

마할라노비스 거리를 이용한 파티클 필터의 개선 방법

박정훈*, 임완수*, 양연모^o

On the Improved Particle Filter by Mahalanobis Distance Consideration

Jeong-hun Park*, Wansu Lim*, Yeon-Mo Yang^o

요약

파티클 필터는 칼만필터의 한 종류로 비선형 데이터, 논가우시안 잡음이 있는 실제 환경에서도 잘 작용하는 상태 추정 알고리즘이다. 마할라노비스 거리는 공간상에서 거리를 측정하는 유클리디안 거리와 달리, 확률 분포상에서의 평균과의 거리를 측정하는 방법이다. 본 논문에서는 기존 파티클 필터와 제안하는 마할라노비스 파티클 필터에 대해 비선형 낙하 모델에서의 시뮬레이션을 수행하고, 각 방법의 예측값과 실제값의 RMS오차를 비교해 성능을 비교 및 검증하였다.

Key Words : Particle Filter, Mahalanobis Distance, Non-linear Modeling, Covariance Estimation and Prediction, Statistical Signal Processing

ABSTRACT

In this paper, Enhanced Particle Filter by Mahalanobis distance consideration is proposed. Particle filter, one of Kalman Filter, is state estimation algorithm that works well in practical environments with non-linear data and non-gaussian noise. Mahalanobis distance measures the distance on a probability distribution, unlike Euclidean distance, which measures distance in dimensional space. Simulation is performed on a non-linear falling object model. Comparison of performance of the proposed versus the original is indicated by RMS error in the simulation result.

I. 서론

본 논문에서는 주변 중력과 공기저항에 따른 비선형 요인을 고려한 자유 낙하 물체에서 위치 추정 개선 및 효과적인 잡음 제거를 위하여 마할라노비스 거리를 적용해 개선한 파티클 필터를 제안한다. 현실에서 센서에 의해 측정되는 데이터는 우리가 원하는 실제

값 외에도 잡음이나 측정 오차와 같은 원하지 않는 정보를 포함하고 있다. 필터링은 이렇게 잡음 등 불필요한 데이터가 혼합된 측정 데이터로부터 우리가 원하는 혹은 예측하는 데이터만을 걸러내는 데이터 처리 과정이다. 필터링되는 잡음이나 오차는 일정한 값을 가지지 않고 확률적으로 변화하기 때문에 확률적 모델의 상태를 예측해 필터링할 필요가 있지만, 이러한

* 본 연구는 2019년 국립대학 육성사업비로 지원되었음.

• First Author : Kumoh National Institute of Technology Department of IT Convergence Engineering, wlsemr18@kumoh.ac.kr, 정회원
o Corresponding Author : Kumoh National Institute of Technology Department of Electronic Engineering, yangym@ee.kumoh.ac.kr, 정회원

* Kumoh National Institute of Technology Department of Aeronautics, Mechanical and Electronic Convergence Engineering, wansu.lim@kumoh.ac.kr, 정회원

논문번호 : 202101-013-C-RE, Received January 8, 2021; Revised March 18, 2021; Accepted March 23, 2021

확률적 잡음, 오차 모델의 추정 및 예측은 쉽지 않다. 이에 따라 확률적 잡음 모델의 상태 추정을 위한 필터링 방법들이 개발되고 있으며, 대표적인 방법으로 칼만 필터가 있다.^[1] 칼만 필터는 일반적으로 여러 시스템 적용에서 상대적으로 정확도가 높은 방법이지만, 선형시스템과 가우시안 노이즈가 있는 경우에만 그 정확도가 보장되는 단점이 있다. 이러한 칼만필터의 단점을 개선하기 위한 방법으로 확장칼만필터, 무향칼만필터(Unscented Kalman Filtering, UKF), 파티클필터(Particle Kalman Filtering, PKF or PF) 등이 개발 및 연구되었다.^[2] 본 논문에서는 칼만 필터의 한 종류인 파티클 필터의 성능 향상을 위해 마할라노비스 거리를 적용한 파티클 필터를 제안한다. 또, 비선형 시스템 모델에서의 시뮬레이션을 통해 제안된 마할라노비스 파티클 필터의 성능을 기존 파티클필터와 비교를 통해 검증하였다. 본 논문은 다음과 같은 순서로 구성된다. 2장에서는 파티클 필터와 파티클 거리 측정 방법, 제안하는 마할라노비스 파티클 필터에 대해 설명하고, 3장에서 시뮬레이션 모델과 시뮬레이션 결과를 보여주며, 4장에서 결론을 서술한다.

