

MIMO 시스템을 위한 칼만 필터 기반 저복잡도 LMMSE 검출 방식

박 상 준*

Low-Complexity LMMSE Detection Based on Kalman Filter for MIMO Systems

Sangjoon Park*

요 약

본 논문에서는 MIMO 시스템을 위한 칼만 필터 기반 저복잡도 검출 방식을 제안한다. 제안 방식은 기존 칼만 필터 기반 방식에서 사용되는 수신 신호 벡터에 대한 하나의 관측 방정식을 각 원소별로 분리된 복수의 관측 방정식으로 분할한 후 칼만 필터 동작을 수행한다. 이를 통해 제안 방식은 기존 고복잡도의 칼만 필터 방식에서 역행렬의 연산 과정을 제거하여 낮은 복잡도로도 동일한 LMMSE 검출 결과를 얻을 수 있다. 또한 송수신 안테나의 수가 증가할수록 일반적인 LMMSE 검출기 대비 낮은 복잡도를 달성할 수 있다.

Key Words : Kalman Filter, LMMSE, MIMO, Low-Complexity Detection, State-Space Model

ABSTRACT

In this letter, a low-complexity LMMSE detection scheme based on Kalman filter is proposed for MIMO systems. In the proposed scheme, the single observation equation with a receive signal vector in the conventional Kalman filter based detection is decomposed as multiple equations with a scalar. In this way, the matrix inverse operation is omitted,

and the proposed scheme can achieve the identical LMMSE estimation result to the conventional high-complexity Kalman filter based detection. It is also shown that the proposed scheme can yield a low computation complexity compared with the conventional LMMSE detection for MIMO systems as the number of antennas increases.

I. 서 론

칼만 필터 (Kalman filter)는 선형 동적 시스템의 상태를 추적할 수 있는 필터로, MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 시스템에서 채널 추정 및 신호 검출 등을 위해 널리 사용되고 있다.^[1-3] 하지만 통상적으로 MIMO 시스템에서의 신호 검출을 위한 칼만 필터 방식은 동일한 성능을 갖는 일반적인 LMMSE (Linear Minimum Mean-Square-Error) 검출 방식 대비 높은 복잡도를 요구하며, 따라서 주파수 선택 채널 등에서 제한적으로 응용되어 왔다.

이러한 기존의 응용 방식과 달리, 본 논문에서는 일반적인 MIMO 시스템 환경에 적용할 수 있는 저복잡도의 칼만 필터 기반 LMMSE 검출 방식을 제안한다. 기존 칼만 필터 기반 검출 방식에서는 MIMO 시스템의 수신 신호 벡터를 하나의 관측 방정식 (observation equation)으로 설정했던 반면, 제안 방식에서는 각 수신 안테나로 받아진 신호들을 각각 관측 방정식으로 설정하여 기존 방식의 복잡도를 절감한다.^[4] 이 때 관측 방정식이 선형이므로, 잡음 벡터가 AWGN (Additive White Gaussian Noise)인 경우에는 기존 방식과 동일하게 LMMSE 추정을 수행할 수 있다.^[1]

II. 시스템 모델

본 문에서는 송신단 및 수신단의 안테나 수가 각각 N 및 M 인 공간 다중화 (spatially multiplexed) MIMO 시스템을 고려한다. 이 때 송신 신호 벡터 $\mathbf{x} = [x(1), \dots, x(N)]^T$ 는 $E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \mathbf{I}_N$ 을 만족하며, \mathbf{I}_N 은 $N \times N$ 단위행렬 (identity matrix)이다. 이 때 수신 신호 $\mathbf{y} = [y(1), \dots, y(M)]^T$ 는 다음과 같다.

* 이 논문은 2019년도 과학기술정보통신부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. NRF-2019R1C1C1003202).

