다고 알려져 있다<sup>21</sup>. 즉, 빠른 수렴 속도를 위해서는 큰 크기의 스텝이 필요하나 정확도가 떨어지고, 정확도 향상을 위해서 작은 크기의 스텝을 택한 경우 수렴 속도가 떨어진다<sup>21</sup>. 그러나 수렴 속도와 정확도 둘 다를 모두 만족하는 하나의 스텝 크기를 고정적으로 정하는 것은 불가능하다. 이와 관련하여 스텝 크기를 상황에 따라 변화 시켜서 수렴 성능 향상을 꾀하는 가변 스텝 크기 알고리즘이 LMS 알고리즘과 관련하여 많은 결과가 발표되었다<sup>15-81</sup>. 그러나 이에 반하여 LMF 분야에서는 가변 스텝 크기에 관한 연구가 상대적으로 적다<sup>91</sup>.

본 논문에서는 고정 크기 스텝을 사용하는 NLMF의 수렴성을 향상 시키는 방법을 제안한다. 그 방법의 하나로 기울기 벡터의 직교 정사영을 사용한 가변 망각인자를 적용한 알고리즘을 제안한다. 이 방법은 Kwong 등에 의해서 발표된 직교 기울기 적응 (OGA, orthogonal gradient adaptive)필터 방법에 소개된 직교 정사영 가변 망각인자를 LMF에 적용한 것이다<sup>61</sup>. 제안된 알고리즘의 성능을 보이기 위해서 기존 LMF 알고리즘과 함께 시불변 시스템과 시변 시스템에 대한 시스템 인식 실험을 하고 그 수렴 성능을 비교한다.

## II. LMF

본 장에서는 LMF 알고리즘을 요약한다. LMF는 오차의 네 제곱 즉  $E(e(k)^4)$ 를 최소화 하는 하는 것이라고 서론에서 기술한 바 있다. 단 LMF에서는 오차의 네 제곱 값의 평균  $E(e(k)^4)$ 을 사용하는 대신, 오차의 네 제곱 순시값  $e(k)^4$ 를 사용한다. 좀 더 구체적 말하면 다음과 같다<sup>2,31</sup>.

그림 1에서와 같이  $\hat{\mathbf{w}}^T(k) = [\hat{w}_0(k), \hat{w}_1(k), \dots, \hat{w}_{N-1}(k)]$ 과  $\mathbf{w}_o^T(k) = [w_0(k), w_1(k), \dots, w_{N-1}(k)]$ 를 각각 추정 시스템 계수 벡터와 참 시스템 계수 벡터라고 하자. 시간 k에서 순시 오차는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned}
 e(k) &= d(k) - \hat{\mathbf{w}}^T(k)\mathbf{x}(k) \\
 &= \mathbf{w}_o^T(k)\mathbf{x}(k) + n(k) - \hat{\mathbf{w}}^T(k)\mathbf{x}(k), \quad (2) \\
 &= n(k) - \mathbf{c}^T(k)\mathbf{x}(k),
 \end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{c}(k) = \hat{\mathbf{w}}(k) - \mathbf{w}_o(k)$ . 순시 오차  $e(k)$ 의 4제곱 한 후  $\hat{\mathbf{w}}(k)$ 에 대한 미분을 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\nabla(e(k)^4) = -4e^3(k)\mathbf{x}(k). \quad (3)$$

위 순시 미분 값을 사용 하여 다음과 같은 추정 시스템 계수 갱신 식이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{w}}(k+1) &= \hat{\mathbf{w}}(k) - \hat{\mu} \nabla(e^4(k)) \\
 &= \hat{\mathbf{w}}(k) + \hat{\mu} 4e^3(k)\mathbf{x}(k), \quad (4) \\
 &= \hat{\mathbf{w}}(k) + \mu e^3(k)\mathbf{x}(k),
 \end{aligned}$$

여기서  $\mu$ 는 스텝 크기다.

### III. 기울기 벡터의 직교 정사영을 사용한 가변 망각인자

#### 3.1 가변 망각인자 유도

위 식 (3)과 같은 순시 오차 기울기를 직접 사용하는 대신 과거의 오차 기울기와 현재 순시 기울기 및 망각인자,  $\lambda_n$ ,를 사용한 축차 방정식을 만들 수 있다. 이 방정식으로부터 일종의 이동 평균값을 구하는 효과를 얻을 수 있다. 그 의미는 각 순간 마다 일종의 평균 오차 기울기를 구하는 것과 같다.

$$\mathbf{p}(n) = -\frac{\partial J(n)}{\partial \mathbf{w}^*} = \lambda_n \mathbf{p}(n-1) + \mathbf{g}(n), \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{g}(k) = e^3(k)\mathbf{x}(k)$  이다.  $\mathbf{p}(n)$ 이 이전의  $\mathbf{p}(n-1)$ 과 직교인 관계를 늘 유지하기 위해서 식(6)에서와 같은 관계식을 만족하도록 한다.