II. 마할라노비스 파티클 필터(MPF)

2.1 파티클 필터

칼만 필터는 주변고과거의 데이터를 기반으로 현 상태를 추정하는 재귀 필터로 우수한 성능을 가진 필터이다. 하지만, 실제 응용에 있어 비선형, 논가우시안 잡음이 존재할 때 예측 정확도가 떨어지며, 연산 복잡도가 높은 단점이 있다. PF는 칼만 필터의 한 종류로 칼만필터의 상기 단점들을 개선하기 위해 제안된 확률에 기반한 베이스 필터의 근사 방법 중 하나이다.^[2,3] PF는 확률적인 시행착오(Trial and Error)에 기반한 시뮬레이션 방법으로 무작위로 생성된 많은 수의 파티클들과 실제 데이터의 거리를 측정해 가까운 파티클들에 가중치를 더해가며 실제 데이터를 추정하며, 연속적 몬테카를로(Sequential Montecarlo) 방법이라고 하기도 한다. 특히 PF는 샘플 재표집(Resampling) 개념을 적용하여 개선된 Sampling Importance Resampling(SIR) 기법을 통해 연산시간이 단축되도록 개선된 뒤, 활발한 연구가 지속되고 있다.^[3,5] 특히 PF는 비선형 시스템과 논 가우시안 잡음을 갖는 시스템의 상태를 추정하는데 유리하다. 일반적인 PF의 기초 알고리즘은 다음 단계와 같다.^[4-6] [1 단계 : 샘플링 / 2단계 : 측정값 업데이트 / 3단계 : 가중치 계산 / 4단계 : 리샘플링]. 식 1은 PF의 알고리즘

을 나타낸다.

Particle Filter(x_{t-1}, u_t, z_t):

- 1: Sampling $x_t^{[j]} \sim \pi(x_t | K)$
 - 2: Update Observation $p(z_t | x_t, m)$
 - 3: Compute Importance weight $w_t^{[j]}$ (1)
 - 4: Resampling
- Return x_t

End

PF 알고리즘 1단계에서는 파티클들을 생성한다. 2~3 단계를 통해 실제 측정 데이터와 가까운 파티클에 높은 가중치를 부여한다. 마지막으로, 4단계에서 큰 가중치를 가지는, 즉 실제 데이터의 값일 확률이 높은 파티클들로 전체 파티클들을 리샘플링 하고, 낮은 가중치를 가지는 파티클들을 제거한다. PF는 가중치 계산을 위해 측정값과 파티클의 거리를 계산하는데 유클리디안 거리를 사용한다.

2.2 노름(Norm)

노름은 벡터공간 상에서 원소들 간의 거리를 측정하는 방법으로 다양한 종류가 있다. 대표적으로 맨하탄 노름(Manhattan Norm, L1 Norm)와 유클리디안 노름(Euclidean Norm, L2 Norm)가 있다. 벡터 p와 q에 대하여 맨하탄 노름의 정의는 식 2와 같다.

$$L1 Norm : \| x \|_1 = \sum_{i=1}^n | p_i - q_i | \quad (2)$$

또한, n차원 공간에서 벡터 p와 q에 대하여 유클리디안 노름은 식 3과 같이 나타난다.

$$L2 Norm : \| x \|_2 = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + L + x_n^2} \quad (3)$$

$$x_n = p_n - q_n$$

유클리디안 노름은 일반적으로 n차원 유클리디안 공간에서 두 점 사이의 거리를 측정하는 함수로서 사용되며, 이를 유클리디안 거리(Euclidean Metric)라고 한다.