* First and Corresponding Author : (ORCID:0000-0002-6684-9803) Kyonggi University, Department of Electronic Engineering, sj.park@kgu.ac.kr, 조교수, 정회원

논문번호 : 202109-249-A-LU, Received September 19, 2021; Revised October 12, 2021; Accepted October 12, 2021;

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1) \qquad \mathbf{P} = \mathbf{I}_N - \mathbf{K}\mathbf{H} \quad (6)$$

식 (1)에서 $\mathbf{n} = [n(1), \dots, n(M)]^T$ 은 $M \times 1$ AWGN 벡터로 각 원소들은 평균이 0이고 분산이 σ^2 인 i.i.d. 순환 대칭 복소 가우시안 분포를 따른다. 또한 \mathbf{H} 는 $M \times N$ 채널 행렬을 나타내며, 이 때 \mathbf{h}_m ($1 \leq m \leq M$)은 \mathbf{H} 의 m 번째 행인 $1 \times N$ 벡터로 송신 안테나들과 m 번째 수신 안테나간 사이의 채널을 나타낸다.

III. 제안 저복잡도 칼만 필터 방식

제안 방식의 설명에 앞서 먼저 일반적인 LMMSE 검출 방식 및 기존 칼만 필터 기반 LMMSE 검출 방식을 소개한다. 일반 LMMSE 검출의 경우 다음 동작을 통해 \mathbf{x} 를 추정한다.^[5]

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{LMMSE}} = \mathbf{G}\mathbf{y} \quad (2)$$

이 때 \mathbf{G} 는 MMSE 행렬로 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{G} = (\mathbf{H}^H\mathbf{H} + \sigma^2\mathbf{I}_N)^{-1}\mathbf{H}^H \quad (3)$$

다음으로 수신 신호 벡터 \mathbf{y} 에 대한 식 (1)을 하나의 관측 방정식으로 하는 칼만 필터 기반 LMMSE 검출 방식을 기술한다. 먼저 상태 공간 모델 (state-space model)의 프로세스 방정식 (process equation)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{x}' + \mathbf{w} \quad (4)$$

식 (4)에서 \mathbf{x}' 는 이전 전송 시간에 전송된 송신 신호 벡터를 나타내며, \mathbf{F} 는 상태 천이 행렬 (state transition matrix), \mathbf{w} 는 프로세스 잡음 벡터 (process noise vector)를 나타낸다. 이 때 매 전송 시간별 변조된 심볼들이 서로 다른 독립적인 비트열로부터 생성되었음을 고려하면, \mathbf{x} 와 \mathbf{x}' 의 각 원소들은 모두 다른 상태를 나타내게 된다. 따라서 이 때 \mathbf{x} 의 값과 상관없이 \mathbf{F} 는 영행렬 (all-zero matrix)이며, $\mathbf{w} = \mathbf{x}$ 가 된다. 따라서 해당 상태 공간 모델에서의 칼만 필터 출력은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{CV-KF}} = \mathbf{K}\mathbf{y} \quad (5)$$

$\hat{\mathbf{x}}_{\text{CV-KF}}$ 는 \mathbf{x} 의 추정치이며, \mathbf{P} 는 $N \times N$ 오류 공분산 행렬 (error covariance matrix)이다. 또한 \mathbf{K} 는 $N \times M$ 칼만 이득 (Kalman gain) 행렬로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^H(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma^2\mathbf{I}_M)^{-1} \quad (7)$$

이 때 $(\mathbf{H}^H\mathbf{H} + \sigma^2\mathbf{I}_N)^{-1}\mathbf{H}^H = \mathbf{H}^H(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma^2\mathbf{I}_M)^{-1}$ 이므로, 식 (2) 및 (5)는 동일하다. 즉 MIMO 시스템에서 수신 신호 벡터에 대한 식을 하나의 관측 방정식으로 하는 칼만 필터 방식은 LMMSE 검출 성능을 갖는다.^[1] 단 공간 다중화 시스템에서는 통상적으로 $M \geq N$ 이며, 이에 식 (5) 및 (7)의 수행은 식 (2) 및 (3)의 수행 대비 높은 복잡도를 요구한다. 또한 추후 처리 과정을 위한 식 (6)에서의 \mathbf{P} 의 계산은 추가 연산량을 야기한다. 식 (7) 대신 식 (3)의 \mathbf{G} 를 \mathbf{K} 로 사용하는 등 연산량 절감을 위한 방법들이 수행될 수 있으나, 이를 고려해도 식 (1)에 대한 단일 관측 방정식을 갖는 칼만 필터 기반 LMMSE 검출은 일반적인 LMMSE 검출 대비 통상적으로 유사하거나 높은 연산량을 요구하게 된다.

