

16-QAM에 적합한 이진 극 부호 설계

백성열*, 김준성*, 최수용*, 오왕록^o

Binary Polar Code Design Suitable for 16-QAM

Sungyeol Back*, Junseong Kim*, Suyong Choi*, Wangrok Oh^o

요약

이진 극 부호 (binary polar code) 설계과정에서는 각각의 부호 비트 (coded bit)가 전송되는 채널의 신뢰도 (reliability)가 동일하다는 가정이 사용된다. 한편, 고차원 변조 (high order modulation) 방식을 사용할 경우 변조 심볼 매핑 방법에 따라 각 심볼에 매핑된 부호 비트들의 신뢰도에 차이가 발생한다. 따라서 이진 극 부호와 고차원 변조를 사용할 경우 새로운 극 부호 설계 기법을 적용하여야 한다. 본 논문에서는 16-QAM (quadrature amplitude modulation) 변조 방식에 적합한 이진 극 부호 설계 기법을 제안한다. 제안하는 기법에서는 부호 비트가 매핑되는 심볼 내 비트 위치별로 극 부호 설계에 사용할 채널 신뢰도의 비를 최적화하고 이를 기반으로 이진 극 부호를 설계한다. 제안하는 기법으로 설계된 이진 극 부호와 16-QAM을 사용할 경우 부호화 및 복호 복잡도 증가 없이 성능을 개선할 수 있다.

Key Words : Polar code, High order modulation

ABSTRACT

Binary polar code is usually constructed under an assumption that the reliabilities of channels where coded bits are transmitted are all identical. On the other hand, in high order modulation schemes, each bit positions in a modulation symbol have different reliability according to bit-to-symbol mapping scheme. Hence, it is crucial to develop a binary polar code construction scheme suitable for high order modulations. In this paper, we propose a polar code construction scheme suitable for 16-QAM (quadrature amplitude modulation) modulation. In the proposed scheme, reliabilities for each bit positions in 16-QAM symbol are optimized and utilized in binary polar code design. With the proposed design scheme, the performance of binary polar code deployed with 16-QAM can be improved without additional encoding and decoding complexities.

1. 서론

현재 5G NR (new radio) 시스템에서 제어 채널의 채널 부호로 사용되는 극 부호 (polar code)는 이진 입력

이산 무기억 대칭 채널 (binary input discrete memoryless symmetric channel, BI-DMS)에서 채널 용량 (channel capacity)를 달성할 수 있다고 이론적으로 증명된 최초의 오류 정정 부호이다^[1,2]. 극 부호는

※ 본 논문은 2021년도 교육부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 지자체-대학 협력기반 지역혁신 사업의 결과입니다. (2021RIS-004)

• First Author : Dept. of Information Communications Eng., Chungnam National University, syback@o.cnu.ac.kr, 학생회원

◦ Corresponding Author : Dept. of Information Communications Eng., Chungnam National University, kingrock@cnu.ac.kr, 중신회원

* Dept. of Information Communications Eng., Chungnam National University, jskim@o.cnu.ac.kr, 학생회원; tndyd4024@o.cnu.ac.kr, 학생회원

논문번호 : 202109-222-A-RN, Received September 1, 2021; Revised November 26, 2021; Accepted December 3, 2021

부호 비트 (coded bit)가 전송되는 채널 신뢰도가 동일하다는 가정하에 채널 양극화 (polarization)을 수행하며 양극화된 채널 중 신뢰도 (reliability)가 높은 채널에 정보 비트 (information bit)를 신뢰도가 낮은 채널에 고정 비트 (frozen bit)를 전송한다.

