

# 비선형 시스템에서 마스터-슬레이브 동기화를 위한 지연 피드백 제어 기술 연구

이 용 권\*, 김 영 재\*, 김 승 호\*, 이 승 훈\*, 권 오 민°

## The Delay Feedback Control for the Master-Slave Synchronization of Delayed Nonlinear Systems

Yong-gwon Lee\*, Yeong-jae Kim\*, Seung-ho Kim\*, Seung-hoon Lee\*, Oh-min Kwon°

### 요 약

본 논문에서는 시간지연이 존재하는 비선형 시스템의 마스터-슬레이브 동기화를 위한 지연 피드백 제어기 설계가 연구되었다. 리아프노프-크라소프스키 함수 (Lyapunov-Krasovskii functionals), 몇 가지 보조정리와 수학적 사실들을 이용하여, 시스템의 동기화를 위한 선형 행렬 부등식 형태의 조건을 도출하며, 지연 피드백 제어기 이득을 구한다. 얻어진 결과의 유효성 분석을 위해 차 (Chua) 회로 수치 예제에 적용하고, 기존의 연구들과 비교하였다.

**키워드** : 시간지연, 루어 시스템, 동기화, 리아프노프-크라소프스키 함수, 선형 행렬 부등식

**Key Words** : Time-delay, Lur'e system, Synchronization, Lyapunov-Krasovskii Functionals, Linear Matrix Inequality

### ABSTRACT

In this paper, delay feedback controller design for master-slave synchronization of delayed nonlinear systems is studied. By utilizing Lyapunov-Krasovskii functionals (LKFs), some useful lemmas and mathematical facts, a synchronization criterion is derived in terms of linear matrix inequalities (LMIs) and the delay feedback controller gain is obtained. For analyzing effectiveness of the proposed result, Chua's circuits numerical example is applied, and the previous results are compared.

### I. 서 론

시간지연 현상은 네트워크 통신시스템, 물리 역학 시스템, 그리고 화학반응 공정 등 다양한 실제 시스템에서 종종 발생한다. 시스템에 시간지연 현상이 발생하면, 하드웨어적 노화와 같은 현상을 유발하여 시스템의 안정적인 운영에 부정적인 영향 미친다. 그리고 하드웨어의 노화뿐만 아니라, 다중 시스템이나 네트워크

시스템의 동기화 과정에서 발생하는 시간지연 현상은 시스템의 효율에도 영향을 준다<sup>1)</sup>. 그렇기 때문에 시간지연을 고려한 시스템 해석은 매우 중요한 주제이다.

주파수 영역에서의 시간지연 시스템의 해석은 무한 차원의 상태를 가지고 있기 때문에 분석하기 위한 접근법으로 적절하지 않다. 따라서 시간영역에서의 시스템 해석이 주를 이룬다. 시간영역에서의 시스템 해석

※ 이 성과는 정부 (교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (No. 2020R1A6A1A12047945)

• First Author : School of Electrical Engineering, Chungbuk national university, lecywkgg@cbnu.ac.kr, 학생회원

° Corresponding Author : School of Electrical Engineering, Chungbuk national university, madwind@cbnu.ac.kr, 정회원

\* Chungbuk national university, 학생회원

논문번호 : 202105-101-B-RE, Received April 30, 2021; Revised June 3, 2021; Accepted June 7, 2021

은 Lyapunov-Krasovskii (LK) 기법을 활용하여 연구 되어 왔다. LK 기법을 기반으로 적절한 LKFs를 선정 하고, LKFs의 도함수를 선형 행렬 부등식의 형태로 표현한다. 많은 연구자들은 선형 행렬 부등식의 더 높은 상계를 보장할 수 있도록 다양한 수학적 방법을 연구하고, 시스템의 안정성 해석에 적용할 수 있도록 노력하고 있다<sup>1-3)</sup>. 특히 선형 행렬 부등식의 형태로 표현하기 힘든 적분 부등식을 다루는 방법이 소개된 후, 이를 활용한 시간지연에 관한 연구들이 빠르게 발전 하고 있다. 그 결과로 Jensen's 부등식을 기점으로 하여, Wirtinger 기반 부등식 기법, Auxiliary 함수 기반 적분 부등식 등 많은 적분 부등식들이 향상된 안정성 조건의 유도를 위해 제안되었다. 또한, 부등식의 상계를 향상 시킬 뿐만 아니라, 계산변수를 감소시키는 영 등식과 자유행렬을 활용하는 기법 또한 안정성 해석을 위한 방법으로 소개되고 있다<sup>4)</sup>.

대부분의 시스템은 비선형 함수를 갖는 수학적 모델들로 나타낼 수 있다. 대표적인 예로 Lur'e와 Postnikov<sup>5)</sup>가 제안한 루어 시스템이 있다. 루어 시스템은 선형 시스템에서 부분 경계를 갖는 비선형 함수가 피드백된 형태로 표현된다. 그 중 루어 시스템의 동기화 문제는 다양한 분야에서 연구되어 왔고, 특히 마스터-슬레이브 동기화 문제를 중심으로 연구되었다<sup>6-9)</sup>. 이러한 특성을 가진 Lur'e 시스템의 동기화 문제를 해결하기 위해 상태 피드백 제어, 동적 출력 피드백 제어, 샘플 데이터 제어 등이 적용된다.