2.3 마할라노비스 거리 (Mahalanobis Distance)

노름은 공간상에서 정의된 거리를 측정하기 때문

에, 예측 값과 측정 값 사이 분포 함수가 다른 경우 확률 분포상의 거리가 멀더라도 노름의 크기는 가깝게 나타날 수 있는 문제가 있다.

반면, 마할라노비스 거리는 확률 분포가 IID(Identical Independent Distribution)가 아닌 경우에 분포 상에서 어떤 값이 발생할 확률의 높고 낮음을 수치화 하는 방법으로, 샘플과 평균과의 거리와 확률 분포의 공분산의 크기에 따라 가중치가 부여된 거리를 계산한다. 특히 공분산이 단위 행렬인 경우 유클리디안 노름과 같은 결과가 된다. 마할라노비스 거리는 임의의 샘플 x 와 데이터 분포의 평균 μ 및 분산 Σ 에 대하여 식 4와 같이 계산된다.

$$\text{Mahalanobis}(x, \mu) = \sqrt{(x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^T} \quad (4)$$

그림 1은 유클리디안 거리와 마할라노비스 거리를 비교하기 위한 그림이다. 그림 1에서 적색 점은 평균이 (0, 0)이고, 공분산이 $\begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$ 인 정규 확률 분포 데이터 샘플(N=1000)이다. 비교를 목적으로 선정된 좌표 값 (1, 1), (-1, -1)에 위치한 청색 점 및 (1, -1), (-1, 1)에 위치한 녹색 점은 유클리디안 거리와 마할라노비스 거리의 비교를 위해 선정된 시험용 관측값으로, 각 점의 색은 계산된 마할라노비스 거리의 크기에 의해 결정되었다. 함수: $X = \text{mvnrnd}([0; 0], [1 .9; .9 1], 1000)$;

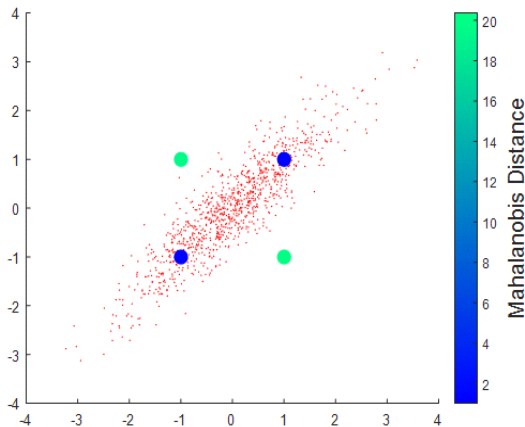


그림 1. 마할라노비스 거리와 유클리디안 거리의 비교
Fig. 1. Comparison between Mahalanobis and Euclidean distance

표 1은 네 개의 시험용 관측값과 확률 분포 데이터 샘플들의 평균인 (0,0)과의 유클리디안 거리 및 마할라

노비스 거리를 계산하여 나타낸 것이다. 표 1의 각 거리는 계산된 거리의 제곱(sqrt(2)^2=2.0)으로 표시되었다.

표 1에서 나타난 것과 같이 네 개의 큰 점들은 붉은 점들의 확률 분포 평균인 (0, 0)으로부터 공간상의 거리인 유클리디안 거리(2.0)는 거의 동일하지만, 확률분포 상에서의 거리인 마할라노비스 거리는 녹색 점이 멀게 나타남을 볼 수 있다. 즉, PF의 분산 가중치 업데이트 과정에서 추적하는 물체와 파티클의 공간적 거리가 멀더라도, 확률적으로는 오히려 거리가 가까운 파티클이 존재할 수 있다.