극 부호 설계 기법으로는 이진 소멸 채널 (binary erasure channel, BEC)에서 각 채널의 소멸 확률의 상한계 (upper bound)를 계산하는 바타차리야 한계 (Bhattacharyya bound) 설계 기법과 가산성 백색 가우시안 잡음 (additive white Gaussian noise, AWGN) 채널을 위한 설계 기법으로 복호기 내에서 계산되는 로그 우도 비 (log likelihood ratio, LLR)를 대칭 가우시안으로 가정하고 각 채널의 신뢰도를 계산하는 가우시안 근사화 (Gaussian approximation, GA) 설계 기법 등이 있다³⁾.

일반적인 이진 극 부호 설계 기법은 부호 비트가 전송되는 채널의 신뢰도가 동일하다는 가정하에서 수행된다. 하지만 이진 극 부호가 고차원 변조 (high order modulation) 방식과 사용될 경우 부호 비트들이 매핑되는 변조 심볼 (modulation symbol) 내의 비트 위치에 따라 신뢰도 차이가 발생하고 이로 인하여 성능이 저하되는 단점이 있다. 이러한 단점을 해결하기 위하여 다층 코딩 (multilevel coding, MLC)을 이용한 극 부호 설계 기법 및 PCM (polar coded modulation) 구조에서 최적의 심볼 매핑 및 디매핑 (demapping) 기법과 이진 극 부호에 최적화된 신호 성상도 (signal constellation)를 설계하는 방안들이 제안되었다^{4,5,6)}. 그러나 [4], [5]의 경우는 여러 개의 부호 및 복호기가 필요하여 부호화 및 복호 복잡도가 증가하며 [6]의 경우는 정형화된 신호 성상도와 다른 모양의 신호 성상도를 사용함으로써 동기 기법들과 같은 성상도 모양에 기반한 다양한 수신 기법들을 새로 설계해야 하는 문제가 있다.

본 논문에서는 16-QAM (quadrature amplitude modulation) 변조 방식에 적합한 극 부호 설계 기법을 제안한다. 제안하는 기법은 부호 비트가 매핑되는 16-QAM 심볼 내 비트 위치별로 채널 신뢰도의 비를 최적화하고 이를 통해 16-QAM에 적합한 이진 극 부호를 설계한다. 제안하는 기법으로 설계된 이진 극 부호는 변조 방식에 무관하게 동일한 부호 및 복호기를 사용할 수 있으며 기존 기법 대비 부호화 및 복호 복잡도 증가 없이 성능을 개선할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 본 논문에서 고려하는 시스템 모델에 대해서 설명하고 3장에서 16-QAM 변조 방식에 적합한 극 부호 설계 기

법을 제안한다. 4장에서는 제안하는 기법의 성능을 확인하고 마지막으로 5장에서 결론을 맺는다.

II. 시스템 모델

극 부호 설계를 통해 정보 비트 (information bit)들의 인덱스 집합 I , 고정 비트 (frozen bit)들의 인덱스 집합 I^c 을 결정하여 길이 N 이 2의 승수로 주어지는 벡터 $\mathbf{u}_0^{N-1} = [u_0, u_1, \dots, u_{N-1}]$ 의 원소들 중 인덱스 $i \in I$ 인 u_i 에는 정보 비트를 인덱스 $i \in I^c$ 인 u_i 에는 고정 비트를 할당한다. 정보 및 고정 비트가 할당된 \mathbf{u}_0^{N-1} 와 극 부호 생성 행렬 (generator matrix) \mathbf{G}_N 을 이용하여 식 (1)과 같이 $\mathbf{c}_0^{N-1} = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}]$ 을 생성한다. 식 (1)에서 \mathbf{G}_N 은 하삼각 정방 행렬 $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{bmatrix}$ 의 $n = \log_2 N$ 차 Kronecker power 연산 $\mathbf{F}^{\otimes n}$ 으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{c}_0^{N-1} = \mathbf{u}_0^{N-1} \mathbf{G}_N \quad (1)$$