이러한 MIMO 시스템에서의 칼만 필터 기반 검출에 대한 연산량을 낮추기 위해, 먼저 제안 방식은 다음과 같이 $M(1 \leq m \leq M)$ 개의 관측 방정식들을 갖는 상태 공간 모델을 수립한다.^[4]

$$y_m = \mathbf{h}_m\mathbf{x} + n_m \quad (8)$$

즉, 수신 안테나로 받아진 각각의 신호들을 하나의 관측 방정식으로 하여 총 M 개의 관측 방정식을 세운다. 한편, 프로세스 방정식은 식 (4)와 동일하다.

이러한 상태 공간 모델을 바탕으로, 제안 기법은 다음과 같이 $M(1 \leq m \leq M)$ 번의 출력 과정을 순차적으로 반복한다.

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \hat{\mathbf{x}}_{m-1} + \mathbf{k}_m(y_m - \mathbf{h}_m\hat{\mathbf{x}}_{m-1}) \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{P}_{m-1} - \mathbf{k}_m\mathbf{h}_m\mathbf{P}_{m-1} \quad (10)$$

$\hat{\mathbf{x}}_m$ 은 m 번째 수신신호까지를 이용한 \mathbf{x} 의 추정치이며 \mathbf{P}_m 은 이에 대한 오류 공분산 행렬로, $\hat{\mathbf{x}}_0$ 및 \mathbf{P}_0

는 각각 영벡터 (all-zero vector) 및 단위행렬로 설정된다. 한편 \mathbf{k}_m 은 m 번째 $N \times 1$ 칼만 이득 벡터로 다음과 같이 계산된다.

$$\mathbf{k}_m = \frac{\mathbf{P}_{m-1} \mathbf{h}_m^H}{\mathbf{h}_m \mathbf{P}_{m-1} \mathbf{h}_m^H + \sigma^2} \quad (11)$$

즉, 벡터를 갖는 단일 관측 방정식의 분할을 통해 제안 방식은 기존 칼만 방식에서의 역행렬 연산을 제거하여 복잡도를 감소시킬 수 있다. 이 때 기존 관측 방정식인 식 (1)이 선형이며 관측 잡음 \mathbf{n} 이 AWGN 이므로, 제안 방식의 최종 출력 $\hat{\mathbf{x}}_M$ 및 \mathbf{P}_M 은 기존 출력 $\hat{\mathbf{x}}_{CV-KF}$ 및 \mathbf{P} 와 각각 동일하다.^[1] 따라서 제안 방식은 기존 방식과 동일하게 LMMSE 검출 동작을 수행할 수 있다.

다음으로는 각 기법들의 행렬 및 벡터 연산에 필요한 복소 곱셈 및 나눗셈 (complex multiplication and division)의 수를 통한 연산량을 계산하였다. 이 때 $A \times A$ 행렬에 대한 역행렬 연산은 가우스 소거법 (Gaussian elimination)의 사용을 가정하여 $4A^3/3 - A/3$ 으로 계산하였다. 따라서 일반 LMMSE 방식의 식 (2) 및 (3)에서 요구되는 연산량은 다음과 같다.

$$c_{LMMSE} = 4N^3/3 + 2MN^2 + MN - N/3 \quad (12)$$

다음으로, 단일 관측 방정식 기반 칼만 필터 방식의 식 (5)-(7)에서 요구되는 연산량은 다음과 같다.

$$c_{CV-KF} = 4M^3/3 + 2NM^2 + MN^2 + MN - M/3 \quad (13)$$

마지막으로, 제안 방식은 식 (9)-(11)이 총 M 번 수행되며, 각 m 번째 단계에서 식 (10) 및 (11)의 $\mathbf{P}_{m-1} \mathbf{h}_m^H = (\mathbf{h}_m \mathbf{P}_{m-1})^H$ 은 한 번만 계산할 수 있다. 따라서 요구되는 연산량은 다음과 같다.

$$c_{PR-KF} = 2MN^2 + 4MN \quad (14)$$

표 1에서는 $N=M$ 일 때 안테나 수에 따른 식 (12)-(14)의 각 기법들의 연산량을 나타내고 있다. 표를 바탕으로 제안 방식이 특히 안테나 수가 증가할수록 연산량을 크게 낮출 수 있음을 확인할 수 있다. 구체적으로, 제안 방식은 기존 칼만 필터 방식 대비

표 1. 각 기법들의 안테나 수에 따른 연산량
Table 1. Computational complexity according to the number of antennas.