본 논문에서는 마스터-슬레이브 시스템의 동기화에 대하여 안정성 및 안정화 판별법을 제안한다. 시스템의 문제 설정이 2장에서 다루지며, 3장을 통해 기존의 결과보다 덜 보수적인 안정화 조건을 위한 방법이 소개된다. 적절한 LKFs를 선정하고, Auxiliary 함수 기반 적분 부등식<sup>2)</sup>과 Reciprocal convexity 접근법<sup>3)</sup>을 활용하여 시간지연이 존재하는 마스터-슬레이브 시스템의 동기화의 안정성 조건이 정리 1에 소개될 것이다. 그리고 정리 2에서 관측제어 설계방법을 추가하여 제어가 가능한 시스템의 최대 지연범위를 구하고, 관측제어 이득을 설계하는 방법 제시한다. 4장에서 제안한 판별법의 유효성을 검증하기 위해 수치 예제와 시뮬레이션 결과를 보인다. 마지막으로 우리가 제시한 연구의 결론을 낸다.

**표기법.** 이 논문에서  $\mathbb{R}^n$ 은 유클리드 벡터 공간에서의  $n$  차원이고,  $\mathbb{R}^{n \times m}$ 은  $n \times m$  행렬이다.  $I_n$ 은  $n \times n$  항등행렬이고,  $0_n$ 과  $0_{n \times m}$ 은  $n \times n$  영행렬과  $n \times m$  영행렬이다. 양한정 행렬  $X$ 와  $Y$ 에서  $X > Y$

는  $X - Y$ 가 양한정임을 뜻하고,  $X \geq Y$ 는  $X - Y$ 가 음한정이 아니라는 것을 뜻한다. 정사각행렬  $X$ 에서  $Sym(X)$ 는  $X$ 와  $X^T$ 의 합을 뜻 한다; 즉  $Sym(X) = X + X^T$ .  $diag\{\dots\}$ 는 대각행렬,  $Col\{\dots\}$ 은 열행렬이다.  $X_{[f(t)]} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 은 행렬  $X_{[f(t)]}$ 의 최소 하나의 원소가 스칼라 함수  $f(t)$ 에 대하여 affinely dependent하다. 행렬  $X$ 에서  $X^\perp$ 는  $X$ 의 직교행렬이다.

## II. 마스터-슬레이브 시스템의 문제설정

이 장에서는 마스터-슬레이브 시스템의 동기화에 대하여 고려한다.

일반적으로 마스터-슬레이브 시스템의 동기화 문제는 그림 1과 같이 슬레이브 시스템의 입력으로 제어신호를 인가하고, 제어신호에 따라 시스템의 오차  $e(t)$ 가 0으로 수렴하게 하는 방법으로 해결할 수 있다.

이때, 그림 1의 마스터-슬레이브 시스템은 다음과 같이 표현된다<sup>9)</sup>.

$$\begin{aligned} M: \dot{m}(t) &= Am(t) + Bf(Dm(t)), \\ S: \dot{s}(t) &= As(t) + Bf(Ds(t)) + u(t), \\ U: u(t) &= LC(m(t-h(t)) - s(t-h(t))). \end{aligned}$$

그러나 실제 마스터-슬레이브 시스템 모델에서는 시변지연 뿐만 아니라, 시불변 지연이 함께 존재한다. 따라서 본 연구에서는 시변 지연과 상시지연  $d$ 를 고려한 시스템의 동기화 문제를 다룬다.

상시지연  $d$ 를 고려한 마스터-슬레이브 시스템은 다음과 같다.

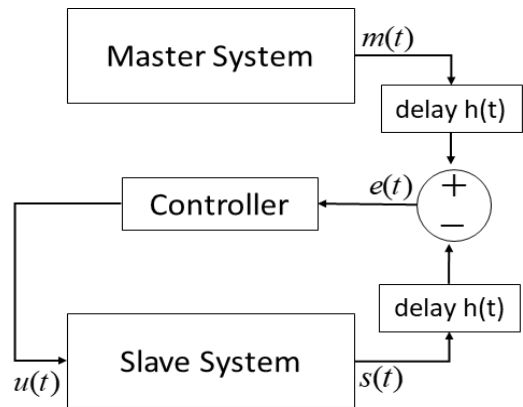


그림 1. 마스터-슬레이브 시스템  
Fig. 1. Master-slave system

$$M: \dot{m}(t) = Am(t) + Hm(t-d) + Bf(Dm(t)), \quad (1)$$

$$S: \begin{cases} \dot{s}(t) = As(t) + Hs(t-d) + Bf(Ds(t)) + u(t), \\ u(t) = LC(m(t-h(t)) - s(t-h(t))). \end{cases} \quad (2)$$

시스템  $M$ 과  $S$ 에서 각각  $m(t), s(t) \in \mathbb{R}^n$ 은 상태 벡터를 의미하고  $u(t) \in \mathbb{R}^n$ 는 시스템  $S$ 에 포함되는 입력 벡터이다. 상수  $d$ 는 시변분 지연 값이고, 행렬  $A, H, B, C, D$ 는 시스템의 정보를 가진 주어진 행렬이다. 그리고 시간지연  $h(t)$ 는 다음을 만족한다.