위 식 (6)을 망각인자에 대해서 풀면 다음과 같은 가변 망각인자를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^H(n)\mathbf{p}(n-1) \\
 = \lambda_n \mathbf{p}^H(n-1)\mathbf{p}(n-1) + \mathbf{g}^H(n)\mathbf{p}(n-1) = 0 \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_n &= -\mathbf{g}^H(n)\mathbf{p}(n-1) / \mathbf{p}^H(n-1)\mathbf{p}(n-1) \\
 &= -\mathbf{g}^H(n)\mathbf{p}(n-1) / \|\mathbf{p}(n-1)\|^2 \quad (7)
 \end{aligned}$$

위에 사용한 계산법이 벡터간 직교 정사영을 구하는 것과 유사하여 직교 정사영 망각인자라고 하기로 한다. 이 가변 망각인자를 사용하면 평균 오차 기울기를 계산하되 상황에 따라 그 평균을 취하는 기간 길이를 변화시킬 수 없어서 적응 필터의 수렴 상황에 맞는 평균 오차 기울기를 계산할 수 있다.

#### 3.2 기울기 벡터의 직교 정사영을 사용한 LMF

위 식 (6)과 식(7)을 이용하여 식(4)를 다시 쓰면 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) + \mu \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}^*}, \quad (8) \\
 &= \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{p}(n)
 \end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{p}(n) = \lambda_n \mathbf{p}(n-1) + \mathbf{g}(n)$ , 이고

$\mathbf{g}(n) = \mathbf{x}(n)y^*(n)(|y(n)|^2 - R_2)^*$ , 이고

$\lambda_n = -\mathbf{g}^H(n)\mathbf{p}(n-1) / \|\mathbf{p}(n-1)\|^2$ 이다. 실제 적응 필터를 운영할 때에 좀 더 안정적인 수렴 성능을 얻기 위해서는 순시 기울기를 직접 사용하지 않고 순시 기울기의 방향만을 사용하는 것이 좋은 경우가 많이 있다. 이를 위하여 순시기울기를 정규화 시키는 과정을 추가할 수도 있다.

### IV. 시뮬레이션

본 장에서는 시뮬레이션을 통해서 제안한 알고리즘의 수렴 성능을 알아본다. 이를 위해서 시간에 상관없이 특성이 일정한 시불변 시스템에 대해서 일반 LMF와 3장에서 제안한 직교 정사영 망각인자 LMF간의 수렴 성능을 비교한다. 그리고 실험 중간에 채널이 갑자기 바뀌는 시변 시스템에 대해서 각각 수렴 성능을 비교한다.

#### 4.1 시불변 시스템에서 수렴 성능 비교

제안된 알고리즘의 일반적인 수렴 성능을 보이기 위해서 시불변 시스템 환경하에서 수렴 실험을 하였다. 실험에 사용된 환경을 구체적으로 기술하면, 시스템의 임펄스 응답은 유사한 실험이 실된 논문에서 사용한 채널 응답  $\mathbf{w}_o = [-0.3, -0.9, 0.8, -0.7, 0.6]$ 을 사

용하였다<sup>10)</sup>. 그리고 시불변 채널 상에서 제안된 알고리즘과 전통적인 고정 스텝 크기 LMF의 수렴 성능을 각각 비교하였다. 이 때 사용한 고정 스텝 크기 값은 0.01, 0.05 및 0.1로 설정하였다. 본 스텝 크기 값은 반복 실험을 통해서 발산 없이 수렴 속도가 가장 빠른 때의 스텝 크기 값과 가장 수렴 오차가 적은 때의 스텝 크기 값 및 그 중간 값으로 정하였다.

그림 2을 보면 제안한 직교 정사영 망각인자 LMF와 세 개의 서로 다른 고정 스텝 크기 사용하는 LMF를 서로 비교하였다. 결과로부터 고정 스텝 크기 LMF의 경우 작은 크기 스텝을 사용할 때는 MSE(Mean Square Error)가 작으나 수렴 속도가 느리고, 큰 스텝 크기를 사용할 경우 수렴 속도가 빠르나 MSE가 큰 것을 알 수 있다. 그림 2를 통해서 고정 스텝 크기 ( $\mu=0.1$ )를 사용하는 LMF는 수렴 속도가 가장 빠른 반면 MSE는 가장 크다. 반면에 고정 스텝 크기 ( $\mu=0.01$ )인 경우는 수렴 속도가 가장 느린 반면 MSE는 가장 작다. 제안된 알고리즘과 비슷한 MSE를 보이는 고정 스텝 크기의 경우와 비교하여 표 1에 요약하였다. 그림 2와 표 1로부터 제안한 직교 정사영 망각인자 LMF의 성능은 제안한 직교 정사영 망각인자 LMF의 고정 스텝 크기를 상황에 맞게 보정하여 수렴 초기에는 빨리 수렴하고 충분히 수렴 후에는 작은 오차를 유지함을 알 수 있다.