표 1. 각 관측값의 거리
Table 1. Distance of each observation⁴

관측값	Euclidean Distance (true)	Mhanalnobis Distance
(1, 1) 청	2.09 (2.0)	1.11
(1, -1) 녹	2.04 (2.0)	20.36
(-1, 1) 녹	1.96 (2.0)	19.59
(-1, -1) 청	1.91 (2.0)	1.01

2.4 마할라노비스 파티클 필터(MPF)

본 논문에서 제안하는 MPF는 가우시안 PF 알고리즘의 가중치 계산 단계 대신 마할라노비스 거리를 이용한 업데이트 단계를 수행한다. 마할라노비스 가중치 업데이트 단계는 실제 값과 파티클의 공간적 거리 및 통계적 거리를 모두 고려하여 가중치 계산을 진행하도록 하였다.

기존 가우시안 PF의 가중치 계산 단계에서는 먼저 PF의 가중치 계산 단계에서 각 파티클들과 실제 측정값의 거리를 측정한다. 가중치 계산은 계산된 거리를 이용하는 가우시안 필터를 이용해 이루어진다. 식 5는 임의의 랜덤 변수 x 에 대하여 가우시안 필터는 다음과 같이 계산된다.

$$P = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) \quad (5)$$

식 5에서 μ 는 평균, Σ 는 공분산을 나타낸다. 가우시안 PF에서 x 는 예측한 파티클을 의미하며, μ 와 Σ 는 사전 정보(Prior Information)에 의하여 결정된다. 제안하는 방식의 마할라노비스-가우시안 업데이트

는 식 6과 같이 파티클과 사전정보로부터 계산된 마할라노비스 거리와 가우시안 필터를 이용한다.

$$P = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(M)^T \Sigma^{-1}(M)\right) \quad (6)$$

식 6의 M 은 파티클과 실제 위치로부터 계산된 마할라노비스 거리를 의미한다. 식 6을 통해 PF는 확률 분포상에서 실제값과 가까운 파티클에 더욱 큰 가중치를 부여할 수 있다.

그림 2와 식 7은 제안하는 MPF의 알고리즘을 나타낸다. 식 1과 비교하여 식 7은 MPF 알고리즘(Pseudo Code)을 보여준다. 특이점은 단계 3에서 식1은 Norm은 사용, 식 7은 Mahalanobis를 적용한 내용이다. 단계별 설명은 다음과 같다. [1단계: 샘플링 / 2단계: 측정값 업데이트 / 3단계: 마할라노비스 가중치 업데이트 / 4단계: 리샘플링]

Mahalanobis Particle Filter(x_{t-1}, μ_t, z_t):

- 1: Sampling $x_t^{[j]} \sim \pi(x_t | K)$
- 2: Update Observation $p(z_t | x_t, m)$
- 3: Compute Importance weight $w_t^{[j]}$ using Mahalanobis
- 4: Resampling

Return x_t

End

무작위하게 생성된 파티클들은 리샘플링 과정을 받

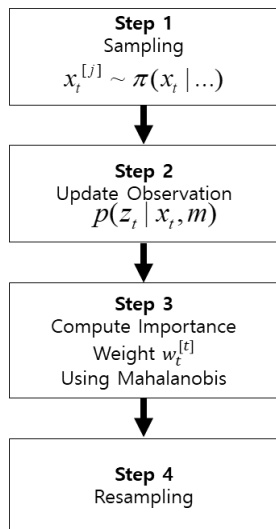


그림 2. 제안한 MPF 의 흐름도
Fig. 2. Flowchart of the proposed MPF

복하면서 점점 실제 값과 가까운 위치로 모이게 된다. 이를 이용하여, 파티클들의 분포로부터 확률 분포상의 거리를 이용해 가중치를 업데이트하면 실제 값과 확률적으로 더 가까운 파티클에 더 큰 가중치를 부여해 실제 값을 더욱 빠르게 찾을 수 있다.

