

토플리츠 행렬 특성을 활용한 아토믹 노름 최소화 기반 초분해능 방향탐지

정 현 진*, 박 영 미*, 김 선 우°

Atomic Norm Minimization-Based Super-Resolution DoA Estimation Using Property of Toeplitz Matrix

Hyeonjin Chung*, Young Mi Park*,
Sunwoo Kim°

요 약

기존 방향탐지 알고리즘들은 신호 스냅샷이 충분하지 않은 상황에서 사용이 불가하거나 분해능이 떨어지는 단점이 존재한다. 본 논문에서는 적은 개수의 신호 스냅샷이 주어진 상황에서 높은 분해능을 달성 가능한 아토믹 노름 최소화 기반 방향탐지 알고리즘을 제안한다.

Key Words : direction-of-arrival (DoA) estimation, atomic norm minimization, super-resolution, Toeplitz matrix

ABSTRACT

Traditional direction-of-arrival (DoA) estimation algorithms fail or have low resolution when few signal snapshots are given. In this paper, we propose a novel DoA estimation algorithm via atomic norm minimization, which can achieve super-resolution by using few signal snapshots.

I. 서 론

방향탐지는 주로 항재밍 배열안테나 시스템, 레이더 등에 주로 사용되며 이동 통신에서의 배열 안테나 사용이 일반화됨에 따라 방향탐지의 민간 분야 적용 또한 확대되고 있다^{1,2}. 하지만 무선 통신 기술이 발전함에 따라 신호원의 개수가 많아져 신호원이 서로 인접한 상황이 더욱 빈번해졌는데, 이때 신호원의 방향을 성공적으로 탐지하기 위해서는 높은 분해능이 요구된다.

대표적인 초분해능 방향탐지 알고리즘으로 MUSIC (multiple signal classification)³ 등이 있으나 이들은 신호 스냅샷이 충분하지 않아 공분산 행렬을 추정하지 못할 경우 방향탐지가 불가능하다. 이후 제안된 압축센싱 기반 방향탐지는 스냅샷이 적은 상황에서 방향탐지가 가능하다는 장점이 있으나 MUSIC에 비해 분해능이 낮다는 단점이 있다^{4,5}.

최근 아토믹 노름이 제안된 이후 이를 초분해능 방향탐지, 이미징, 분광법 등에 응용하는 연구가 진행되었다⁶⁻⁸. 본 논문에서 제안하는 알고리즘은 적은 개수의 신호 스냅샷이 주어진 상황에서 아토믹 노름 최소화를 통해 도출한 토플리츠 행렬이 공분산 행렬과 동일한 구조를 가진다는 점에서 착안한다. 아토믹 노름 최소화를 통해 토플리츠 행렬을 도출한 이후, 공분산 행렬 대신 토플리츠 행렬을 사용하여 MUSIC과 같이 공분산 행렬을 필요로 하는 초분해능 방향탐지 알고리즘을 적용한다. 적은 개수의 신호 스냅샷이 주어진 환경에서 제안 알고리즘과 기존 알고리즘 간의 다방면 성능 비교를 위해 분해능, 추정 정확도, 복잡도 분석을 진행한다.

II. 토플리츠 행렬 특성을 활용한 아토믹 노름 최소화 기반 초분해능 방향탐지

배열을 구성하는 안테나의 개수는 총 M 개, 배열에 입사하는 신호원의 개수는 P 개이며, P 개 신호원들의 도래각을 벡터 $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_P]^T$ 으로 정의한다. 인접한 안테나 간 간격이 반파장인 등간격 선형 배열

* 이 연구는 방위사업청 및 국방과학연구소의 재원에 의해 설립된 신호정보 특화연구센터 사업의 지원을 받아 수행되었음.

• First Author : (ORCID:0000-0001-6681-6334)Hanyang University Department of Electronics and Computer Engineering, hyeonjingoo@hanyang.ac.kr, 학생(석사), 정회원

° Corresponding Author : (ORCID:0000-0002-7055-6587)Hanyang University Department of Electronics and Computer Engineering, remero@hanyang.ac.kr, 정교수, 중신회원

* Agency for Defense Development Electronic Warfare PMO, ympark@add.re.kr, 연구원

논문번호 : 202006-121-A-LU, Received June 5, 2020; Revised July 6, 2020; Accepted July 8, 2020

을 구성할 시, 도래각이 θ 일 때의 조향벡터 $\mathbf{a}(\theta)$ 는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{j\pi\cos\theta}, \dots, e^{j\pi(M-1)\cos\theta}]^T. \quad (1)$$

P 개의 도래각에 대한 조향벡터로 구성된 조향행렬 $\mathbf{A}(\Theta)$ 는 식 (2)와 같다.