16-QAM 변조 심볼 s_k 의 동 위상 (in-phase) 및 직교 위상 (quadrature) 신호를 각각 독립적인 두 개의 4-PAM (pulse amplitude modulation) 신호로 해석할 수 있으며 각 위상 축의 4-PAM 신호의 성상도는 심볼 당 평균 에너지를 E_s 로 설정할 경우 그림 1과 같이 나타낼 수 있다. s_k 의 동 위상 성분 s_k^I 와 직교 성분 s_k^Q 에 식 (1)을 통해 부호화된 \mathbf{c}_0^{N-1} 의 원소들이 식 (2)와 같이 매핑된다. \mathbf{c}_0^{N-1} 이 매핑되는 변조 심볼 내의 비트 위치에 따라 신뢰도를 확인하기 위해 가산성 백색 가우시안 잡음 채널 하에서 MSB 및 LSB에 매핑되는 부호 비트의 비트 오류 (bit error rate, BER) P_M 과 P_L 은 그림 2와 같이 나타낼 수 있으며 여기서 $\frac{N_0}{2}$ 는 가산성 백색 잡음 채널의 양대역 전력 밀도이다⁷⁾. 그림 2에서 볼 수 있는 바와 같이 주어진 $\frac{E_s}{N_0}$

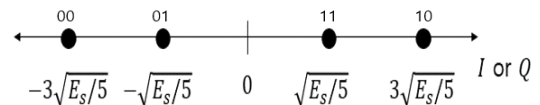


그림 1. 4-PAM 성상도
Fig. 1. 4-PAM constellation.

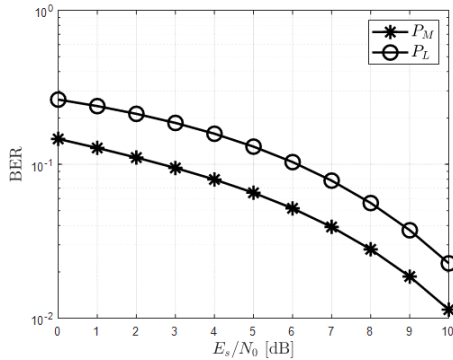


그림 2. MSB 및 LSB에 매핑된 부호 비트의 비트 오류.
Fig. 2. BER of coded bits mapped to MSB and LSB.

에서 P_M 과 P_L 의 값이 다르며 이를 통해 4-PAM 심볼의 MSB와 LSB에 매핑되는 부호 비트들 간 신뢰도에 차이가 발생하는 것을 확인할 수 있다.

$$s_k^I = \{c_{4k}, c_{4k+1}\}$$

$$s_k^Q = \{c_{4k+2}, c_{4k+3}\}, k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1. \quad (2)$$

일반적인 이진 극 부호 설계는 c_0^{N-1} 이 전송되는 채널의 신뢰도가 동일하다는 가정하에 채널 양극화를 수행한다. 그러나 s_k^I 와 s_k^Q 의 MSB (most significant bit)와 LSB (least significant bit)에 매핑되는 부호 비트 간 채널 신뢰도에 차이가 있으며 모든 부호 비트들이 신뢰도가 동일한 채널을 통해 전송된다는 가정하에 설계된 이진 극 부호와 16-QAM 변조 방식을 같이 사용할 경우 성능 열화가 발생한다⁴⁾.

III. 제안하는 기법

극 부호는 채널 양극화를 수행한 후 신뢰도가 높은 채널에 정보 비트를 나머지 채널에 고정 비트를 전송한다. 일반적인 이진 극 부호 설계를 위한 채널 양극화 과정에서는 채널을 통해 전송된 부호 비트들의 신뢰도가 동일하다는 가정이 사용된다. 하지만 이와 같은 가정 하에 설계된 이진 극 부호의 부호 비트들이 16-QAM 심볼에 매핑될 경우 각 부호 비트가 매핑되는 위치에 따라 신뢰도에 차이가 발생하게 되어 일반적인 이진 극 부호와 16-QAM 변조 방식을 연결할 경우 성능 열화가 발생한다.