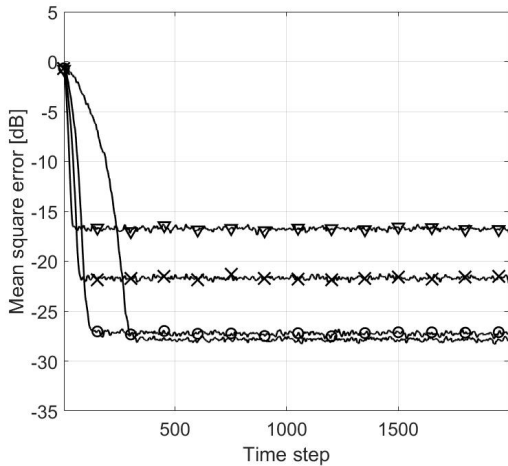


그림 2. 시불변 채널에서 수렴 성능 비교 (실선:  $\mu=0.01$ 인 LMF, -x-:  $\mu=0.05$ 인 LMF, -v-:  $\mu=0.1$ 인 LMF, -o-: 제안한 알고리즘).  
Fig. 2. Convergence performance comparison in the time invariant channel (solid line: LMF with  $\mu=0.01$ , -x-: LMF with  $\mu=0.05$ , -v-: LMF with  $\mu=0.1$ , -o-: proposed algorithm).

표 1. 시불변 채널 경우 수렴 성능 요약 비교  
Table 1. Performance comparison for time invariant channel case.

	수렴 시점 [시간 샘플]	MSE [dB]
제안된 알고리즘	150	-27.2
고정 스텝 크기 ( $\mu=0.1$ ) 알고리즘	60	-16.5
고정 스텝 크기 ( $\mu=0.05$ ) 알고리즘	80	-21.5
고정 스텝 크기 ( $\mu=0.01$ ) 알고리즘	300	-27.7

#### 4.2 급격하게 변하는 시변 시스템에서 수렴 성능 비교

제안된 알고리즘의 성능을 보기 위한 또 다른 경우로써 급격히 변하는 시변 시스템 환경하에서 수렴 실험을 하였다.

실험에 사용된 환경을 구체적으로 기술하면, 처음부터 2000번 샘플까지는 시스템의 임펄스 응답이  $w_{o1} = [-0.3, -0.9, 0.8, -0.7, 0.6]$  이다가 2001번 샘플부터 임펄스 응답이  $w_{o2} = [0.6, -0.7, 0.8, -0.9, -0.3]$  로 갑자기 변하는 시변 채널 상에서 제안된 알고리즘과 전통적인 고정 스텝 크기 LMF의 수렴 성능을 각각 비교하였다. 2001번째에 변화시킨 이유는 한 채널을 충분히 수렴 후 새로운 채널로 변화시키려고 4.1절에서 한 실험을 참고하였다. 이 실험에서도 고정 스텝

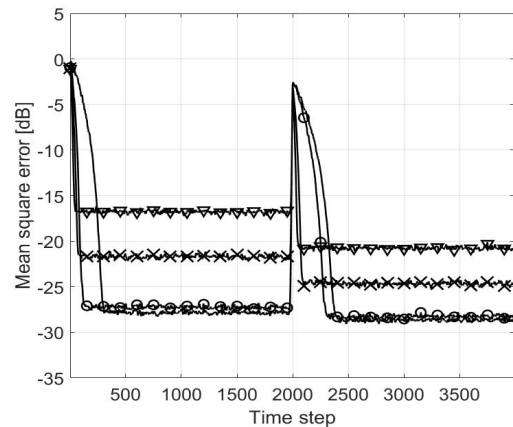


그림 3. 급변 채널에서 수렴 성능 비교 (실선:  $\mu=0.01$ 인 LMF, -x-:  $\mu=0.05$ 인 LMF, -v-:  $\mu=0.1$ 인 LMF, -o-: 제안한 알고리즘).  
Fig. 3. Convergence performance comparison in the abruptly-changing channel (solid line: LMF with  $\mu=0.01$ , -x-: LMF with  $\mu=0.05$ , -v-: LMF with  $\mu=0.1$ , -o-: proposed algorithm).

크기 값은 0.01, 0.05 및 0.1로 설정하였다.

그림 3으로부터 제안된 알고리즘과 비슷한 MSE를 보이는 고정 스텝 크기의 경우와 비교하여 표2에 요약하였다. 그림 3과 표 2로부터 제안한 직교 정사영 망각인자 LMF가 한번 수렴이 되어 시불변 특성을 유지하다 갑자기 채널이 변하는 경우에도 변화는 상황에 맞춰서 채널 추정기 전체를 신속하게 적응하고 있는 것을 알 수 있다.