$$\mathbf{A}(\Theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_p)] \in C^{M \times P}. \quad (2)$$

이 때, 배열로 수신한 신호 \mathbf{X} 는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{N} = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{S} + \mathbf{N} \in C^{M \times D}, \quad (3)$$

여기서 D 는 수신 신호의 스냅샷 개수를 의미한다. $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_p]^T$ 이며 $\mathbf{s}_p \in C^{D \times 1}$ 은 p 번째 신호원의 신호 벡터를 의미한다. \mathbf{N} 은 잡음이며 \mathbf{N} 의 각 열은 circularly symmetric 복소 정규 분포 $CN(\mathbf{0}_M, \sigma^2 \mathbf{I}_M)$ 를 따른다. 여기서 $\mathbf{0}_M$ 은 크기 $M \times 1$ 의 영벡터, \mathbf{I}_M 는 크기 $M \times M$ 의 단위 행렬을 의미한다. $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{S}$ 이며 잡음이 없을 시 \mathbf{X} 와 동일하다.

아토믹 노름은 수신 신호가 여러 atom들의 선형 조합으로 구성되었을 시, 수신 신호 구성에 사용된 atom들을 구하기 위해 고안되었으며 무한한 atom들의 집합인 atomic set의 볼록 껍질로부터 정의된다. $\hat{\mathbf{X}}$ 의 atomic set, $\hat{\mathbb{A}}$ 는 식 (4)와 같다.

$$\hat{\mathbb{A}} = \{\mathbf{a}(\theta)\mathbf{b}^T : 0 < \theta \leq \pi, \|\mathbf{b}\|_2 = 1\}, \quad (4)$$

여기서 \mathbf{b} 는 크기 $D \times 1$ 의 복소 벡터이며 $\mathbf{a}(\theta)\mathbf{b}^T$ 은 $\hat{\mathbf{X}}$ 를 구성하는 atom이다. $\hat{\mathbf{X}}$ 의 아토믹 노름, $\|\hat{\mathbf{X}}\|_{\hat{\mathbb{A}}}$ 의 정의는 식 (5)와 같다⁶⁾.

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{X}}\|_{\hat{\mathbb{A}}} &= \inf\{t > 0 : \hat{\mathbf{X}} \in t \text{conv}(\hat{\mathbb{A}})\} \\ &= \inf\left\{\sum_{l=1}^L c_l : \hat{\mathbf{X}} = \sum_{l=1}^L c_l \mathbf{a}(\theta_l) \mathbf{b}_l^T, c_l > 0\right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\inf(\cdot)$ 는 집합의 하한, $\text{conv}(\cdot)$ 는 집합의 볼록 껍질을 의미하며 $\mathbf{a}(\theta_l)\mathbf{b}_l^T$ 은 l 번째 atom, c_l 은 l 번째 atom의 계수를 의미한다. 하지만 수식 (5)는 최적화를 이용해 풀 수 있는 형태가 아니기에

$\|\hat{\mathbf{X}}\|_{\hat{\mathbb{A}}}$ 를 수식 (6)과 같이 SDP (semidefinite programming) 꼴로 표현한다⁶⁾.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, \mathbf{T}} & \left\{ \frac{1}{2M} \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u})) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}) \right\}, \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{X}}^H & \mathbf{T} \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\text{Tr}(\cdot)$ 은 행렬 대각 성분들의 합, $\text{Toep}(\mathbf{u})$ 는 첫 번째 열이 \mathbf{u} 인 에르미트 토폴리츠 행렬을 의미한다. 또한 행렬에서의 $(\cdot) \geq 0$ 은 해당 행렬이 양의 준정부호 행렬임을 의미한다.

하지만 실제 수신하는 신호는 $\hat{\mathbf{X}}$ 가 아닌 잡음이 더해진 신호 \mathbf{X} 이다. 따라서 잡음에 대한 고려가 없는 수식 (6) 대신 수식 (7)을 이용한다⁶⁾.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, \mathbf{T}, \mathbf{Y}} & \left\{ \frac{1}{2M} \text{Tr}(\text{Toep}(\mathbf{u})) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}) \right\}, \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^H & \mathbf{T} \end{bmatrix} \geq 0, \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|_F^2 \leq \eta, \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\|\cdot\|_F$ 은 행렬의 프로베니우스 노름이다. η 는 잡음을 보상하기 위한 정규화 파라미터이며 일반적으로 $\eta = (MD + 2\sqrt{MD})\sigma^2$ 이다⁶⁾. 수식 (7)에서 도출된 \mathbf{u} 의 최적해를 \mathbf{u}^* 라고 할 때, $\text{Toep}(\mathbf{u}^*)$ 는 수식 (8)과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Toep}(\mathbf{u}^*) \approx \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{C}\mathbf{A}(\Theta)^H \in C^{M \times M}, \quad (8)$$