본 논문에서는 16-QAM에 매핑된 부호 비트들의 채널 신뢰도의 비를 최적화하고 이를 통해 극 부호를

설계하는 기법을 제안한다. 극 부호의 설계에 사용되는 설계 신호 대 잡음 비가 η 일 경우 부호 비트가 전송되는 채널의 신뢰도를 η 로 설정하고 부호 설계를 수행한다³⁾. 그러나 16-QAM 변조 기법을 사용할 경우 그림 2에서 볼 수 있는 바와 같이 MSB와 LSB에 매핑되는 부호 비트의 채널 신뢰도가 동일하지 않은 문제가 발생하며 따라서 부호 비트가 변조 심볼에 매핑되는 위치에 따라 채널 신뢰도를 최적화해야 한다. 16-QAM의 동 위상 및 직교 위상 성분인 s_k^I 와 s_k^Q 의 MSB와 LSB에 매핑되는 부호 비트들의 채널 신뢰도를 각각 R_M 과 R_L 로 나타내고 설계 신호 대 잡음 비 (designed signal to noise ratio)를 η , R_M 과 R_L 의 비를 a 로 나타내면 R_M 과 R_L 을 각각 식 (3)과 같이 표현할 수 있다. 식 (3)에서 볼 수 있는 바와 같이 a 를 변화시킴에 따라 R_M 과 R_L 의 합이 2η 인 제한조건 하에서 R_M 과 R_L 의 비가 결정된다.

$$R_M = \frac{2a}{a+1}\eta$$

$$R_L = \frac{2}{a+1}\eta. \quad (3)$$

극 부호 양극화 과정에서 각 노드들의 신뢰도를 계산하는 과정을 부호어의 길이가 $N=8$ 인 경우에 대해 도식화하면 그림 3과 같다. 그림 3에서 $R_i^{(j)}$,

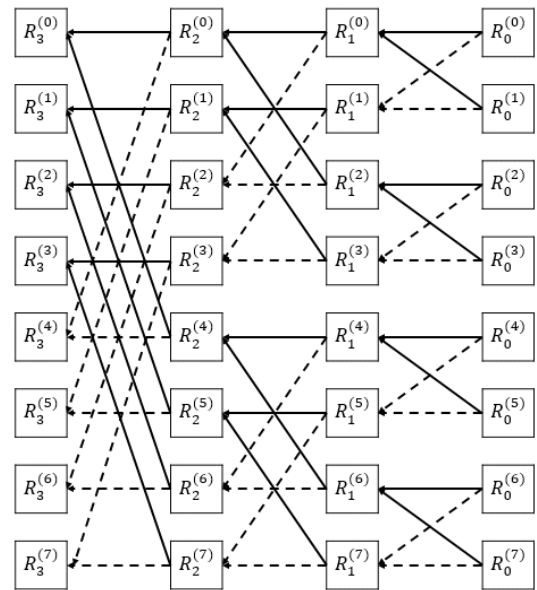


그림 3. 극 부호의 채널 양극화 과정 ($N=8$)
Fig. 3. Channel polarization process of polar code ($N=8$).

$i = 0, 1, \dots, \dots, \log_2 N$ 는 단계 (stage) i 에서 $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ 번째 노드의 신뢰도를 나타내며 실선과 점선은 각각 식 (4)와 (5)에 나타난 노드 연산 $f(\cdot)$ 와 $g(\cdot)$ 을 나타낸다. 초기값 $R_0^{(j)}$ 는 식 (3)에 주어진 R_M 과 R_L 을 이용하여 식 (6)과 같이 매핑하며 $1 \leq i \leq \log_2 N$ 인 경우에 $R_i^{(j)}$ 는 식 (7)에 나타난 노드 연산을 통해 계산된다. 채널 양극화를 통해 최종 단계 노드들의 신뢰도 $R_{\log_2 N}^{(j)}, j = 0, 1, \dots, N-1$ 를 도출하고 상대적으로 신뢰도가 높은 K 개의 채널에 정보 비트를 신뢰도가 낮은 $(N-K)$ 개의 채널에 고정 비트를 매핑하여 부호율 (code rate) $\frac{K}{N}$ 인 극 부호를 설계할 수 있다.