III. 시뮬레이션

3.1 시뮬레이션 모델

기존 PF와 제안된 MPF의 성능 비교를 위해 듀런 화이트(Durrant-Whyte) 외 다수가 제시한 모델에 따라 상태방정식과 출력방정식 모두 비선형성을 지니는 낙하하는 물체의 시뮬레이션을 위한 기하학적 모델을 선정하였다.^[3,7,8] 이 시뮬레이션 모델은 지면을 향해 수직 하강하는 물체의 고도와 낙하 속도 그리고 일정한 탄도계수의 추정을 요구한다. 대기의 기하급수적 효과는 고려하는 것으로 가정한다. 물체와의 거리 측정은 가우시안 잡음이 있는 환경에서 지면으로부터 H 만큼의 고도에 위치한 레이더에 의해 이산시간에서 이루어진다. 그림 3은 시뮬레이션을 위한 기하학적 모델을 나타내며, 그림 3에 나타난 각 변수의 정의는 다음과 같다.

$x_1(t)$: 고도
 $x_2(t)$: 낙하 속도
 $r(t)$: 낙하 물체와 공의 실제 거리
 M : 레이더와의 거리(상수)
 H : 레이더의 높이(상수)

연속 시간에서 시스템의 역학 방정식은 다음 식 9과 같다.

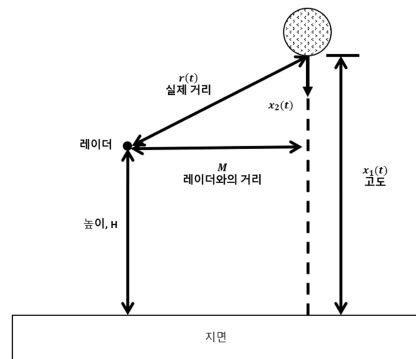


그림 3. 시뮬레이션을 위한 기하학적 모델
Fig. 3. Geometric model for simulation

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + w_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \rho_0 e^{-x_1(t)/k} x_2(t)^2 x_3(t) / 2 - g + w_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= w_3(t) \end{aligned} \quad (9)$$

각 식에서 $w_n(t)$ 는 평균이 0이고, 공분산이 $Q(t)$ 이며, 서로 비상관인(Uncorrelate) 잡음 성분이다. ρ_0 는 해수면에서의 공기 밀도를 나타내는 상수이고, k 는 고도와 공기 밀도간의 관계를 나타내는 상수이며, g 는 중력을 나타낸다. 세 가지 상수의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1.225 \text{ kg/m}^3 \\ g &= 9.8 \text{ m/sec}^2 \\ k &= 670.56 \text{ m} \end{aligned} \quad (1)$$

시간 t 에서 실제 거리 $r(t)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$r(t) = \sqrt{M^2 + [x_1(t) - H]^2} + r_w(t) \quad (11)$$

식 11의 우항에서 나타나는 $r_w(t)$ 는 관측 잡음으로, 공분산 $R(t) = 10^4 \text{ ft}^2$ 을 따르는 비상관 잡음 성분이다.

시뮬레이션 모델은 PF와 MPF를 사용하여 구현되고, 두 필터의 성능 비교는 시뮬레이션 모델이 추정을 요구하는 물체의 고도, 낙하속도, 탄도계수에 대한 예측값과 실제값이 가지는 RMS오차(Root Mean Square Error, RMSE)를 이용해 비교한다. 실제값 y 와 예측값 \hat{y} 에 대하여 RMS 오차는 식 12와 같이 계산된다.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2} \quad (12)$$

또한, 세 가지 지표에 대하여 RMS오차를 10회 반복 측정하고, 오차의 평균을 사용해 성능을 비교한다. 본 논문의 시뮬레이션은 MATLAB을 사용한다.