$$0 \leq h(t) \leq h, \quad \dot{h}(t) \leq h_d.$$

마스터-슬레이브 시스템은  $e(t) = m(t) - s(t)$ 으로 정의하는 오차 신호를 가지고 비교하며, 오차신호 시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + He(t-d) + Bg(De(t)) - u(t). \quad (3)$$

여기서  $g(*)$ 는  $[g_1^T, g_2^T, \dots, g_i^T]$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )이다. 그리고 다음의 조건을 만족한다.

$$k_i^- \leq \frac{g_i(d_i^T e(t))}{d_i^T e(t)} \leq k_i^+, \quad \forall d_i, k_i^-, k_i^+ \in \mathbb{R} \quad (4)$$

시간지연을 고려한 마스터-슬레이브 동기화 연구는 LK 분석방법이 갖는 장점을 활용하여 연구되고 있다. 시변 지연  $h, h(t), d$ 를 고려한 LKFs는 다음과 같다.

$$V = \sum_{i=1}^4 V_i, \quad (5)$$

여기서  $V_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 는

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[ \int_{t-h}^t e(s) ds \right]^T P \left[ \int_{t-h}^t e(s) ds \right], \\ V_2 &= h \int_{t-h}^t \int_s^t \dot{e}^T(u) R \dot{e}(u) du ds, \\ V_3 &= \int_{t-h}^t e^T(s) Q_1 e(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{t-h(t)}^t e^T(s) Q_2 e(s) ds \\ &+ \int_{t-d}^t e^T(s) Q_3 e(s) ds, \end{aligned}$$

$$V_4 = 2 \sum_{i=1}^n \int_0^{d_i^T e(t)} [l_{1i}(g(s) - k_i^- s) + l_{2i}(k_i^+ s - g(s))] ds.$$

이다.

다음으로 LKFs의 도함수의 상계를 구하기 위한 여러 가지 이론적 도구들을 소개한다.

보조 정리 1<sup>[2]</sup>. 구간  $[a, b] \in \mathbb{R}^n$ 의 임의의 모든 연속 함수  $w$ 와 행렬  $R > 0$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} &\int_a^b w^T(s) R w(s) ds \geq \\ &\frac{1}{b-a} \left( \int_a^b w(s) ds \right)^T R \left( \int_a^b w(s) ds \right) \\ &+ \frac{3}{b-a} \rho_1^T R \rho_1 + \frac{5}{b-a} \rho_2^T R \rho_2, \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \int_a^b w(s) ds - \frac{2}{b-a} \int_a^b \int_s^b w(u) du ds, \\ \rho_2 &= \int_a^b w(s) ds - \frac{6}{b-a} \int_a^b \int_s^b w(u) du ds \\ &+ \frac{12}{(b-a)^2} \int_a^b \int_s^b \int_u^b w(v) dv du ds. \end{aligned}$$

이다.

보조 정리 2<sup>[3]</sup>. 행렬  $M_1, M_2 > 0$ 과  $0 < \alpha < 1$ , 일 반 행렬  $S$ 와 벡터  $x_1, x_2$ 가 주어졌을 때, 함수  $\Phi(\alpha)$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} x_1^T M_1 x_1 + \frac{1}{1-\alpha} x_2^T M_2 x_2, \\ \Phi(\alpha) &\geq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_1 & S \\ S^T & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

여기서,  $\begin{bmatrix} M_1 & S \\ S^T & M_2 \end{bmatrix} > 0$ 의 조건을 만족한다.

보조 정리 3<sup>[10]</sup>. 벡터  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ , 행렬  $M = M^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m < n$ ) 이 주어지고,  $rank(\Gamma) < n$ 을 만족할 때, 다음의 조건들은 각각 동치다.

- i)  $\zeta^T M \zeta < 0, \forall \Gamma \zeta = 0, \zeta \neq 0,$
- ii)  $(\Gamma^\perp)^T M (\Gamma^\perp) < 0,$
- iii)  $\exists B \in \mathbb{R}^{n \times m} : M + \Gamma^T B^T + B \Gamma < 0.$

**Remark 1.** LKF (5)는 LK 분석 기법을 활용하기 위하여 선정되었다. 기존의 연구들과는 달리 LKF (5)의  $V_1$ 에서 적분으로 표현된 추가적인 상태벡터를 선정하였고,  $V_4$ 에서 비선형 함수의 제약 조건을 포함하였다. 하지만, LKF (5)의 도함수에는 적분항이 포함되어 선형 행렬 부등식의 형태로 안정성 조건을 유도하기 힘들다. 따라서 적분항을 선형 행렬 부등식의 형태로 다루기 위하여, 보조정리 1과 보조정리 2와 같은 수학적 사실에 기반한 기법들을 사용해야 한다.