$$R_0^{(j)} = \begin{cases} R_M, & j = 0, 2, 4, \dots, N-2 \\ R_L, & j = 1, 3, 5, \dots, N-1 \end{cases} \quad (6)$$

$$R_i^{(j)} = \begin{cases} f(R_{i-1}^{(j)}, R_{i-1}^{(j+2^{i-1})}), & 0 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1 \\ g(R_{i-1}^{(j)}, R_{i-1}^{(j+2^{i-1})}), & \frac{N}{2} \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad (7)$$

IV. 전산 실험 결과

제안하는 기법의 성능을 확인하기 위해 전산 실험에 사용된 파라미터는 표 1과 같다. 가우시안 근사화 기법 기반 극 부호 설계의 경우 η 에 따라 특정 신호 대 잡음 비 영역에서 성능이 달라진다^[3]. 따라서 성능 비교를 위해 사용한 모든 극 부호의 경우 비트 오율 10^{-5} 영역에서 최적의 성능을 보이는 η 값을 찾아 설계하였다. 제안하는 기법의 경우 고려한 모든 경우에서 가장 우수한 성능을 보이는 $\eta = 6$ dB를 사용하여 극 부호를 설계하였다. 고려한 모든 부호율과 N 에 대해 a 값에 따른 성능을 확인하였으며 그 결과는 그림 4와 같다. 비트 오율 10^{-5} 을 달성하는 영역에서 a 값에 따른 성능을 확인할 수 있도록 각각의 부호율과 N 의 조합에 대해 서로 다른 신호 대 잡음 비 $\frac{E_b}{N_0}$ 를 사용하여 전산 실험을 수행하였으며 이때 사용된 각 조

표 1. 전산 실험 파라미터
Table 1. Simulation parameters.

Parameters	Values
Channel model	AWGN channel
Decoding method	Successive cancellation
Code rate	1/3, 1/2, 2/3
N	1024, 2048, 4096
Modulation method	16-QAM

표 2. 부호율과 N 에 따른 전산 실험 파라미터
Table 2. Simulation parameters for various code rates and N .

N	1024			2048			4096		
Code rate	1/3	1/2	2/3	1/3	1/2	2/3	1/3	1/2	2/3
$\frac{E_b}{N_0}$ [dB]	5.0	5.8	7.0	4.6	5.5	6.7	4.2	5.0	6.2

합의 $\frac{E_b}{N_0}$ 는 표 2와 같다. 여기에서 E_b 는 부호 비트 당 에너지를 나타낸다. 그림 4에서 볼 수 있는 바와 같이 부호율이 1/3 및 1/2인 경우 모든 N 에 대해 a 값으로 4.5를 부호율이 2/3인 경우 N 에 따라 a 값으로 3.5부터 4 사이의 값을 사용함으로써 성능을 극대화할 수 있다. 또한 부호율이 높아짐에 따라 최적의 성능을 제공하는 a 값이 줄어드는 경향을 확인할 수 있다.

제안하는 극 부호 설계 기법과 일반적인 이진 극 부호 설계 기법으로 설계된 극 부호들을 각각 16-QAM과 연동하였을 경우 부호율에 따른 비트 오율 성능을 그림 5부터 7에 나타내었다. 제안하는 기법의 경우 고려한 모든 부호율과 N 에 대해 $\eta = 6$ dB를 사용하였으며 그림 4에서 도출된 최적의 a 값을 사용하였다. 일반적인 이진 극 부호 설계 기법에서는 고려하는 모든 경우에 대해 최적의 성능을 제공하는 η 를 찾아 가우시안 근사화 기법을 이용하여 설계하였다. 이때 사용된 η 는 부호율이 1/2인 경우 $N = 1024, 2048$ 및 4096에 따라 각각 0, 2 및 1 dB이며 부호율이 1/3 및 2/3인 경우 고려하는 모든 N 에 대해 2 dB이다. 그림 5부터 7에서 볼 수 있는 바와 같이 제안하는 기법은 일반적인 이진 극 부호 설계 기법보다 비트 오율 10^{-5} 을 달성하는 영역에서 부호율이 1/3과 1/2