3.2 시뮬레이션 결과

PF와 통계 공분산을 고려한 MPF의 성능을 앞장에서 설명한 시뮬레이션 모델에 대해 실험을 수행하고, 각 PF의 예측값과 실제값의 RMS 오차를 비교해 그 성능을 평가한다. 오차비교를 위한 척도로 시뮬레

이션 모델이 요구하는 물체의 고도, 낙하속도, 탄도계수의 예측값을 사용한다.

그림 4, 5, 6은 각각 PF와 MPF를 이용해 시뮬레이션 모델에 대해 고도, 낙하속도, 탄도 계수를 예측한 결과의 오차를 나타낸다.

한 회의 측정에서 나타난 PF와 MPF의 RMS오차

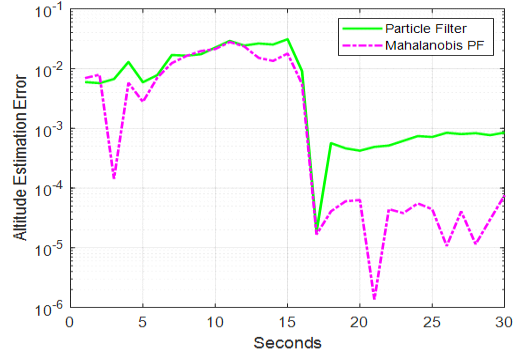


그림 4. 고도 추정 오차
Fig. 4. Altitude estimation error

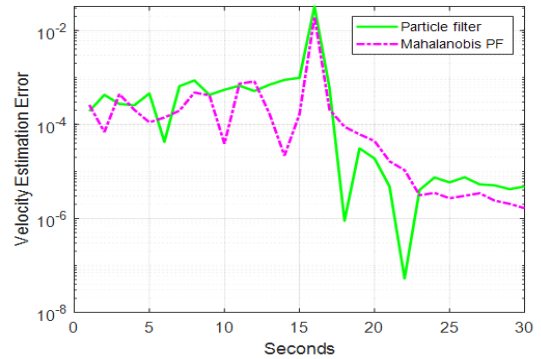


그림 5. 낙하속도 추정 오차
Fig. 5. Velocity estimation error

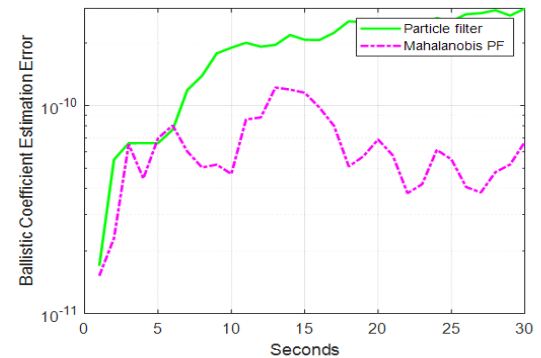


그림 6. 탄도계수 추정 오차
Fig. 6. Ballistic coefficient estimation error

표 2. RMS error
Table 2. RMS 오차

	Particle Filter	Mahalanobis Particle Filter
Altitude	0.0188	0.0057
Velocity	0.005	0.003
Ballistic Coefficient	6e-11	3e-11

는 표 2와 같이 나타났으며, 세가지 지표 모두 MPF가 우수한 성능을 보였다.

고도와 낙하속도의 추정값과 실제값의 RMS오차를 10회 반복 측정된 결과는 표 3와 같이 나타났다. 탄도 계수의 RMS 오차 10회 반복 측정 결과의 평균은 PF와 MPF가 각각 4.9e-11, 3.4e-11로 측정되어 MPF의 성능이 우수했으나, 두 방식 모두 오차의 크기가 이미 매우 작기 때문에 반복 측정 결과표에 나타내지 않았다.