### III. 마스터-슬레이브 동기화 문제 분석

이 절에서는 마스터 시스템 (1)과 슬레이브 시스템 (2)의 차이인 오차 신호 시스템 (3)을 가지고 안정성을 분석하고, 관측 제어기를 설계하기 위한 수학적 관계를 유도할 것이다. 정리 1과 정리 2에서 사용되는 자세한 수식의 전개에 앞서 행렬의 모든 명칭은 다음과 같이 정의된다.

$$e_i = [0_{n \times (i-1)n}, I_n, 0_{n \times ((9-i)n+m)}]^T \in \mathbb{R}^{(9n+m) \times n} \quad (i = 1, \dots, 9),$$

$$e_{10} = [0_{m \times 9n}, I_{m \times m}]^T \in \mathbb{R}^{(9n+m) \times m},$$

$$\zeta(t) = Col \{ \zeta_1(t), \zeta_2(t) \}$$

$$\zeta_1(t) = Col \{ e(t), e(t-h(t)), e(t-h), \dot{e}(t), e(t-d) \},$$

$$\zeta_2(t) = Col \left\{ \frac{1}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t e(s) ds, \frac{1}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} e(s) ds, \frac{1}{h^2(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_s^t e(u) du ds, \right.$$

$$\frac{1}{(h-h(t))^2} \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} e(u) du ds, g(De(t)) \},$$

$$\Xi_{1[h(t)]} = Sym \{ [e_1, h(t)e_6 + (h-h(t))e_7]^T P \times [e_4, e_1 - e_3]^T \},$$

$$\Xi_2 = h^2 e_4 R e_4^T,$$

$$\Xi_3 = e_1 (Q_1 + Q_2 + Q_3) e_1^T - e_3 Q_1 e_3^T - (1-h_d) e_2 Q_2 e_2^T - e_5 Q_3 e_5^T,$$

$$\Xi_4 = Sym \{ [e_{10} - e_1 D^T K^-] L_1 D e_4^T + [e_1 D^T K^+ - e_{10}] L_2 D e_4^T \},$$

$$\Theta = -Sym \{ [e_{10} - e_1 D^T K^-] M [e_{10} - e_1 D^T K^+]^T \},$$

$$A_1 = [e_1 - e_2, -e_1 - e_2 + 2e_6, e_1 - e_2 + 6e_7 - 12e_8],$$

$$A_2 = [e_2 - e_3, -e_2 - e_3 + 2e_7, e_2 - e_3 + 6e_7 - 12e_9],$$

$$R_{aug} = diag \{ R, 3R, 5R \},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} R_{aug} & S \\ S^T & R_{aug} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{[h(t)]} = \Xi_{1[h(t)]} + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4 + \Theta$$

$$- [A_1, A_2] \Omega [A_1, A_2]^T,$$

$$\Gamma = A e_1^T + H e_5^T + B e_{10}^T - L C e_2^T - e_4^T.$$

다음은 주요 결과에 대한 정리이다.

**정리 1.** 양의 상수  $h, h_d, d$ 와 행렬  $L, K^+ = diag \{ k_1^+, \dots, k_m^+ \}, K^- = diag \{ k_1^-, \dots, k_m^- \}$ 가 주어지고,  $0 \leq h(t) \leq h, \dot{h}(t) \leq h_d$ 의 관계를 갖는 시스템 (3)을 고려하자. 만약 다음 LMI를 동시에 만족하는 양한정 행렬  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, R, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 양한정 대각행렬  $M, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , 일반적 행렬  $S \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ 이 존재하면,

$$(\Gamma^\perp)^T (\Xi_{[h(t)]}) (\Gamma^\perp) < 0, \quad (6)$$

$$\Omega > 0. \quad (7)$$

조건 (6), (7)을 갖는 시스템 (3)은 점근적으로 안정하다.

**증명.**

LKFs에 대하여  $V_1, V_2$ 의 시간에 대한 미분을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2 \left[ \int_{t-h}^t e(s) ds \right]^T P \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ e(t) - e(t-h) \end{bmatrix} \\ &= 2 \left[ \int_{t-h(t)}^t e(s) ds + \int_{t-h}^{t-h(t)} e(s) ds \right]^T \\ &\quad \times P \begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ e(t) - e(t-h) \end{bmatrix} \\ &= \zeta^T(t) \Xi_1 \zeta(t), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= h^2 \dot{e}^T(t) R \dot{e}(t) - h \int_{t-h}^t \dot{e}^T(s) R \dot{e}(s) ds \\ &= \zeta^T(t) \Xi_2 \zeta(t) - h \int_{t-h(t)}^t \dot{e}^T(s) R \dot{e}(s) ds \\ &\quad - h \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{e}^T(s) R \dot{e}(s) ds. \end{aligned} \tag{9}$$