여기서 \mathbf{C} 는 각 대각성분이 양수인 대각행렬이다. $\text{Toep}(\mathbf{u}^*)$ 는 공분산 행렬과 흡사한 구조를 가지는데, 신호원이 서로 모두 uncorrelated 할 때 공분산 행렬 \mathbf{R} 은 수식 (9)와 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\Theta)\mathbf{F}\mathbf{A}(\Theta)^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M \in C^{M \times M}, \quad (9)$$

여기서 대각행렬 \mathbf{F} 의 p 번째 대각성분은 p 번째 신호의 세기, $E[\mathbf{s}_p^H \mathbf{s}_p]$ 와 같다. \mathbf{R} 은 D 가 충분히 클 시 $\mathbf{X}\mathbf{X}^H/D$ 로서 근사할 수 있지만 본 논문에서는 적은 신호 스냅샷만이 주어진다고 가정하여 \mathbf{R} 을 구할 수 없다. 잡음의 영향으로 발생하는 $\sigma^2 \mathbf{I}_M$ 를 제외하면 $\text{Toep}(\mathbf{u}^*)$ 와 \mathbf{R} 의 구조는 동일하기에 \mathbf{R} 대신 $\text{Toep}(\mathbf{u}^*)$ 를 이용해 MUSIC과 같이 공분산 행렬을 필요로 하는 초분해능 방향탐지 알고리즘을 적용할

수 있다.

방향탐지 스펙트럼 $f(\theta)$ 는 수식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(\theta) = \frac{1}{\|\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{Q}(P+1:M)\|_2^2}, \quad 0 < \theta \leq \pi, \quad (10)$$

여기서 $\mathbf{Q} \in C^{M \times M}$ 는 각 열이 $\text{Toep}(\mathbf{u}^*)$ 의 고유 벡터인 행렬이며 $\mathbf{Q}(P+1:M)$ 는 \mathbf{Q} 의 $P+1$ 번째 열부터 M 번째 열까지의 연속적인 $M-P$ 개의 열로 구성된 행렬이다. $f(\theta)$ 는 0 과 π 사이 구간에서 H 개로 분할된 이산적인 스펙트럼이며 θ 는 $f(\theta)$ 에서 P 개의 극대점을 찾음으로써 추정할 수 있다.

III. 실험 결과 및 분석

분해능 및 추정 정확도 비교를 위해 CBF (conventional beamforming), BP (basis pursuit) 기반 방향탐지^[4], S-OMP (simultaneous orthogonal matching pursuit) 기반 방향탐지^[5]를 제안 알고리즘과 비교하였다. BP 및 S-OMP와 같은 압축센싱 기반 방향탐지 알고리즘에서 사용되는 이산 그리드의 크기 G 는 360이다. SNR (signal-to-noise ratio)은 식 (11)과 같이 정의하였다.

$$\text{SNR [dB]} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{s}_p^H \mathbf{s}_p}{\sigma^2 P} \right). \quad (11)$$

실험에서 $M=10$, 방향탐지 스펙트럼 분할 수 $H=1800$, SNR이 10 dB이고 모든 신호원의 세기가 같으며 RMSE (root mean square error) 계산을 위해 총 200 번의 반복이 사용되었다.

알고리즘 간 분해능 비교를 위해 $D=10$ 일 때 그림 1과 같이 두 도래각간의 차이를 변화시켜가며 RMSE를 산출하였다. 분해능이 높은 알고리즘은 서로 인접한 두 도래각을 성공적으로 추정할 수 있는데, 실험 결과 제안 알고리즘이 타 알고리즘에 비해 두 신호원이 매우 인접한 상황에서도 높은 추정 정확도를 가지는 것을 확인하였다.

스냅샷 개수에 따른 RMSE를 그림 2와 같이 비교하였다. 이 때, $P=3$ 이며 각 신호원의 도래각은 서로 30° 이상 이격하였다. 실험결과 5개 이하의 스냅샷을 사용할 시 제안 알고리즘과 S-OMP 기반 알고리즘