PF와 MPF가 예측한 10회 평균 측정에 대한 고도의 RMS오차는 각각 0.014와 0.011로, MPF의 RMS 오차가 기존 파티클 필터에 비하여 22% 낮게 나타났다. 낙하속도의 RMS 오차는 각각 0.00217과 0.0015로 측정되어, MPF의 RMS 오차가 31% 낮게 나타났다. 단, 8회째 측정 결과와 같이 MPF의 추정 결과가 기존 파티클 필터에 비해 오차가 큰 특이값이 존재했다.

표 3. Repeated simulation result
Table 3. 반복 측정 결과

	고도		낙하속도	
	PF	MPF	PF	MPF
1	0.02	0.018	0.0034	0.0023
2	0.012	0.011	0.0018	0.0015
3	0.01	0.011	0.0016	0.0011
4	0.019	0.016	0.0023	0.0021
5	0.012	0.007	0.0011	0.0011
6	0.012	0.008	0.0015	0.0003
7	0.017	0.009	0.0025	0.0005
8	0.011	0.016	0.0021	0.0027
9	0.009	0.007	0.0004	0.0004
10	0.019	0.006	0.0050	0.0030
평균	0.014	0.011	0.0022	0.0015
표준 편차	0.004	0.004	0.0012	0.0009

IV. 결 론

본 논문에서는 중력과 공기 마찰에 따른 비선형 요소가 존재하는 시스템에서 위치 추정 및 효율적인 잡을 제거를 목적으로 마할라노비스 거리를 적용한 PF를 제안하였다. 또한 비선형 시뮬레이션 모델인 지면으로 낙하하는 물체에 대하여 PF와 제안한 MPF를 이용해 낙하하는 물체의 상태 중 고도, 낙하속도, 탄도 계수를 예측하였고, 예측값과 실제값의 RMS오차를 비교하였다. 시뮬레이션 결과 세 가지 지표 모두 MPF가 우수한 성능을 보였다. 또한 물체의 고도와 낙하속도에 대해 반복 측정된 결과의 RMS오차 평균 또한 제안된 MPF가 고도와 낙하속도 각각 22%, 31% 낮은 오차를 보여 기존 PF에 비해 우수한 성능을 보임을 확인하였다. 본 연구의 제약 조건과 다르게 시변 조건이며, 비선형성과 비가우시안성이 큰 실제 환경에 대해 적용 가능한 개선된 마할라노비스 기반 PF를 추후 연구로 고려 중이다.

References

- [1] R. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, vol. 82, pp. 34-45, Mar. 1960.
- [2] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon, "Beyond the Kalman Filter : Particle Filters for Tracking Applications," Artech, 2003.
- [3] D. Simon, "Optimal State Estimation," John Wiley & Sons, 2006.
- [4] S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox, "Probabilistic Robotics," MIT Press, 2005.
- [5] A. Doucet, N. de Freitas, K. Murphy, and S. Russell, "Rao-Blackwellized particle filtering for dynamic Bayesian networks," in *Proc. Conf. Uncertainty in Artificial Intell.*, 2000.
- [6] K. Murphy, "Bayesian map learning in dynamic environments," *Advances in NIPS*, MIT Press, 1999.
- [7] S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte, "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 45, no. 3, Mar. 2000.

- [8] M. Athans, R. P. Wishner, and A. Bertolini, "Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems from discrete noisy measurements," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-13, Oct. 1968.

임 완 수 (Wansu Lim)

2010년 8월 : GIST 정보통신공학과 박사

2014년 9월~현재 : 금오공과대학교 전자공학부 교수

<관심분야> 지능형 제어, 임베디드 시스템

[ORCID:0000-0003-2533-3496]

박 정 훈 (Jeong-hun Park)



2019년 2월 : 금오공과대학교 전자공학부 졸업

2021년 2월 : 금오공과대학교 IT 융복합공학과 석사

<관심분야> 신호처리, SLAM, 머신러닝

[ORCID:0000-0001-8037-8756]

양 연 모 (Yeon-Mo Yang)

한국통신학회 논문지

제39권 제9호 참조