(9)의 적분 항에 보조 정리 1을 사용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} h \int_{t-h(t)}^t \dot{e}^T(s) R \dot{e}(s) ds &\geq \\ \frac{h}{h(t)} \left( \int_{t-h(t)}^t \dot{e}(s) ds \right)^T R \left( \int_{t-h(t)}^t \dot{e}(s) ds \right) \\ &+ \frac{3h}{h(t)} \left( e(t) + e(t-h(t)) - \frac{2}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t e(s) ds \right)^T \\ &\quad \times R \left( e(t) + e(t-h(t)) - \frac{2}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t e(s) ds \right) \\ &+ \frac{5h}{h(t)} \left( \int_{t-h(t)}^t \dot{e}(s) ds + \frac{6}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t e(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{12}{h^2(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_s^t e(u) du ds \right)^T R \left( \int_{t-h(t)}^t \dot{e}(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{h(t)} \int_{t-h(t)}^t e(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{12}{h^2(t)} \int_{t-h(t)}^t \int_s^t e(u) du ds \right), \\ h \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{e}^T(s) R \dot{e}(s) ds &\geq \\ \frac{h}{h-h(t)} (e(t-h(t)) - e(t-h))^T R \\ &\quad \times (e(t-h(t)) - e(t-h)) \\ &+ \frac{3h}{h-h(t)} (e(t-h(t)) + e(t-h) \\ &\quad - \frac{2}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} e(s) ds)^T R \\ &\quad \times \left( e(t-h(t)) + e(t-h) - \frac{2}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} e(s) ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{5h}{h-h(t)} (e(t-h(t)) - e(t-h) \\ &\quad + \frac{6}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} e(s) ds \\ &\quad - \frac{12}{(h-h(t))^2} \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} e(u) du ds)^T R \\ &\quad \times \left( e(t-h(t)) - e(t-h) - \frac{6}{h-h(t)} \int_{t-h}^{t-h(t)} e(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{12}{(h-h(t))^2} \int_{t-h}^{t-h(t)} \int_s^{t-h(t)} e(u) du ds \right). \end{aligned}$$

그리고  $h(t)/h = \alpha$ 를 대입하면, 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &-h \int_{t-h(t)}^t \dot{e}^T(s) R \dot{e}(s) ds \\ &\quad \leq -\frac{1}{\alpha} \zeta^T(t) A_1 R_{aug} A_1^T \zeta(t), \\ &-h \int_{t-h}^{t-h(t)} \dot{e}^T(s) R \dot{e}(s) ds \\ &\quad \leq -\frac{1}{1-\alpha} \zeta^T(t) A_2 R_{aug} A_2^T \zeta(t). \end{aligned}$$

다음으로 보조 정리 2를 사용하면 조건 (7)과 함께 다음을 얻는다.

$$\dot{V}_2 \leq \zeta^T(t) (\Xi_2 - [A_1, A_2] \Omega [A_1, A_2]^T) \zeta(t). \tag{10}$$

그리고  $\dot{V}_3, \dot{V}_4$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= e^T(t) Q_1 e(t) - e^T(t-h) Q_1 e(t-h) \\ &\quad + e^T(t) Q_2 e(t) \\ &\quad - (1-\dot{h}(t)) e^T(t-h(t)) Q_2 \\ &\quad \times e(t-h(t)) + e^T(t) Q_3 e(t) \\ &\quad - e^T(t-d) Q_3 e(t-d) \\ &\leq \zeta^T(t) \Xi_3 \zeta(t), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= 2 [g(D e(t)) - K^- D e(t)]^T L_1 \dot{D} e(t) \\ &\quad + 2 [K^+ D e(t) - g(D e(t))]^T L_2 \dot{D} e(t) \\ &= \zeta^T(t) \Xi_4 \zeta(t). \end{aligned} \tag{12}$$

(4)을 이용하여 다음의 부등식을 얻을 수 있다.

$$0 \leq -2[g(De(t)) - K^-De(t)]^T M \times [g(De(t)) - K^+De(t)] = \zeta^T(t)\Theta\zeta(t). \quad (13)$$

(8)부터 (13)을 통하여 얻어진  $\dot{V}$ 의 상계는 다음과 같다.

$$\dot{V} \leq \zeta^T(t)\Xi_{[h(t)]}\zeta(t). \quad (14)$$

식 (14)의 상계가 음의 값을 갖게 되는 조건이 존재하면 LK 안정성 원리에 의해 오차신호 시스템 (3)은 점근적으로 안정해지며, 다음의 선형 행렬 부등식 조건이 유도된  $\dot{V}$ 의 안정화 조건을 대신할 수 있다.

$$\Xi_{[h(t)]} < 0. \quad (15)$$

그리고 보조 정리 3을 이용하여 다음의 부등식을 만족한다.

$$(\Gamma^\perp)^T(\Xi_{[h(t)]})(\Gamma^\perp) < 0.$$

이때,  $\Gamma = Ae_1^T + He_5^T + Be_{10}^T - LCe_2^T - e_4^T = 0$ 는 시스템 (3)을 영등식으로 표현한 결과이다. 그리고  $\Gamma$ 의 영공간 (null-space)과 보조정리 3식 (15)에 활용한다.

따라서, 위의 과정들을 통하여 유도된 조건 (6)와 조건 (7)을 만족하면 오차 신호 시스템 (3)의 점근적 안정함이 보장된다. 그리고 시스템 (3)의 안정함이 보장됨에 따라, 마스터 시스템 (1)과 슬레이브 시스템 (2)의 동기화가 보장된다. □

**Remark 2.** 정리 1은 오차신호 시스템 (3)에 대한 안정성 분석을 다루었다. 시스템 (3)에 대한 안정성 분석을 위해 슬레이브 시스템 (2)에 주어진 관측제어 이득  $L$ 과 함께 입력  $u(t) = LCe(t-h(t))$ 이 고려되었다. LKFs를 통한 안정성 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 유도하기 위해 보조정리 1과 보조정리 2가 사용되었다. 그리고 보조정리 3을 사용함으로써, 기존의 연구보다 고려할 변수가 감소하였다.