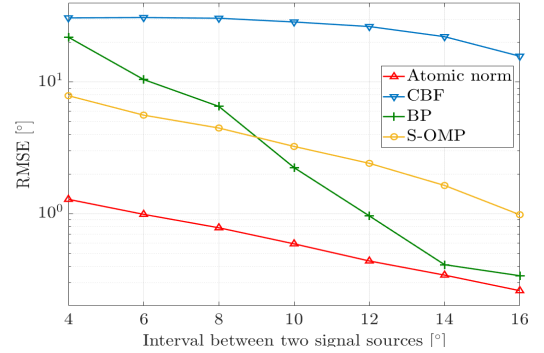


그림 1. 두 도래각 차이에 따른 RMSE 비교
Fig. 1. RMSE versus the difference between two DoAs

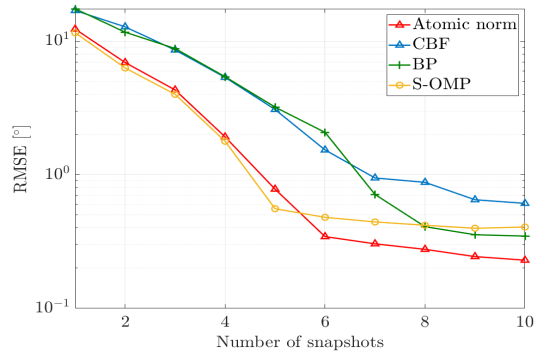


그림 2. 스냅샷 개수에 따른 RMSE 비교
Fig. 2. RMSE versus the number of snapshots

의 정확도가 타 알고리즘에 비해 높았으며, 이후 6개 이상의 스냅샷을 사용할 때 제안 알고리즘의 정확도가 가장 높은 것을 확인하였다.

표 1은 알고리즘 별 복잡도 및 평균 실행시간을 나타내며 실행 시간은 $D=10$, $P=3$ 일 때 Intel CPU i5-7500 (3.40 GHz), 16 GB RAM으로 측정하였다. 제안 알고리즘의 복잡도는 SDP 복잡도 분석 사례^[9]를 참조하였으며 BP 및 S-OMP의 복잡도는 압축센싱 기법의 복잡도 분석 사례^[10]를 참조하였다. P, M, D, G, H 의 대소 관계와 평균 실행시간을 종합적으로 고려하였을 때, 제안 알고리즘과 BP의 복잡도가 타 알고리

표 1. 알고리즘 별 복잡도 및 평균 실행시간
Table 1. The complexity and the average computation time of all algorithms

알고리즘	복잡도	실행시간
제안 알고리즘	$O((M+D)^{3.5})$	1.6 초
CBF	MHD	0.066 초
BP	$O(G^3)$	2.3 초
S-OMP	$O(PMG)$	0.014 초

증에 비해 높은 것을 확인하였다.

IV. 결 론

본 논문에서는 스냅샷 개수가 적게 주어진 상황에서 높은 분해능을 가지는 아토믹 노름 최소화 기반 방향탐지를 제안하였다. 이후 실험을 통해 제안 알고리즘과 기존 알고리즘 간의 분해능 및 스냅샷 개수에 따른 정확도를 비교하고 복잡도 분석을 진행하였다. 실험 결과 제안 알고리즘이 높은 복잡도를 가지는 대신 타 알고리즘에 비해 분해능이 높으며 적은 스냅샷을 사용함에도 높은 추정 정확도를 가지는 것을 확인하였다.

References

- [1] K. Kang, C. Sin, and S. Kim, "Mutual coupling compensation and direction finding for anti-jamming 3D GPS antenna array," *J. KICS*, vol. 42, no. 4, pp. 723-730, Apr. 2017.
- [2] Y. H. Yun, Y. O. Park, and H. R. Park, "A comparative performance analysis of high resolution direction finding algorithms in wideband mobile environments," *J. KICS*, vol. 31, no. 8, pp. 752-759, Aug. 2006.
- [3] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Ant. Propag.*, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.
- [4] D. Malioutov, M. Cetin, and A. S. Willsky, "A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 8, pp. 3010-3022, Aug. 2005.
- [5] J. A. Tropp, A. C. Gilbert, and M. J. Strauss, "Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part I: Greedy pursuit," *Signal Process.*, vol. 86, no. 3, pp. 572-588, Mar. 2006.
- [6] Y. Chi and M. Ferreira Da Costa, "Harnessing sparsity over the continuum: atomic norm minimization for superresolution," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 37, no. 2, pp. 39-57, Mar. 2020.
- [7] Z. Wei, W. Wang, F. Dong, and Q. Liu, "Gridless one-bit direction-of-arrival estimation via atomic norm denoising," *IEEE Commun. Lett.*, Early Access, Jun. 2020.
- [8] W. Tang, H. Jiang, and S. Pang, "Grid-free DOD and DOA estimation for MIMO radar via duality-based 2D atomic norm minimization," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 60827-60836, May 2019.
- [9] I. Pólik and T. Terlaky, "Interior point methods for nonlinear optimization," in *Nonlinear Optimization* (G. Di Pillo and F. Schoen, eds.), pp. 215-276, Berlin, Heidelberg: Springer, 2010.
- [10] J. Wang, S. Kwon, and B. Shim, "Generalized orthogonal matching pursuit," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 12, pp. 6202-6216, Dec. 2012.