$$f(R_{i-1}^{(j)}, R_{i-1}^{(j+2^{i-1})}) = E[2 \tanh^{-1}(\tanh(R_{i-1}^{(j)}/2) \tanh(R_{i-1}^{(j+2^{i-1})}/2))]. \quad (4)$$

$$g(R_{i-1}^{(j)}, R_{i-1}^{(j+2^{i-1})}) = E[R_{i-1}^{(j)}] + E[R_{i-1}^{(j+2^{i-1})}]. \quad (5)$$

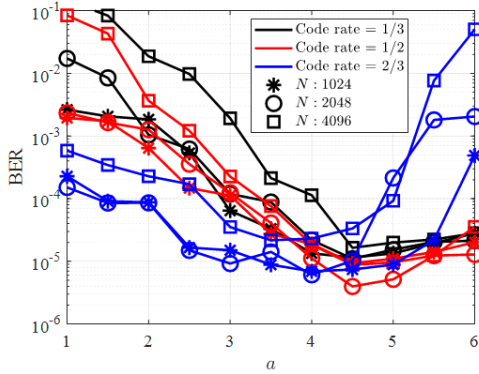


그림 4. α 에 따른 비트 오류 성능
Fig. 4. BER performance versus α .

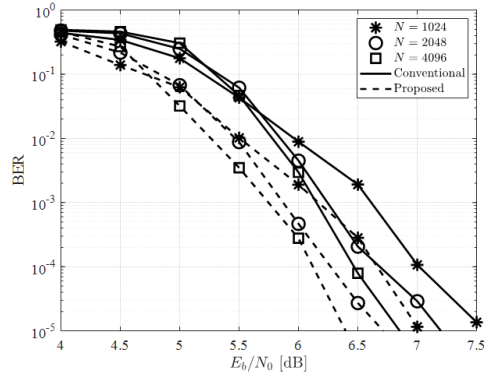


그림 7. 제안하는 극 부호 설계 기법과 일반적인 극 부호 설계 기법의 비트 오류 성능 (code rate = 2/3)
Fig. 7. BER performance of the proposed and conventional polar code design scheme (code rate = 2/3).

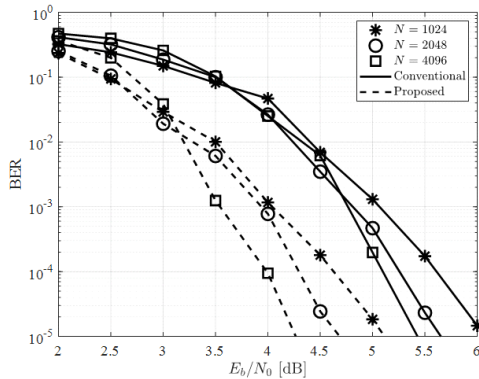


그림 5. 제안하는 극 부호 설계 기법과 일반적인 극 부호 설계 기법의 비트 오류 성능 (code rate = 1/3)
Fig. 5. BER performance of the proposed and conventional polar code design scheme (code rate = 1/3).

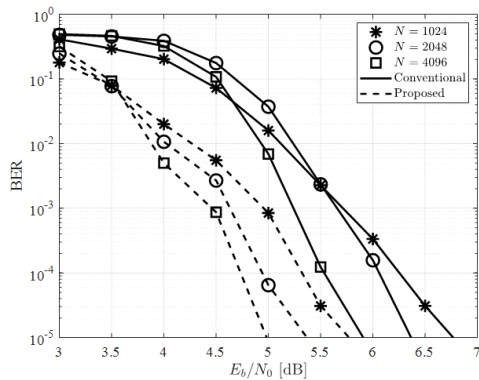


그림 6. 제안하는 극 부호 설계 기법과 일반적인 극 부호 설계 기법의 비트 오류 성능 (code rate = 1/2)
Fig. 6. BER performance of the proposed and conventional polar code design scheme (code rate = 1/2).