**정리 2.** 양의 상수  $\delta, h, h_d, d$ 와 행렬  $K^+, K^-$ 가 주어지고,  $0 \leq h(t) \leq h, \dot{h}(t) \leq h_d$ 의 관계를 갖는 시스템 (3)을 고려하자. 만약 조건 (7)과 다음 LMI를

동시에 만족하는 양 행렬 행렬  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, R, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 양 행렬 대각행렬  $M, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , 일반적 행렬  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times l}, S \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ 이 존재하면,

$$\bar{\Xi}_{[h(t)]} < 0. \quad (16)$$

$u(t) = (X)^{-1}YCe(t-h(t))$ 일 때, 시스템 (2)는 시스템 (1)과 동기화된다.

정리 2을 전개에 앞서 수식표현의 간략화를 위하여 다음의 명칭을 정의한다.

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= XAe_1^T + XHe_5^T + XBe_{10}^T - YCe_2^T - Xe_4^T, \\ \Xi_5 &= Sym\{[e_1 + \delta e_4]\bar{\Gamma}\}, \\ \bar{\Xi}_{[h(t)]} &= \Xi_{1[h(t)]} + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4 + \Xi_5 + \Theta \\ &\quad - [A_1, A_2]\Omega[A_1, A_2]^T. \end{aligned}$$

**증명.**

사용된 LKFs는 정리 1과 동일하다. 마스터-슬레이브 시스템을 동기화하기 위한 관측제어 이득은 다음과 같은 방법으로 고려한다.

$$0 = 2[e^T(t)X + \dot{e}(t)\delta X][Ae(t) + He(t-d) + Bg(De(t)) - LCe(t-h(t)) - \dot{e}(t)]. \quad (13)$$

식 (17)와 같이 영등법의 개념을 이용하여 시스템에 대한 정보와 관측제어 이득을 고려하고, 이를 다시 정리하면,

$$0 = Sym\{[e^T(t) + \dot{e}(t)\delta][XAe(t) + XHe(t-d) + XBg(De(t)) - YCe(t-h(t)) - X\dot{e}(t)]\} = \zeta^T(t)\Xi_5\zeta(t). \quad (18)$$

여기서,  $Y = XL$ 이다.

따라서, 식 (14)에 식 (18)을 고려한  $\dot{V}$ 의 상계는 다음과 같다.

$$\dot{V} \leq \zeta^T(t)\bar{\Xi}_{[h(t)]}\zeta(t). \quad (19)$$

그리고 식 (19)의 관계에서 (15)의 과정을 이용하

면 다음의 부등식을 만족한다.

$$\overline{\Xi}_{[h(t)]} < 0.$$

결국 위의 과정들을 통하여 유도된 조건 (7)와 조건 (16)을 만족하면  $u(t) = (X)^{-1}YCe(t-h(t))$  일 때, 슬레이브 시스템 (2)는 마스터 시스템 (1)과 동기화된다. □

**Remark 3.** 정리 2에서는 정리 1과 다르게 시스템 (3)의 제어기 설계를 다룬다. 제어기 설계를 위하여 슬레이브 시스템 (2)의 입력에 임의의 관측제어 이득  $L$ 을 고려하여 안정화 조건을 유도한다. 이때, 제어입력은  $u(t) = (X)^{-1}YCe(t-h(t)), (Y=XL)$ 으로 표현된다. 임의의 행렬  $L$ 과 함께, 보조정리 3을 적용하면 선형 행렬 부등식 형태로 안정화 조건을 유도할 수 없다. 따라서, 시스템 정보와 제어이득  $L$ 을 포함한 식 (17)을 안정화 분석에 고려함으로써 조건 (7)과 조건 (16)을 얻을 수 있다. 결국 앞의 조건들을 만족할 때, 안정함이 보장되는 최대 시변 지연  $h$ 를 얻을 수 있다. 그리고 이때의 제어이득  $L$ 을 구할 수 있다.

#### IV. 지연 피드백 제어 결과 및 성능 분석

수치 예제를 통해 정리 2의 결과를 보이겠다.

**예제 1.** 다음 행렬 및 값을 갖는 시스템 (3)을 고려하자<sup>[7]</sup>.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{18}{7} & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.28 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -c & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 2c & 0 & -c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{27}{7} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = D = [1 \ 0 \ 0], K^- = 0, K^+ = 1.$$

위 행렬 값들을 정리 2에 적용하고,  $h_d = 0$  일 때, 시스템의 최대 시간 지연과 관측제어 이득을 구하면 표 1로 정리된다. 그리고 표 2에서  $c = d = 0$ 에 대하여 기존의 논문들과 비교를 하였다.

표 2를 통하여 제안한 방법이 기존의 방법보다 시간 지연에 더 강인한 제어기를 설계함을 볼 수 있다. 위의 결과의 유효함을 보이기 위하여  $h(t) = 0.1893$ ,  $c = 0.2$ ,  $d = 0.01$ ,  $L = [5.0353, 0.5127, -4.7496]^T$ ,  $m(0) = [0.2, 0.3, -0.2]^T, s(0) = [-0.1, -0.1, 0.4]^T$ ,

표 1.  $c$ 에 따른 최대 지연  $h$ 와 관측제어이득  $L$   
Table 1. Maximum upper bound of delay  $h$  and observer gain  $L$  with  $c$ .