$N(=M)$	c_{LMMSE}	c_{CV-KF}	c_{PR-KF}
2	$3.00 \cdot 10^1$	$3.80 \cdot 10^1$	$3.20 \cdot 10^1$
8	$1.77 \cdot 10^3$	$2.28 \cdot 10^3$	$1.28 \cdot 10^3$
32	$1.10 \cdot 10^5$	$1.43 \cdot 10^5$	$6.96 \cdot 10^4$
128	$7.01 \cdot 10^6$	$9.10 \cdot 10^6$	$4.26 \cdot 10^6$

$N=M=2$ 일 때 약 16%, $N=M=128$ 일 때 약 53% 가량 절감된 연산량을 요구한다. 또한 일반 LMMSE 방식 대비 $N=M=2$ 일 때는 약 7% 가량 많은 연산량을 요구하나, 안테나 수가 증가하여 $N=M=128$ 인 경우에는 약 39% 가량 감소된 연산량만을 요구하게 된다.

IV. 모의실험 결과 및 결론

그림 1에서는 QPSK (Quadrature Phase Shift Keying) 변조를 사용하는 레일리 감쇄 채널에서 각 기법들의 평균 BER (Bit Error Ratio)을 나타내고 있다. 예측된 바와 같이 각 기법들은 모두 동일하게 LMMSE 검출을 수행하며, 따라서 주어진 N 및 M 에서 모두 동일한 평균 BER을 달성함을 확인할 수 있다. 이를 통해 제안 기법이 MIMO 시스템에서 특히 안테나 수가 증가할수록 보다 낮은 복잡도를 통한 LMMSE 검출이 가능함을 확인할 수 있다.

제안 방식에서 이용하는 관측 방정식 분할 원리는 기존의 주파수 선택 채널 등에서의 칼만 필터 기반 준최적 검출기 등의 복잡도 감소를 위해 확장 적용될 수

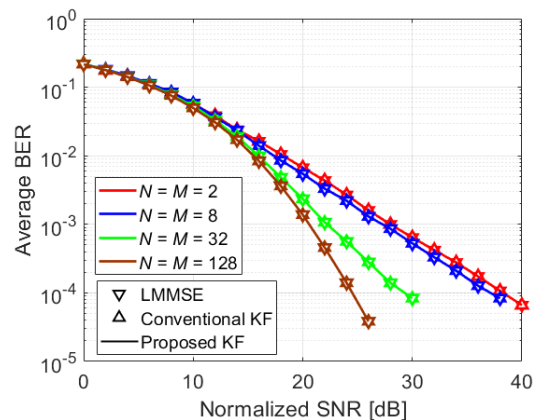


그림 1. 각 기법들의 평균 BER 성능 비교
Fig. 1. Average BER comparison

있다. 또한, 대규모 MIMO 시스템 등에서 제안 방식의 복잡도를 더욱 낮추기 위한 연구가 수행될 수 있다. 이러한 연구들은 향후 과제로 남는다.

References

- [1] D. Simon, *Optimal State Estimation*, Wiley, 2006.
- [2] J. Chung, et al., "Adaptive channel estimation techniques for FDD massive MIMO systems," *J. KICS*, vol. 40, no. 7, pp. 1239-1247, Jul. 2015.
- [3] S. Park and S. Choi, "Iterative equalizer based on Kalman filtering and smoothing for MIMO-ISI channels," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 63, no. 19, pp. 5111-5120, Oct. 2015.
- [4] S. Park, "Kalman filtering based combining for MIMO systems with Hybrid ARQ," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 69, *early access article*, Sep. 2021.
- [5] A. Paulraj, et al., *An Introduction to Space-Time Wireless Communication*, Cambridge Univ. Press, 2003.