표 2. 급하게 변하는 시변 채널 경우 수렴 성능 요약 비교  
Table 2. Performance comparison for abrupt time varying channel case.

		수렴 시점 [시간 샘플]	MSE [dB]
첫 번째 수렴	제안된 알고리즘	150	-27.2
	고정 스텝 크기 ( $\mu=0.01$ ) 알고리즘	300	-27.7
두 번째 수렴	제안된 알고리즘	2300	-28.2
	고정 스텝 크기 ( $\mu=0.01$ ) 알고리즘	2420	-28.7

### V. 결 론

본 논문에선 고정 스텝 LMF의 수렴 성능을 향상시키기 위한 한 방법으로 직교 정사영 망각인자 LMF를 제안하였다. 제안한 방법은 순시 오차 기울기 대신 가변 망각인자를 도입한 이동 평균 오차 기울기를 사용하도록 하였다. 이를 통해서 수렴 상태에 따라 알맞은 평균값을 제공하여 수렴 시간은 유사한 수렴 성능을 갖는 고정 스텝을 사용하는 경우에 비해 많게는 50%에서 적게는 30% 정도 향상시키고 MSE도 고정 스텝을 사용한 경우의 최소 MSE에 대해 약 1dB 내외로 유사한 효과를 얻었다.

### References

[1] N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing Time Series with Engineering Application*, MIT Press, Boston, 1949.  
 [2] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*, IEEE Press, Wiley-Interscience, New York, 2008.  
 [3] E. Walach and B. Widrow, "The least mean

fourth (LMF) adaptive algorithm and its family," *IEEE Trans. IT*, vol. 30, no. 2, pp. 275-283, Feb. 1984.

[4] P. I. Hubscher and J. C. Bermudez, "An improved statistical analysis of the least mean fourth (LMF) adaptive algorithm," *IEEE Trans. SP*, vol. 51, no. 3, pp. 664-671, Mar. 2003.  
 [5] B. Farhang-Boroujeny, "Variable-step-size LMS algorithm: New developments and experiments," *IEE Proc. Vis. Image Sign. Process.*, vol. 141, no. 5, pp. 311-317, May 1994.  
 [6] R. H. Kwong and E. W. Johnston, "A variable step size LMS algorithm," *IEEE Trans. SP*, vol. 40, no. 7, pp. 1633-1642, Jul. 1992.  
 [7] J. S. Lim, "A constant modulus algorithm based on an orthogonal projection," (in Korean) *J. Acoust. Soc. Kr.*, vol. 28, no. 7, pp. 640-645, Jul. 2009.  
 [8] J. S. Lim and Y. K. Pyeon, "A variable step sized constant modulus algorithm based on an averaged gradient," *J. KICS*, vol. 35, no. 4, pp. 79-82, 2010.  
 [9] S. M. Asad, A. Zerguine, and M. Moinuddin, "On the convergence analysis of a variable step-size LMF algorithm of the quotient form," in *Proc. ICASSP 2010*, pp. 3722-3725, Dallas, Texas, USA, Mar. 2010.  
 [10] J. S. Lim, "An algebraic step size least mean fourth algorithm for acoustic communication channel estimation," (in Korean) *J. Acoust. Soc. Kr.*, vol. 35, no. 1, pp. 55-62, Jan. 2016.

### 임 준 석 (Jun-Seok Lim)



1986년 2월 : 서울대학교 전자공학과 학사 졸업  
 1988년 2월 : 서울대학교 전자공학과 석사 졸업  
 1996년 8월 : 서울대학교 전자공학과 박사 졸업  
 1996년 7월~1997년 10월 : LG 종합기술원

1998년 3월~현재 : 세종대학교 전자정보통신공학과 교수  
 <관심분야> 신호처리

**편 용 국 (Yong-Guk Pyeon)**



1993년 2월 : 강원대학교 전자  
공학과 학사 졸업  
1996년 2월 : 관동대학교 전자  
공학과 석사 졸업  
2004년 2월 : 세종대학교 전자  
공학과 박사 졸업  
2004년 9월~현재 : 강원도립대  
학 정보통신과 조교수

<관심 분야> 신호 처리

**홍 우 용 (Woo-Young Hong)**



1978년 2월 : 해군사관학교 전자  
공학과 학사 졸업.  
1985년 2월 : 연세대학교 전자공  
학과 석사 졸업.  
1991년 10월 : Univ. of Minne-  
sota 전기공학과 박사 졸업.  
1985년 3월~2013년 2월 : 해군  
사관학교 교수

2013년 3월~현재 : 세종대학교 국방시스템공학과 교수  
<관심분야> 신호처리