$c$	0	0.1	0.2
$h$	0.2629	0.2205	0.1893
$L$	$\begin{bmatrix} 3.6302 \\ 0.3002 \\ -3.4036 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.3428 \\ 0.4026 \\ -4.0860 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.0353 \\ 0.5127 \\ -4.7496 \end{bmatrix}$

표 2.  $c = d = 0$ 에서의 최대 지연  $h$ 와 관측 제어 이득  $L$   
Table 2. Maximum upper bound of delay  $h$  and observer gain  $L$  with  $c = d = 0$ .

	[9]	[10]	정리 2
$h$	0.185	0.188	0.2629
$L$	$\begin{bmatrix} 4.0779 \\ 0.9087 \\ -4.3430 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.6512 \\ 0.5992 \\ -4.5177 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.6302 \\ 0.3002 \\ -3.4036 \end{bmatrix}$
변수	$7.5n^2 + 5.5n + 3$	$103n^2 + 4n + 3$	$14n^2 + 4n + 3$

$f(x(t)) = \frac{1}{2} [|x(t)+1| - |x(t)-1|]$ 을 그림 2의 Matlab Simulink에 적용하여 시물레이션의 결과를 그림 2-5에 보였다. 그림 3과 그림 4는 마스터 시스템 (1)과 슬레이브 시스템 (2)의 상태 궤적을 나타낸다. 입력 신호의 상태 궤적과 오차 신호 시스템 (3)의 상태 궤적이 0의 값으로 수렴하는 것을 그림 5과 그림 6에서 확인할 수 있다.