인 경우 1 dB, 부호율이 2/3인 경우에는 0.5dB 정도의 부호 이득을 얻을 수 있다. 실험 결과를 통해 제안

하는 기법을 사용하여 추가적인 부호화 및 복호 복잡도 증가 없이 부호 이득을 증대시킬 수 있음을 확인할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 16-QAM 심볼에 매핑되는 부호 비트들의 채널 신뢰도의 비를 최적화하여 극 부호를 설계하고 이를 통해 16-QAM에 적합한 이진 극 부호 설계 기법을 제안하였다. 제안하는 기법은 일반적인 극 부호 설계 기법 대비 추가적인 부호화 및 복호 복잡도 증가 없이 성능을 개선할 수 있다.

References

- [1] E. Arikan, "Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 55, no. 7, pp. 3051-3073, Jul. 2009.
- [2] GPP TS 38.212 v15.3.0, "Multiplexing and channel coding (release 15)," Oct. 2018.
- [3] H. Li and J. Yuan, "A practical construction method for polar codes in AWGN channels," in *TENCON Spring Conf.*, pp. 223-226, Sydney, NSW, Apr. 2013.
- [4] C. I. Ionita, M. Mansour, J. C. Roh, and S. Hosur, "On the design of binary polar codes for high-order modulation," in *Proc. IEEE Global Commun. Conf.*, pp. 2044-2047,

Austin, USA, Dec. 2014.

- [5] G. Bocherer, T. Prinz, P. Yuan, and F. Steiner, "Efficient polar code construction for higher-order modulation," *IEEE WCNCW*, pp. 1-6, 2017.
- [6] A. Lee, D. Kang, and W. Oh, "Optimization of 16-QAM constellation for binary polar codes," *J. KICS*, vol. 43, no. 8, pp. 1237-1242, Aug. 2018.
- [7] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 3rd Ed., McGrawHill, 1995.

백 성 열 (Sungyeol Back)



2020년 2월 : 충남대학교 정보통신공학과 학사
2020년 3월~현재 : 충남대학교 전자전파정보통신공학과 석사과정
<관심분야> 통신시스템 설계 및 구현, 디지털 통신

[ORCID:0000-0001-6161-5904]

김 준 성 (Junseong Kim)



2020년 2월 : 충남대학교 정보통신공학과 학사
2020년 3월~현재 : 충남대학교 전자전파정보통신공학과 석사과정
<관심분야> 통신시스템 설계 및 구현, 디지털 통신

[ORCID:0000-0002-0619-2467]

최 수 용 (Suyong Choi)



2021년 2월 : 충남대학교 정보통신공학과 학사
2021년 3월~현재 : 충남대학교 전자정보통신공학과 석사과정
<관심분야> 통신시스템 설계 및 구현, 디지털 통신

[ORCID:0000-0003-4515-8904]

오 왕 록 (Wangrok Oh)



1994년 2월 : 포항공과대학교 학사
1997년 2월 : 포항공과대학교 석사
2003년 8월 : 포항공과대학교 박사
1997년~2000년 : 포항공과대학교 정보통신연구소 전임연구원
2003년~2006년 : 포항공과대학교 정보통신연구소 전임연구원

2006년~2010년 : 충남대학교 정보통신공학과 조교수
2010년~2015년 : 충남대학교 정보통신공학과 부교수
2015년~현재 : 충남대학교 정보통신공학과 교수
<관심분야> 통신시스템 설계 및 구현, 오류정정부호, MIMO 시스템

[ORCID:0000-0001-8205-5432]