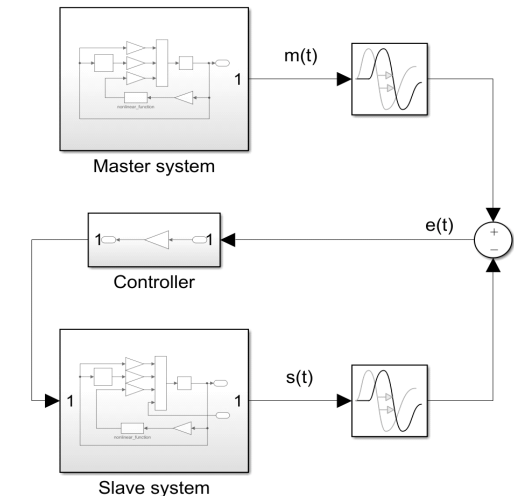


그림 2. Matlab Simulink 구성도  
Fig. 2. Simulation Model by Matlab Simulink

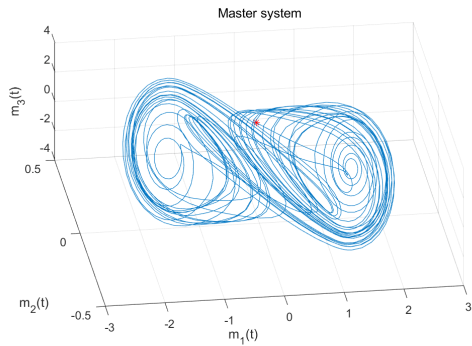


그림 3. 마스터 시스템의 상태 궤적  
Fig. 3. The trajectories in master system

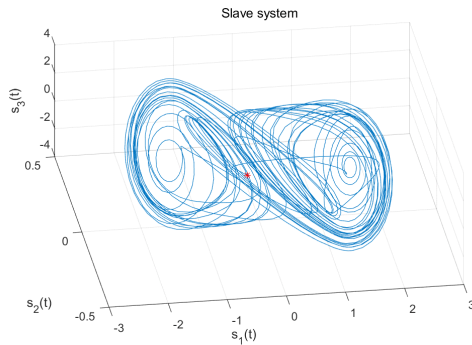


그림 4. 슬레이브 시스템의 상태 궤적  
Fig. 4. The trajectories in slave system

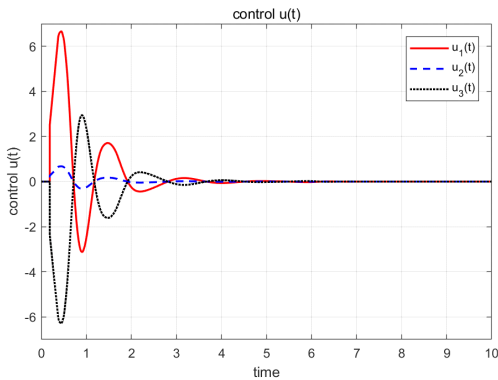


그림 5. 입력 신호의 상태 궤적  
Fig. 5. The trajectories in input signal

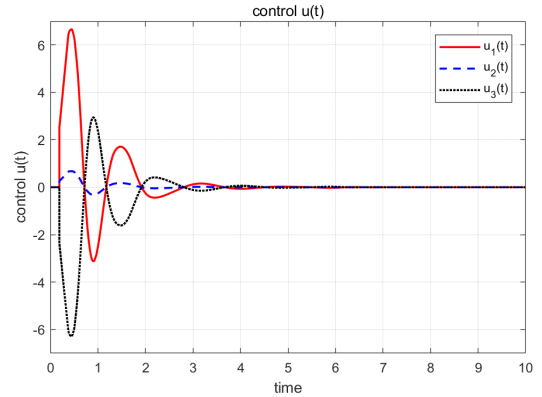


그림 6. 입력 신호의 상태 궤적  
Fig. 6. The trajectories in input signal

보수적인 안정성 결과를 얻기 위하여, 합성 LKF를 추가로 선정하였다. 이때, 합성 LKF에는 시변 지연  $h$ 를 고려한 상태 벡터가 선정되었고, 상시지연  $d$ 을 고려한 LKF가 추가되었다. 그리고 보조 정리 1, 2, 3과 몇 가지 수학적 기법을 적용하여 계산변수를 줄일 수 있음을 보였다. 또한 안정화를 위해 제안된 방법의 결과로 얻어진 관측제어 이득은 기존의 연구 결과보다 더 큰 최대 시간지연 범위를 보장할 수 있다. 마지막으로 추야 회로 수치 예제에 적용하여 정리 2의 결과가 유효함을 보였다.

References

[1] X. M. Zhang, Q. L. Han, A. Seuret, F. Gouaisbaut, and Y. He, "Overview of recent advances in stability of linear systems with time-varying delays," *IET Control Theory & Appl.*, vol. 13, no. 1, pp. 1-16, Jan. 2019.

[2] P. G. Park, W. I. Lee, and S. Y. Lee, "Auxiliary function-based integral inequalities for quadratic functions and their applications to time-delay systems," *J. Frankl. Inst(JFI)*, vol. 352, no. 4, pp. 1378-1396, Jan. 2015.

[3] P. G. Park, J. W. Ko, and C. Jeong, "Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays," *Automatica*, vol. 47, no. 1, pp. 235-238, Jan. 2011.

[4] C. H. Lee, S. H. Lee, M. J. Park, and O. M. Kwon, "Improved stability and stabilization for sampled-data control system via

V. 결론

본 논문은 시간지연이 존재하는 마스터-슬레이브 루어 시스템의 동기화 문제에 대하여 관측제어와 시간지연 안정성 분석을 연구하였다. 기존 연구보다 덜



augmented lyapunov-krasovskii functional,” *Trans. KIEE*, vol. 66, no. 1, pp. 127-136, Jan. 2017.

- [5] A. I. Lurie, *Some nonlinear problems in the theory of automatic control*, London: HM Stationary Office, 1957.
- [6] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no. 8, pp. 821-824, Feb. 1990.
- [7] M. E. Yalçın, J. A. K. Suykens, and J. Vandewalle, “Master - slave synchronization of Lur’e systems with time-delay,” *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 11, no. 6, pp. 1707-1722, Jun. 2001.
- [8] C. Ge, C. Hua, and X. Guan, “Master-slave synchronization criteria of Lur’e systems with time-delay feedback control,” *Applied Math. and Comput.*, vol. 244, pp. 895-902, Oct. 2014.
- [9] S. Kaibo, L. Xinzhi, Z. Hong, and Z. Shouming, “New mater-slave synchronization criteria of chaotic Lur’e systems with time-varying delay feedback control,” *Math. and Comput. Approaches in Advancing Modern Sci. and Eng.*, pp. 725-736, Aug. 2016.
- [10] Gu. Keqin, Jie Cehn, and Vladimir L. Kharitonov, “Stability of time-delay systems”, Springer Science & Business Media, 2003.

**이 용 권 (Yong-gwon Lee)**



2020년 2월 : 충북대학교 전기공학부 학사  
 2020년 3월~현재 : 충북대학교 전기공학부 석·박사 통합과정  
 <관심분야> 시변 시간지연, 비선형 시스템 제어  
 [ORCID:0000-0001-8597-2746]

**김 영 재 (Yeong-jae Kim)**



2020년 2월 : 충북대학교 전기공학부 학사  
 2020년 3월~현재 : 충북대학교 전기공학부 석·박사 통합과정  
 <관심분야> 시변 시간지연, 비선형 시스템 제어  
 [ORCID:0000-0003-3501-1415]

**김 승 호 (Seung-ho Kim)**



2015년 3월~현재 : 충북대학교 전기공학부 학·석사 통합과정  
 <관심분야> 시변 시간지연, 비선형 시스템 제어  
 [ORCID:0000-0002-9935-3193]

**이 승 훈 (Seung-hoon Lee)**



2014년 2월 : 충북대학교 전기공학부 학사  
 2016년 2월 : 충북대학교 전기공학부 석사  
 2020년 2월 : 충북대학교 전기공학부 박사  
 2020년 3월~현재 : 충북대학교 그린에너지연구소 박사 후 연구원  
 <관심분야> 시변시간지연, 샘플데이터제어  
 [ORCID:0000-0003-3501-1415]

**권 오 민 (Oh-min Kwon)**



1997년 2월 : 경북대학교 전자공학과 학사  
 1999년 2월 : 포항공과대학교 전기전자공학과 석사  
 2004년 2월 : 포항공과대학교 전기전자공학과 박사  
 2004년~2006년 : 삼성중공업  
 2006년~현재 : 충북대학교 전기공학부 교수  
 <관심분야> 시변시간지연, 안정성 해석  
 [ORCID:0000-0002-4777-7912]